



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.





LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1906.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung

1906.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften
mathematisch-physikalische Klasse
aus dem Jahre 1906.

| | |
|---|--------|
| F. Åkerblom, Vergleichung der Diagramme aus Upsala und Göttingen von Fernbeben, deren Wellen die Erde umkreist haben. Mit 1 Tafel | S. 121 |
| F. Åkerblom, Seismische Registrierungen in Upsala Oktober 1904 bis Mai 1905 | „ 125 |
| G. Angenheister, Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. Mit 1 Tafel | „ 110 |
| G. Angenheister, Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905. Mit 1 Tafel | „ 357 |
| Darin eine Mitteilung von Herrn E. Wiechert S. 376–380 | |
| W. Biltz, Ultramikroskopische Beobachtungen. II. Mitteilung: Zur Charakterisierung anorganischer Colloide | „ 141 |
| E. Bose, Calorimetrische Studien. | |
| I. | „ 278 |
| II. | „ 309 |
| III. | „ 335 |
| A. Coehn, Ueber elektrische Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium. | |
| Erste Mitteilung | „ 100 |
| Zweite Mitteilung | „ 106 |
| Ph. Furtwängler, Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers. Erste Mitteilung | „ 417 |
| F. Heiderich, Die Zahl und die Dimension der Geschmacksknospen der Papilla vallata des Menschen in den verschiedenen Lebensaltern | „ 54 |

| | |
|---|--------|
| E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen | S. 351 |
| E. Hertel, Mitteilungen über die Wirkung von Lichtstrahlen auf lebende Zellen | „ 94 |
| P. Hertz, Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluß einer longitudinal wirkenden Kraft | „ 229 |
| D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. | |
| Vierte Mitteilung | „ 157 |
| Fünfte Mitteilung | „ 439 |
| W. Holtz, Physik ohne Apparate: Anziehung und Abstoßung unelektrischer Körper | „ 269 |
| W. Holtz, Elektrische Versuche mit einer Tischfläche | „ 273 |
| A. Hurwitz, Ueber die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion | „ 275 |
| A. von Koenen, Ueber scheinbare und wirkliche Transgressionen | „ 481 |
| F. Linke, Numerische Uebersicht der am Samoa-Observatorium im Jahre 1905 registrierten Fern- und Naherdbeben | „ 435 |
| F. Linke, Messungen des Ionengehaltes und der Radioaktivität der Luft auf dem Großen Ozean | „ 490 |
| F. Linke, Meteorologische Drachenaufstiege in Samoa | „ 493 |
| W. Nernst, Ueber die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen | „ 1 |
| K. Schwarzschild, Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre | „ 41 |
| J. Thomae, Euler'sche Integrale | „ 504 |
| W. Voigt, Fragen der Krystallphysik. II. Ueber die Wirkung eines Magnetfeldes auf das optische Verhalten pleochroitischer Krystalle | „ 507 |
| O. Wallach, Untersuchungen aus dem Göttinger Universitäts-Laboratorium. XV. | „ 65 |
| O. Weigel, Ueber das Verhalten von Schwermetallsulfiden in wässriger Lösung | „ 525 |
| J. Weingarten, Zur Theorie der Wirbelringe | „ 81 |
| E. Wiechert s. Angenheister. | |

Ueber die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen.

Von

W. Nernst.

Mit einer Figur.

Vorgelegt in der Sitzung am 23. Dezember 1905.

Für die Beziehungen zwischen chemischer Energie und Wärmeentwicklung bei chemischen Prozessen glaubte bekanntlich Berthelot eine sehr einfache Lösung gefunden zu haben, indem er beide Größen einander gleichsetzte.

Damit hängt aufs Engste die bereits früher aufgestellte sogenannte Thomsonsche Regel zusammen, wonach die von einem galvanischen Elemente gelieferte elektrische Arbeit der Wärmeentwicklung des stromliefernden Prozesses gleich sein sollte¹⁾.

Nachdem man aber zur Bestimmung der chemischen Energie, d. h. der maximalen Arbeit, die von einem chemischen Prozesse geleistet werden kann, zwei Wege aufgefunden hatte, indem man obige Größe einmal aus dem chemischen Gleichgewichte, sodann auch aus der elektromotorischen Kraft reversibler galvanischer Elemente abzuleiten gelernt hatte, da zeigte sich, daß keineswegs jene maximale Arbeit mit der thermochemisch bestimmten Wärmetönung zusammenfällt.

Besonders klar hat dies Helmholtz ausgesprochen, der übrigens bereits vor Berthelot zunächst die Vermutung aufgestellt hatte²⁾, daß die elektromotorische Kraft durch die Wärmetönung gegeben sei (sogen. Regel von Thomson) und der dann später (1882)

1) Vergl. hierzu z. B. Nernst, Theoret. Chemie, vierte Aufl., S. 668 u. 691.

2) Gesetz von der Erhaltung der Kraft. 1847.

die durch die mechanische Wärmetheorie gegebene Beziehung zwischen beiden Größen scharf formuliert hat¹⁾.

Hiernach gilt für die maximale Arbeit A und die Aenderung der gesamten Energie U folgende Beziehung

$$(1) \quad A - U = T \frac{dA}{dT},$$

worin T die absolute Temperatur bedeutet. Nur wenn A unabhängig von der Temperatur wäre, so würde bei allen Temperaturen

$$(2) \quad A = U$$

sein und es würde zugleich auch U von der Temperatur unabhängig sein müssen. Die letztere Forderung würde für die spezifischen Wärmen der an einer Reaktion sich beteiligenden Substanzen gewisse Beziehungen mit sich bringen, die eben in der Regel nicht erfüllt sind.

Zugleich sieht man aber auch, daß eine Berechnung von A aus U nicht möglich ist; denn wenn etwa

$$A = f(T)$$

eine Lösung der Gleichung (1) wäre, so ist

$$A = f(T) + BT,$$

worin B eine beliebige Konstante bedeutet, ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (1).

Demgemäß finden wir denn auch, daß bei der Behandlung chemischer Prozesse vom Standpunkte der beiden Wärmesätze das in Rede stehende Problem ungelöst bleibt, indem in den betreffenden Gleichungen nicht näher bestimmte Integrationskonstanten auftreten; ohne Hinzufügung neuer Annahmen lediglich mit Hilfe der mechanischen Wärmetheorie läßt sich die Beziehung zwischen A und U nicht gewinnen. Aber eine naheliegende Betrachtung dürfte auf einem einfachen Wege zu einer neuen Hypothese führen und das bisherige Beobachtungsmaterial scheint, wie ich weiter unten ausführlich darlegen möchte, die Zulässigkeit jener Hypothese zu bestätigen. Bevor wir aber dazu übergehen, sei kurz an die wichtigsten Formeln der chemischen Thermodynamik erinnert.

Wir wollen im Folgenden uns zunächst auf gasförmige Systeme beschränken. Wie ich nämlich gezeigt zu haben glaube,

1) Ges. Abhandl. Bd. II, S. 958, (1882).

sind es gerade die chemischen Gleichgewichte in homogener Phase, die für das Wesen der chemischen Prozesse besonders charakteristisch sind¹⁾.

Denn die Frage, ob z. B. feste Stoffe neben der homogenen Phase koexistieren, ist lediglich eine Frage ihrer Dampfspannung oder Löslichkeit und steht daher mit dem eigentlichen chemischen Prozesse nur in lockerem Zusammenhang. Die Frage ferner, wie sich das Gleichgewicht in zwei koexistierenden homogenen (flüssigen oder gasförmigen) Phasen einstellt, ist durch die Größe der Teilungskoeffizienten der reagierenden Molekulgattungen beantwortet.

Wenn wir also im Folgenden die Aufgabe zu lösen suchen, ob sich chemische Gleichgewichte lediglich aus calorischen Daten berechnen lassen, so können wir uns dabei, wenigstens zunächst, auf Gleichgewichte in homogener Phase beschränken und zwar wählen wir als solche die gasförmige Phase.

Bezeichnen wir also mit

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \dots = \nu'_1 A'_1 + \dots$$

das Schema einer chemischen Reaktion (z. B. $2H_2 + O_2 = 2H_2O$), so gilt für die Gleichgewichtskonzentrationen c folgende Beziehung

$$(3) \quad K = \frac{c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \dots}{c_1'^{\nu_1'} \dots},$$

worin K die Konstante des Gesetzes der chemischen Massenwirkung bedeutet. Wir wollen nun im Folgenden der besseren Uebersicht halber die Reaktionsformel stets so schreiben, daß die Reaktionen im Sinne von links nach rechts unter Entwicklung von Wärme verlaufen. Bedeutet Q diese Wärmeentwicklung, so liefert der zweite Wärmesatz in der von van't Hoff benutzten Fassung

$$(4) \quad Q = RT^2 \frac{d \ln K}{dT}$$

(Gleichung der Reaktionsisochore).

Nun lehrt die Erfahrung, daß die Wärmetönung chemischer Prozesse sich mit der Temperatur nicht sehr stark ändert: wir setzen daher

$$(5) \quad Q = Q_0 + T \Sigma \nu \alpha + T^2 \Sigma \nu \beta + \dots$$

worin also Q_0 die Wärmeentwicklung beim absoluten Nullpunkte

1) Vgl. meine Theoret. Chemie, S. 470 u. 489.

der Temperatur bedeutet. Die Werte von $\alpha, \beta \dots$ sind den einzelnen reagierenden Stoffen eigentümliche Coefficienten und zwar ist nach dem ersten Wärmesatz

$$(6) \quad \frac{dQ}{dT} = \sum \nu C_v = \sum \nu \alpha + 2T \sum \nu \beta + \dots,$$

worin C_v die Molekularwärmen bei konstantem Volumen bedeuten.

Die Frage allerdings, ob sich die spezifischen Wärmen vom absoluten Nullpunkte an durch eine nach ganzen Potenzen von T fortschreitende Reihe ausdrücken lassen und ob nicht insbesondere dafür besser späterhin eine andersartige Temperaturfunktion eingesetzt werden wird, scheint mir noch offen zu bleiben. Zur Zeit fehlt es offenbar an hinreichenden Beobachtungsmaterial, sodaß man wohl nicht umhin kann, zunächst die beiden einfachsten Ansätze (5) und (6) zu machen. Uebrigens spielen in Gleichung (5) die spezifischen Wärmen in der Regel immerhin nur die Rolle von Korrekektionsgrößen.

Gleichung (4) und (5) liefern durch Integration die Gleichung

$$(7) \quad \ln K = -\frac{Q_0}{RT} + \frac{\sum \nu \alpha}{R} \ln T + \frac{\sum \nu \beta}{R} T + \dots + J;$$

darin bedeutet J die schon oben erwähnte, zunächst völlig unbestimmte Integrationskonstante.

Schließlich sei noch an den Fall des Gleichgewichts zwischen Dampf und fester oder flüssiger Phase (Verdampfung oder Sublimation) erinnert; hier gelten analog der Reihe nach die entsprechenden Formeln:

$$(5a) \quad \lambda - RT = \lambda_0 + T(\alpha - \alpha_0) + T^2(\beta - \beta_0) + \dots$$

$$(6a) \quad C_v - c_0 = \alpha - \alpha_0 + 2T(\beta - \beta_0) + \dots$$

$$(7a) \quad \ln \xi = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{\alpha - \alpha_0}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta_0}{R} T + \dots + i.$$

In den vorstehenden Formeln bedeutet also ξ die Gleichgewichtskonzentration, $\lambda - RT$ die wegen der äußeren Arbeit korrigierte Kondensationswärme und λ_0 die Kondensationswärme beim absoluten Nullpunkt; i ist eine jeder Substanz eigentümliche Integrationskonstante. C_v ist wiederum die Molekularwärme des Gases, c_0 diejenige der flüssigen oder festen Substanz bei der Temperatur T .

1. Ermittlung der Integrationskonstante für gasförmige Systeme.

Obwohl, wie bereits oben erwähnt, die Größen A und U im Allgemeinen nicht einander gleich sind, so ist es doch sehr auffällig, daß, wenigstens bei nicht zu hohen Temperaturen, in der Regel der Unterschied beider Größen innerhalb mäßiger Grenzen bleibt. Freilich sind bei diesem Vergleich Gase und verdünnte Lösungen auszuschalten, weil bei diesem bekanntlich Q , nicht aber A von der Konzentration unabhängig ist. Schon lange war mir nun in dieser Hinsicht aufgefallen, daß bei galvanischen Kombinationen, bei welchen in der Gleichung des stromliefernden chemischen Prozesses nur feste Körper und sehr konzentrierte Lösungen vorkommen, die Unterschiede zwischen A und U auffällig klein sind; ferner sei auch an das Verhalten der sogenannten idealen konzentrierten Lösungen¹⁾ erinnert. So drängte sich die Annahme auf, daß in solchen Fällen in der nächsten Nähe des absoluten Nullpunktes ein völliges Zusammenfallen beider Größen stattfindet, und es würde als Grenzesetz

$$(8) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{dA}{dT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{dQ}{dT} \text{ für } T = 0$$

sich ergeben.

Betrachten wir also eine Reaktion zwischen lauter festen oder flüssigen, in reinem Zustande befindlichen Substanzen, also etwa, um die Sache durch ein Beispiel zu veranschaulichen, die Bildung festen oder flüssigen (unterkühlten) Wassers aus reinem festen oder flüssigen Sauerstoff und Wasserstoff. Wir denken uns in bekannter Weise die Wasserbildung isotherm und reversibel vollzogen, indem wir Wasserstoff und Sauerstoff in einen Raum, in welchem chemisches Gleichgewicht herrscht, hineindestillieren und gleichzeitig das gebildete Wasser isotherm und reversibel zum festen oder flüssigen Wasser hinüberdestillieren. Bedeuten dann, ξ die Sättigungskonzentrationen der einzelnen reagierenden Komponenten und K die Gleichgewichtskonstante bei der betreffenden Temperatur, bezogen natürlich auf ein homogenes gasförmiges System, nämlich auf den Gleichgewichtsraum, so wird in bekannter Weise²⁾

$$(9) \quad A = RT(\sum \nu \ln \xi - \ln K),$$

1) Nernst, Wied. Ann. 53, 57 (1894).

2) Vgl. z. B. meine Theoret. Chemie, S. 630 ff.

während andererseits, wenn ebenso, wie oben, Q die Wärmetönung im homogenen gasförmigen System und λ die gewöhnliche, $\lambda - RT$ somit die wegen Arbeitsleistung korrigierte Verdampfungswärme bedeutet.

$$U = Q - \Sigma \nu (\lambda - RT)$$

oder nach (5) und (5a)

$$(10) \quad U = Q_0 - \Sigma \nu (\lambda_0 - \alpha_0 T - \beta_0 T^2)$$

wird. Setzen wir ferner in Gleichung (9) die betreffenden Werte aus Gleichung (7) und (7a) ein und differentiiieren, so folgt

$$(11) \quad -\frac{dA}{dT} = \Sigma \nu \alpha_0 + \Sigma \nu \alpha_0 \ln T + R(J - \Sigma \nu i) + 2T \Sigma \nu \beta_0,$$

während andererseits durch Differentiation von Gleichung (10)

$$(12) \quad \frac{dU}{dT} = \Sigma \nu \alpha_0 + 2T \Sigma \nu \beta_0,$$

sich ergibt. Vergleichen wir nunmehr (11) und (12) einerseits mit (1) und (8) andererseits, so ergeben sich folgende, wie mir scheint, bemerkenswerte und vielleicht in mancher Hinsicht überraschende Resultate. Damit nämlich A und U zum gleichen bestimmten Grenzwert beim absoluten Nullpunkt der Temperatur konvergieren, darf offenbar das Glied $\Sigma \nu \alpha_0 \ln T$ nicht unendlich groß oder auch nur unbestimmt werden, d. h. es muß

$$(13) \quad \Sigma \nu \alpha_0 = 0$$

und gleichzeitig auch

$$\ln T \cdot \Sigma \nu \alpha_0 = 0$$

sein; die Regel von Kopp, daß die Molekularwärmen additiv sind, würde also streng beim absoluten Nullpunkte gelten, und zwar sowohl für flüssige (amorphe) wie feste Körper.

Sodann ergibt sich als weitere Folgerung aus (12) und (13), daß

beim absoluten Nullpunkte $\frac{dU}{dT}$ gegen Null konvergiert und da nach

(8) das Gleiche dementsprechend für $\frac{dA}{dT}$ gelten muß, so folgt

$$(14) \quad J = \Sigma \nu i,$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. Denn die zunächst völlig unbestimmte Integrationskonstante J ist dadurch auf eine Summe von Integrationskonstanten i zurückgeführt, die jeder einzelnen Substanz eigentümlich sind und durch an jeder einzelnen Substanz auszuführende Messungen ermittelt werden können.

Schließlich erhalten wir noch die beiden Gleichungen

$$\frac{dA}{dT} = -2T\Sigma\nu\beta_0, \quad \frac{dU}{dT} = +2T\Sigma\nu\beta_0,$$

die nicht nur die Konvergenz von $\frac{dA}{dT}$ und $\frac{dU}{dT}$ zum Werte Null für $T = 0$ zum Ausdruck bringen, sondern gleichzeitig auch auf einen symmetrischen Verlauf von A und U in nächster Nähe des absoluten Nullpunktes hindeuten.

Bei dieser Betrachtung sind in (5) und (5a) höhere Glieder als T^2 fortgelassen, aber man sieht sofort, daß ihre Berücksichtigung hier gar nichts ändert. Auch im Folgenden werden wir übrigens mangels hinreichender Beobachtungen die höheren Glieder außer Acht lassen müssen.

Die Richtigkeit unserer Fundamentalthypothese vorausgesetzt liefert uns obige Betrachtung also die prinzipielle Lösung des hier behandelten Problems; ehe wir jedoch zur Besprechung des Versuches einer praktischen Lösung, nämlich zur Ermittlung der Integrationskonstanten i , übergehen, möchte ich noch folgende historische Bemerkungen einschalten.

Daß eine kinetische Behandlung der Gasgleichgewichte im Prinzip über die Wärmesätze hinauszuführen im Stande ist, hat Boltzmann¹⁾ betont, doch haben sich neue praktisch verwendbare Resultate auf diesem Wege bisher nicht ergeben.

Nach Abschluß der obigen Rechnung fand ich in dem Werke von Le Chatelier „Les équilibres chimiques“ (1888) bei Besprechung einer der Differentialgleichung (7) analogen Formel folgende Bemerkung (S. 184):

„Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Integrationskonstante, wie die andern Koeffizienten der Differentialgleichung, eine bestimmte Funktion gewisser physikalischer Eigenschaften der reagierenden Substanzen ist. Die Bestimmung der Natur der Funktion würde zur völligen Kenntnis der Gesetze des Gleichgewichts führen. Sie würde unabhängig von neuen experimentellen Daten die vollständigen Gleichgewichtsbedingungen a priori bestimmen, welche einer bestimmten chemischen Reaktion entsprechen; bis jetzt hat man die genaue Natur dieser Konstante noch nicht bestimmen können.“

Mit diesen Worten hat der berühmte französische Chemiker nicht nur das hier behandelte Problem aufs Schärfste formuliert, sondern wohl auch (vergl. besonders auch S. 204) den Weg zur

1) Wied. Ann. 22, 64 (1882).

Lösung desselben geahnt. Ich meinerseits möchte noch hinzufügen, daß das neue von mir benutzte Wärmetheorem, das, wie ich gezeigt zu haben glaube, zu einer Lösung des Problems führt, auch auf andern Gebieten vielleicht sich fruchtbar erweisen wird.

Ferner möchte ich erwähnen, daß Haber in seinem kürzlich erschienenen sehr bemerkenswerten Werke „Thermodynamik technischer Gasreaktionen“ ebenfalls das hier behandelte Problem deutlich formuliert und, wenigstens für einzelne Fälle, den Versuch einer Lösung gemacht hat. Doch scheinen mir seine Ausführungen in wesentlichen Punkten von den meinigen verschieden zu sein; insbesondere ist nach meinen Formeln die Integrationskonstante nicht etwa für Gasreaktionen, die ohne Aenderung der Molekühlzahl verlaufen, notwendig gleich Null, wie es Haber vermutet.

2. Ueber die Berechnung von Dampfdruckkurven.

In diesem Kapitel soll die Berechnung der Zahlenwerte der Integrationskonstante i behandelt werden. Gleichung (7a) lautete

$$\ln \xi = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{\alpha - \alpha_0}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta_0}{R} T + \dots + i;$$

führen wir, was für die Berechnung bequemer sein wird, anstatt der Sättigungskonzentration ξ den Dampfdruck p im Sinne der Formel

$$p = \xi RT$$

ein, so wird

$$(15) \quad \ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{R + \alpha - \alpha_0}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta_0}{R} T + i + \ln R.$$

Es lag nun nahe, zur Berechnung der Dampfdruckkurven das Theorem der übereinstimmenden Zustände heranzuziehen, wonach, wenn wir kritischen Druck und Temperatur mit π und τ bezeichnen,

$$\frac{p}{\pi} = f\left(\frac{T}{\tau}\right)$$

sein müßte, worin $f\left(\frac{T}{\tau}\right)$ eine von der Natur der betreffenden Substanz unabhängige Temperaturfunktion bedeutet. Van der Waals¹⁾ hat für diese Temperaturfunktion als empirische Näherungsgleichung folgende spezielle Form benutzt:

1) Continuität etc. S. 147.

$$(16) \quad \log \frac{\pi}{p} = a \left(\frac{\tau}{T} - 1 \right)$$

oder

$$(16a) \quad \log p = -a \frac{\tau}{T} + a + \log \pi.$$

Hierin soll a einen für alle Substanzen gleichen Wert besitzen, der zu etwa 3,0 von ihm gefunden wurde.

Die Formel (16) giebt nun in der Tat mit einer bei ihrer großen Einfachheit bemerkenswerten Annäherung die Dampfdruckmessungen bis zum kritischen Punkte wieder; doch fand ich a stark mit der Natur der betreffenden Substanz veränderlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, in welcher die bei Benutzung gewöhnlicher Logarithmen erhaltener a -Werte verzeichnet sind:

Tabelle 1.

| | | | |
|---------------------|------|---------------|-------|
| Wasserstoff | 1,83 | Chloroform | 3,00 |
| Argon | 2,17 | Aether | 3,15 |
| Stickstoff | 2,45 | Propylacetat | 3,49 |
| Sauerstoff | 2,53 | Aethylalkohol | 4,05. |
| Schwefelkohlenstoff | 2,63 | | |

Die vorstehend aufgeführten Werte sind Messungen aus dem Gebiete etwa

$$\frac{\tau}{T} = 1,5 \text{ bis } 2$$

entnommen. Die Kurvenzeichnung ¹⁾ (Fig. 1) scheint mir geeignet, den Verlauf der Dampfdruckkurven für die verschiedenen Substanzen sehr gut zum Ausdruck zu bringen; als Abscissen dienen die Werte von $\frac{\tau}{T} - 1$, als Ordinate diejenigen von $\log \frac{\pi}{p}$; im Sinne des Theorems der übereinstimmenden Zustände sollten übereinstimmende Kurven, die natürlich sämtlich im Nullpunkte des Koordinatensystems münden müssen, und im Sinne der speziellen Formel (16) sollte ein und dieselbe gerade Linie resultieren. Die Figur läßt, wie schon bemerkt, erkennen, daß der Verlauf der Kurven in der Tat ziemlich nahe gradlinig ist; ein Zusammenfallen der verschiedenen Kurven findet aber nicht nur nicht statt, es ist vielmehr eine so bedeutende Divergenz vorhanden, daß dadurch die An-

1) Die Dampfdrucke für H₂, A, Kr, O₂ sind dem Werke von M. W. Travers (Experimentelle Untersuchung von Gasen, Braunschweig 1905) entnommen; die übrigen nach Landolt-Börnstein, III. Aufl.

wendbarkeit des Theorems der übereinstimmenden Zustände auf die Dampfdruckkurven als unstatthaft erwiesen erscheint, und zwar umsomehr, als sogar sehr leicht sich eine Regel für die Neigung der verschiedenen Kurven ergibt. Dieselben steigen nämlich offenbar um so stärker an, je höher einerseits das Molekulargewicht der betreffenden Substanz ist und je mehr Atome im Molekül andererseits vorhanden sind. Im Sinne dieser Regel differieren auch Krypton und Argon sehr merklich, sodaß also hiernach nicht einmal für einatomige Gase Uebereinstimmung stattfindet. Substanzen, die sich im flüssigen Zustande associieren, wie Wasser, Alkohol u. s. w., geben relativ viel stärker geneigte, aber ebenfalls nahe geradlinige Kurven.

Unter solchen Umständen scheint doch hauptsächlich nur die thermodynamische Berechnung der Dampfdruckkurven in Frage zu kommen. Zunächst suchte ich den sehr überraschenden Umstand zu erklären, daß Gleichung (16) wenigstens eine annähernde Uebersicht über den Verlauf der Dampfdruckkurven liefert, wenn man unter α einen jeder Substanz eigentümlichen Coefficienten versteht. Vergleichen wir (16a) mit (15), so würde

$$2,302 a \tau = \frac{\lambda_0}{R}, a + \log \pi = \frac{i + \ln R}{2,302} = C$$

sein und der Einfluß der Glieder

$$\frac{R + \alpha - \alpha_0}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta_0}{R} T$$

dürfte nur gering sein. Nun sind aber bei gewöhnlichen Temperaturen die spezifischen Wärmen von Flüssigkeit und Dampf beträchtlich verschieden, indem der erstere Wert immer erheblich höher ist. Wir dürfen daher wohl schließen, daß die Coefficienten von $\ln T$ und von T von entgegengesetzten Vorzeichen sind und so eine teilweise gegenseitige Compensation stattfindet; dies ist aber nur möglich, wenn, zumal wenn wir auch noch berücksichtigen, daß der Temperaturcoefficient der spezifischen Wärme von Flüssigkeiten in der Nähe des Siedepunktes relativ groß ist und jedenfalls den der Dämpfe beträchtlich übersteigt, der Coefficient von $\ln T$ positiv, derjenige von T negativ ist.

In der Tat fand ich durch Probieren, daß sich durch die Gleichungen

$$(17) \quad \log \frac{\pi}{p} = 1,75 \log \frac{\tau}{T} + \alpha' \left[\left(\frac{\tau}{T} - 1 \right) - \frac{1}{2,36} \left(1 - \frac{T}{\tau} \right) \right]$$

oder umgeformt

$$(17a) \quad \log p = -\alpha' \frac{\tau}{T} + 1,75 \log T - \frac{\alpha'}{2,36} \frac{T}{\tau} \\ + \alpha' 1,424 + \log \pi - 1,75 \log \tau$$

eine Kurvenschar für verschiedene Werte von α' gegeben ist, die mit der experimentell gefundenen (vergl. Fig 1) gut zusammenfällt. Für mittlere Werte von α' resultiert sehr genau eine gerade Linie, für kleinere Werte werden die Kurven schwach nach unten, für höhere schwach nach oben gekrümmt, wie es auch die Kurvenzeichnung erkennen läßt. Die Integrationskonstante hat die Form

$$C = (i + \ln R) 2,302 = \alpha' \cdot 1,424 + \log \pi - 1,75 \log \tau;$$

die nachfolgende Tabelle liefert die für eine Anzahl Substanzen berechneten Werte dieser Größe:

Tabelle 2.

| | C | α' | | C | α' |
|-----------------|------|-----------|---|------|-----------|
| H ₂ | 1,23 | 1,65 | CHCl ₃ | 1,41 | 3,12 |
| Ar | 0,95 | 2,15 | NH ₃ | 2,10 | 3,24 |
| N ₂ | 1,40 | 2,47 | HCl | 1,55 | 2,82 |
| O ₂ | 1,54 | 2,53 | H ₂ O | 2,41 | 3,53 |
| CO ₂ | 1,71 | 2,94 | (C ₂ H ₅) ₂ O | 1,61 | 3,32 |

In der Gleichung (17a) erscheint 1,75 als Faktor des Gliedes $\log T$; der Vergleich mit Gleichung (15) lehrt, daß hiernach allgemein

$$(18) \quad R + \alpha - \alpha_0 = C_p^\circ - \alpha_0 = R \cdot 1,75 = 3,5$$

zu setzen wäre. Beim absoluten Nullpunkt würde also allgemein die Molekularwärme eines Gases um 3,5 Calorien größer sein, als diejenige seines festen oder flüssigen Kondensationsproduktes. Dies Resultat wird wohl durch den Verlauf der Dampfdruckkurven einigermaßen wahrscheinlich gemacht; es bedarf aber noch sehr der weiteren Nachprüfung und ich möchte darin zunächst nur eine vorläufige Annahme erblicken. Für sehr wahrscheinlich möchte ich zunächst nur das Resultat ansehen, daß

$$C_p^\circ - \alpha_0 > 0$$

ist. Eine Bestätigung dafür, daß Gleichung (18) der Wahrheit immerhin nahekommt, giebt folgende Ueberlegung. Für einatomige Gase lehrt die kinetische Gastheorie wohl mit großer Sicherheit, daß bis zu den tiefsten Temperaturen die Gleichung

$$C_p = 5,0$$

gültig bleibt: darnach würde also beim absoluten Nullpunkte die Atomwärme sämtlicher Substanzen im festen Aggregatzustande

$$\alpha_0 = 1,5$$

und allgemein nach Gleichung (13) für n -atomige Substanzen die Molekularwärme

$$\alpha_0 = n \cdot 1,5$$

sich ergeben¹⁾.

Für zweiatomige Gase folgt demgemäß

$$(18a) \quad C_p^0 = 2 \cdot 1,5 + 3,5 = 6,5.$$

Nun ist nach Langen²⁾ für O_2 , N_2 , H_2 , CO .

$$C_p = 6,8 + 0,0012t,$$

woraus für den absoluten Nullpunkt der Temperatur

$$C_p^0 = 6,5$$

folgt, was mit Gleichung (18a) völlig übereinstimmt.

Für die dreiatomigen Gase folgt in ganz analoger Weise

$$C_p^0 = 3 \cdot 1,5 + 3,5 = 8,0.$$

Extrapolieren wir die Messungen von Holborn und Austin³⁾ für Kohlensäure und von Holborn und Henning⁴⁾ für Wasserdampf zum absoluten Nullpunkt, so folgen die Werte

$$C_p^0 = 7,3 \text{ für } CO_2; \quad C_p^0 = 7,6 \text{ für } H_2O;$$

wohl ebenfalls eine im Hinblick auf die starke Extrapolation genügende Uebereinstimmung mit unserer Formel.

Allgemein folgt für n -atomige Gase

$$(18b) \quad C_p^0 = 3,5 + n \cdot 1,5;$$

die Beobachtungen von Regnault und E. Wiedemann lassen, wenn auch nach den erwähnten neueren Messungen bezüglich des Temperatureinflusses das Anwachsen der spezifischen Wärme der Gase mit der Temperatur weniger rasch zu sein scheint, als diese Forscher gefunden haben, und wenn daher eine Extrapolation bis

1) Damit ist in guter Uebereinstimmung die von Behn (Drudes Ann. 1, 257, 1900) konstatierte Tatsache, daß die Atomwärmen bei niederen Temperaturen stark abnehmen.

2) Ztschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 47 637 (1903).

3) Holborn u. Austin, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissensch. Berlin p. 175 (1905).

4) Holborn u. Hemming, Drudes Ann. 18, 739 (1905).

zum absoluten Nullpunkt nicht zulässig erscheint, doch so viel erkennen, daß bei gewöhnlichen Temperaturen die Molekularwärme (mit Ausnahme vielleicht von NH_3) stets etwas größer ist, als dem Werte von Gl. (18b) entspricht. Da ferner die spezifische Wärme der Gase mit der Temperatur wächst, so stehen jedenfalls die erwähnten Messungen wohl nicht mit Gleichung (18b) in Widerspruch.

Doch auch Gleichung (17) bez. (17a) erweist sich bei näherer Betrachtung, wenn sie auch in Anbetracht des Umstandes, daß sie außer den kritischen Daten nur eine einzige von der Natur der Substanz abhängige Konstante enthält, wohl ziemlich viel leistet, für eine Extrapolation bis in die Nähe des absoluten Nullpunktes nicht genau genug. Bei der starken Veränderlichkeit der spezifischen Wärme von Flüssigkeiten sind zweifellos noch Glieder mit höheren Potenzen von T zu berücksichtigen und man kann sich leicht überzeugen, daß solche Glieder den Zahlenwert der Integrationskonstante sehr merklich beeinflussen können: außerdem darf nicht vergessen werden, daß, wenn man, um von Gleichung (15) zu Gleichung (17) zu gelangen, den kritischen Punkt als Integrationsgrenze einführt, man sich weit außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Gleichung (15) begibt; denn letztere hat zur Voraussetzung, daß der gesättigte Dampf den Gasgesetzen gehorcht und das Volumen des Dampfes sehr groß gegen das der Flüssigkeit ist. Der Umstand, daß trotzdem eine immerhin annähernd brauchbare Gleichung (18) resultiert, ist jedenfalls auffällig und bedarf der Aufklärung.

Diese gewinnen wir nun, indem wir von der unter den oben erwähnten Voraussetzungen abgeleiteten Gleichung (15) zu der überall streng gültigen Gleichung von Clausius-Clapeyron zurückkehren:

$$(19) \quad \lambda = T \frac{dp}{dT} (v - v_s).$$

Nun hat Young¹⁾ gezeigt, daß für die Volumverhältnisse das Theorem der übereinstimmenden Zustände ziemlich gut zutrifft und daß insbesondere für übereinstimmende Drucke das Volumen des gesättigten Dampfes für die von ihm untersuchten Substanzen nahe gleiche Werte annimmt; als eine sehr einfache empirische Funktion finde ich die Gleichung

1) Phil. Mag. [5] 34 505 (1892).

$$(19a) \quad p(v - v_0) = RT \left(1 - \frac{p}{\pi}\right).$$

Folgende kleine Tabelle zeigt ihr Gültigkeitsbereich für Fluorbenzol, das von Young als Normalsubstanz benutzt wurde:

Tabelle 3.

| T | p | v | v_0 | $\frac{p(v - v_0)}{T}$ | $R \left(1 - \frac{p}{\pi}\right)$ |
|-------|-------|-------|-------|------------------------|------------------------------------|
| klein | klein | groß | klein | 0,0821 | 0,0821 |
| 367,3 | 1,316 | 22,00 | 0,103 | 0,0786 | 0,0796 |
| 435,0 | 6,580 | 4,634 | 0,115 | 0,0684 | 0,0700 |
| 473,6 | 13,16 | 2,265 | 0,125 | 0,0593 | 0,0579 |
| 519,7 | 26,32 | 1,009 | 0,145 | 0,0438 | 0,0337 |
| 550,0 | 39,5 | 0,516 | 0,179 | 0,0242 | 0,0094 |
| 559,6 | 44,6 | 0,270 | 0,270 | 0,000 | 0,000 |

Die Formel (19a) dürfte also, die allgemeine Gültigkeit des oben angeführten Satzes von Young vorausgesetzt, bis zu ziemlich hohen Drucken allgemein brauchbar sein.

Andererseits läßt sich die Verdampfungswärme durch folgende Formel ausdrücken:

$$(20) \quad \lambda = (\lambda_0 + 3,5 T - \varepsilon T^2) \left(1 - \frac{p}{\pi}\right);$$

eine experimentelle Prüfung derselben wird weiter unten mitgeteilt werden; führen wir (19a) und (20) in Gleichung (19) ein, so folgt

$$(21) \quad \lambda_0 + 3,5 T - \varepsilon T^2 = RT^2 \frac{d \ln p}{dT},$$

deren Integration

$$(22) \quad \ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{3,5}{R} \ln T - \frac{\varepsilon}{R} T + i + \ln R$$

liefert. Da nun (19a) und (20), wenn auch vielleicht nicht bis zum kritischen Punkte, so doch jedenfalls bis ziemlich weit in seine Nähe zutreffen, so wird es erklärlich, daß bei Integration von (15) bis zum kritischen Punkt als Integrationsgrenze eine immerhin nicht unbrauchbare Formel resultiert.

So gelangen wir denn schließlich offenbar zu einer besseren Annäherung, als die Gleichungen (17) bzw. (17a) bieten, indem wir Gleichung (22) zu Grunde legen, jedoch als Integrationskonstante einen beliebigen Punkt der Dampfdruckkurve, dessen Ordinaten p_1 und T_1 sein mögen, einführen. Ist $\frac{p}{\pi}$ gegen 1 zu vernachlässigen, so sind wir in dem Gebiete, in welchem Gleichung (19a) in die gewöhnliche Gasgleichung übergeht. Ferner können wir für Gleichung (21) in Gebieten, in denen $\frac{p}{\pi}$ nur ein kleiner Bruchteil von 1 beträgt, auch schreiben

$$(23) \quad \lambda = \lambda_0 + 3,5 T - \varepsilon T^2 - \lambda_0 \frac{p}{\pi}.$$

Differenziation der letzten Gleichung liefert

$$(24) \quad \frac{d\lambda}{dT} = 3,5 - 2\varepsilon T - \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{dp}{dT},$$

oder, da wir für das Korrektionsglied $\frac{\lambda_0}{\pi} \frac{dp}{dT}$ mit hinreichender

Annäherung auch schreiben können $\frac{\lambda_0}{\pi} \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda \lambda_0}{RT^2} \frac{p}{\pi}$, so wird auch

$$(25) \quad \frac{d\lambda}{dT} = 3,5 - 2\varepsilon T - \frac{\lambda \lambda_0}{RT^2} \frac{p}{\pi}.$$

Wir finden so zur Berechnung des Coefficienten ε , indem wir für T und p die speziellen Werte T_1 und p_1 einführen

$$(26) \quad \varepsilon = \frac{1}{2T_1} \left(3,5 - \frac{d\lambda}{dT} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p_1}{\pi} \right);$$

darin ist allerdings λ_0 zunächst noch unbekannt; da aber der Einfluß des letzten Gliedes meistens nur klein ist, so berechnet man zunächst ε mit einem angenäherten Werte von λ_0 und ermittelt dann aus (23) einen genaueren Wert für λ_0 , der dann zur endgültigen Berechnung von ε dient. Am einfachsten wäre es natürlich, wenn man die Werte von λ_0 und ε aus den Dampfdruckkurven nach Gleichung (22) ableiten könnte; leider sind dieselben aber für diesen Zweck nicht bis zu hinreichend kleinen Drucken bestimmt.

Für die gesuchte Integrationskonstante i oder einfacher gleich für den im Folgenden benutzten Wert von C liefert Gleichung (22):

$$(27) \quad C = \frac{i + \ln R}{2,302} = \frac{\lambda_0}{4,571 T_1} - 1,75 \log T_1 + \frac{\varepsilon}{4,571} T_1 + \log p_1.$$

Folgende Daten sind also erforderlich:

1) ein Punkt der Dampfdruckkurve p_1, T_1 ;

2) der Wert $\frac{d\lambda}{dT}$ für $T = T_1$;

3) der Wert der Verdampfungswärme λ_1 , welcher der Temperatur T_1 entspricht.

Als ein Beispiel der Berechnungsart von C sei zunächst das Ammoniak behandelt, worüber wir Dieterici¹⁾ eine sehr eingehende Untersuchung verdanken. Wir setzen

$$p_1 = 4,21 \text{ Atm.}, T_1 = 273, \lambda_1 = 5265, -\frac{d\lambda}{dT} = 20,2, \pi = 113.$$

Aus Gleichung (20) und (26) folgt dann

$$\varepsilon T_1 = 7,6$$

$$\lambda_0 = 6580,$$

und somit aus Gleichung (27)

$$C = 3,28.$$

Eine weitere Kontrolle für den Wert von ε und für die Zuverlässigkeit dieser Berechnungsart überhaupt liefert Gl. (20)

$$(20) \quad \lambda = (\lambda_0 + 3,5 T - \varepsilon T^2) \left(1 - \frac{p}{\pi}\right).$$

Setzen wir darin nach Obigem

$$\lambda_0 = 6580, \varepsilon = 0,02785, \pi = 113,$$

so wird

Tabelle 3.

| p | T | λ ber. | λ beob. |
|------|-----|----------------|-----------------|
| 4,2 | 273 | (5260) | (5260) |
| 8,5 | 293 | 4820 | 4850 |
| 15,5 | 313 | 4270 | 4390 |
| 25,8 | 333 | 3590 | 3870 |
| 48,3 | 363 | 2390 | 2940 |

1) Zeitschrift für Kälteindustrie 1904.

Gleichung (20) bewährt sich also ähnlich wie Gleichung (19a) nach Tab. 3 bis zu Drucken von etwa 20 Atm. hinauf. Die unter λ beob. verzeichneten Verdampfungswärmen sind der erwähnten Arbeit von Dieterici entnommen.

Der Wert des Gliedes $\frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p}{\pi}$ beträgt in obigem Beispiel 8,7; somit wird

$$-\frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p}{\pi} = 11,5;$$

nun ist andererseits nach (18b) die Molekularwärme des gasförmigen Ammoniaks beim absoluten Nullpunkt 9,5 und da die Molekularwärme des flüssigen Ammoniaks bei $T = 273$ 19,0 beträgt, so wird

$$c_0 - C_p^0 = 19,0 - 9,5 = 9,5,$$

also von dem Werte von $-\frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p}{\pi}$ nur wenig verschieden.

Wir ersehen also, daß der Einfluß des Gliedes $\frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p}{\pi}$ sehr weitgehend durch die Abnahme der Molekularwärme des gesättigten Dampfes kompensiert wird; wahrscheinlich gilt dies allgemein und jedenfalls dürfen wir wohl bei kleinen Drucken und demgemäß niederen Temperaturen, in denen einerseits der Einfluß des obigen Gliedes klein wird und andererseits die Beziehung

$$-\frac{d\lambda}{dT} = c_0 - C_p^0$$

ohnehin immer genauer gelten muß, mit der einfachen Formel

$$-\frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda_1 \lambda_0}{RT_1^2} \frac{p}{\pi} = c_0 - C_p^0$$

rechnen. Sicherlich wird dies Verfahren zur Zeit in der Regel genauer sein, als eine Benutzung der aus kalorischen Messungen abgeleiteten und offenbar meist sehr unsicheren Werte von $\frac{d\lambda}{dT}$.

Bedeutet n die Anzahl der Atome, die in einem Molekül des Dampfes enthalten sind, so ist nach Gleichung (18b)

$$C_p^0 = 3,5 + n \cdot 1,5$$

und somit wird Gleichung (26)

$$(26a) \quad \varepsilon T_1 = \frac{1}{2} (c_0 - n \cdot 1,5);$$

ferner ist nach (20)

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{1 - \frac{p}{\pi}} + T_1 \left(\frac{c_0 - n \cdot 1,5}{2} - 3,5 \right)$$

und somit wird nach (27)

$$(27a) \quad C = \frac{1}{4,571} \left(\frac{\lambda_1}{\left(1 - \frac{p_1}{\pi}\right)} T_1 + c_0 - n \cdot 1,5 - 3,5 \right) + \log p_1 - 1,75 \log T_1;$$

zu beachten ist jedoch, daß möglicherweise diese Formel sich auf Werte von p_1 und T_1 beschränkt, in denen der gesättigte Dampf nur mäßige Abweichungen von den Gasgesetzen aufweist.

Aus den Gleichungen (20) und (22) läßt sich durch eine einfache Rechnung die Formel

$$(28) \quad \frac{\lambda}{1 - \frac{p}{\pi}} = R \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

ableiten, worin die beiden Temperaturen T_1 und T_2 nur so weit verschieden sein dürfen, das das arithmetische und geometrische Mittel praktisch zusammenfällt; der Wert von λ bezieht sich dann auf diesen gemeinsamen Mittelwert. In der folgenden Tabelle sind die Verdampfungswärmen für eine Anzahl Substanzen berechnet.

(Tabelle siehe Seite 19.)

In der 4. Columne sind die Werte T_0 des Siedepunktes in absoluter Zählung verzeichnet, in der 5. die Werte der Verdampfungswärmen λ' für die gleiche Temperatur. Wie ein Vergleich mit den in der 6. Columne unter λ' beob. verzeichneten Werten¹⁾ lehrt, ist hinreichende Uebereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung vorhanden. Die nach Formel (28) berechneten Werte dürften übrigens genauer sein, als die beobachteten, und sind im Folgenden daher stets benutzt.

Eine sehr auffällige Beziehung läßt die letzte Columne erkennen, in welcher die Werte von $\frac{\lambda'}{T_0}$, der sogenannten „Trouton-

1) Für N_2 und O_2 nach H. Alt, Abh. d. Bayr. Acad. d. Wiss. II. Kl. 22 1905); die übrigen Werte nach Landolt-Börnstein.

Tabelle 5.

| Substanz | $\frac{T_1 + T_2}{2}$ | $\frac{\lambda}{1 - \frac{p}{\pi}}$ | T_0 | λ' | λ' beob. | $\frac{\lambda'}{T_0}$ | $8,5 \log T_0$ |
|---------------------|-----------------------|-------------------------------------|-------|------------|------------------|------------------------|----------------|
| Wasserstoff | 20,4 18,1 | 229 234 | 20,4 | 218 | — | 10,4 | 11,1 |
| Stickstoff | 76,7 78,9 | 1428 1446 | 77,5 | 1386 | 1334 | 17,9 | 16,1 |
| Argon | 87,1 | 1445 | 87 | 1418 | — | 16,3 | 16,5 |
| Sauerstoff | 90,1 83,6 | 1692 1719 | 90,6 | 1660 | 1629 | 18,3 | 16,7 |
| Chlorwasserstoff | 190 | 3542 | 190 | 3500 | — | 18,4 | 19,4 |
| Schwefelwasserstoff | 213 | 4620 | 213 | 4580 | — | 21,5 | 19,8 |
| Schwefelkohlenstoff | 273 318 | 6766 6580 | 319 | 6490 | 6384 | 20,4 | 21,2 |
| Aether | 273 308 | 7088 6626 | 307 | 6440 | 6660 | 21,0 | 21,3 |
| Benzol | 353 | 7640 | 353 | 7490 | 7254 | 21,2 | 21,7 |
| Propylacetat | 373 | 8570 | 375 | 8310 | 8000 | 22,2 | 21,8 |
| Anilin | 455 | 10740 | 457 | 10540 | — | 23,1 | 22,6 |

schen Konstanten“ berechnet sind. Dieselben sind aber keineswegs konstant, sondern steigen sehr merklich und regelmäßig mit dem Werte von T_0 an. Dies Ansteigen erfolgt etwa $\log T_0$ proportional; es zeigen die in der letzten Columnne bezeichneten Werte des Ausdruckes $8,5 \log T_0$ eine recht gute Uebereinstimmung mit dem Werte von $\frac{\lambda'}{T_0}$.

Die Regel von Trouton versagt also, wenn man Substanzen von sehr verschiedenen Siedepunkten zum Vergleich heranzieht. Man hat dies meines Wissens bisher nicht bemerkt, offenbar weil man die Regel bisher einerseits nur mit den meistens kaum sehr genau direct bestimmten Verdampfungswärmen prüfte und sich andererseits auf ein Temperaturintervall beschränkte, in welchem in der Tat der Ausdruck $8,5 \log T_0$ nur wenig (20—22) variierte.

Für die sogenannten assoziierenden Flüssigkeiten ist der Wert von $\frac{\lambda'}{T_0}$ erheblich höher, als $8,5 \log T_0$, wie noch besonders betont sei; es erklärt sich dies nach van't Hoff¹⁾ dadurch, daß hier mit dem Vorgange der Verdampfung eine Spaltung von Doppelmolekülen verbunden ist.

1) Vorles. über theoret. Chem. III S. 54 (1903).

Tabelle 6 enthält eine Berechnung der Werte von C für einige Flüssigkeiten nach Formel (27a): dieselben ergeben sich bei dieser offenbar genaueren Rechnung etwas höher, als sie früher in Tabelle 2 gefunden wurden. Dasselbe gilt für Sauerstoff und Stickstoff, wofür wir die Berechnung unter Benutzung des kürzlich von Alt (l. c.) veröffentlichten Beobachtungsmaterials genau in der gleichen Weise, wie S. 16 für Ammoniak geschehen, durchführen (Tab. 7).

Tabelle 6.

| Substanz | T_1 | p_1 | $\frac{\lambda_1}{1 - \frac{p}{\pi}}$ | c_0 | C |
|---------------------|-------|--------|---------------------------------------|-------|------|
| Schwefeldioxyd | 273 | 1,53 | 6000 | 20,3 | 3,42 |
| Schwefelkohlenstoff | 273 | 0,168 | 6766 | 17,9 | 3,26 |
| Chloroform | 313 | 0,487 | 7490 | 28,3 | 4,07 |
| Aethyläther | 273 | 0,244 | 6919 | 39,1 | 3,56 |
| Benzol | 293 | 0,099 | 8142 | 32,2 | 3,12 |
| Alkohol | 303 | 0,103 | 10100 | 28,5 | 4,48 |
| Wasser | 273 | 0,0060 | 10670 | 18,0 | 4,26 |

Tabelle 7.

| Substanz | T_1 | p_1 | $\frac{\lambda_1}{1 - \frac{p}{\pi}}$ | $-\frac{d\lambda}{dT}$ | λ_0 | C |
|----------------|-------|-------|---------------------------------------|------------------------|-------------|------|
| O ₂ | 78 | 0,24 | 1740 | 6,7 | 1826 | 2,20 |
| N ₂ | 68 | 0,26 | 1470 | 7,7 | 1572 | 2,37 |

Es ist wohl zu hoffen, daß die in den beiden letzten Tabellen verzeichneten Werte für C wenigstens annähernd richtig sind. Dies wird durch den Umstand bestätigt, daß die Berechnung von C nach Gleichung (27a), welche für hinreichend kleine Dampfdrucke ohne weiteres auf den festen Aggregatzustand zu übertragen ist, für den festen Zustand ähnliche Werte ergibt, wie Tabelle 8 lehrt; darin ist für Jod die Verdampfungswärme aus den Dampf-

drucken, für die andern beiden Substanzen durch Addition der molekularen Schmelzwärme zur wie oben berechneten Verdampfungswärme gefunden.

Tabelle 8.

| Substanz | T_1 | p_1 | λ_1 | c_0 | C |
|----------|-------|--------|-------------|-------|------|
| Benzol | 273 | 0,0322 | 10550 | 24,6 | 3,22 |
| Wasser | 273 | 0,0060 | 12110 | 9,0 | 3,44 |
| Jod | 374 | 0,065 | 13940 | 13,7 | 4,04 |

Leider liegt genügendes Beobachtungsmaterial, um Gleichung (27a) auf den festen oder flüssigen Zustand anwenden zu können, für immerhin nur wenige Substanzen vor. Nun liefert aber die wohl recht wahrscheinliche Annahme, das die in Figur 1 gezeichneten Kurven bis zu beliebig hohen Werten der Abscisse $\left(\frac{\tau}{T} - 1\right)$ ohne gegenseitiges Schneiden¹⁾ verlaufen, ein Mittel an die Hand, um für alle Substanzen, für welche wir von jenen Kurven auch nur einen Punkt zeichnen können, durch eine Art Interpolation die Werte von C zu bestimmen. Dies Verfahren vereinfacht sich sehr erheblich durch die auffällige Tatsache, daß die Werte von C sich um so größer ergeben, je stärker die Kurve der betreffenden Substanz gegen die Abscisse geneigt ist. Die folgende Tabelle zeigt dies in deutlicher Weise; neben den Werten von C sind die Werte von a verzeichnet, wie sie sich im Sinne der Gleichung (16) für die verschiedenen Substanzen ergeben, und zwar sind die Werte von a entsprechend Werten von $\frac{\tau}{T} = 1,25$ bis 1,40 gewählt. Es schien am Richtigsten, sich hier auf den anfänglichen Verlauf der Kurven zu beschränken, für den offenbar Formel (16) am genauesten zutrifft.

Für diejenigen Substanzen, für welche sich C anscheinend einigermaßen zuverlässig bestimmen ließ (am unsichersten sind offenbar die Werte für Stickstoff und Sauerstoff) ergibt sich annähernd

$$(29) \quad C = 1,1 a;$$

1) In nächster Nähe des kritischen Punktes, vielleicht nur in Folge von Beobachtungsfehlern, kreuzen sich die Kurven allerdings zuweilen.

Tabelle 9.

| | <i>C</i> | <i>a</i> | | <i>C</i> | <i>a</i> |
|-----------------|----------|----------|------------|----------|----------|
| N ₂ | 2,37 | 2,4 | Aether | 3,56 | 3,0 |
| O ₂ | 2,20 | 2,6 | Chloroform | 4,07 | 2,9 |
| NH ₃ | 3,28 | 3,0 | Benzol | 3,15 | 2,85 |
| SO ₂ | 3,42 | 3,0 | Wasser | 3,6 | 3,3 |
| CS ₂ | 3,26 | 2,75 | Alkohol | 4,48 | 3,7 |

Tabelle 10 enthält die nach Gleichung (29) berechneten Werte von *C* für eine größere Anzahl von Substanzen, die wir als die zur Zeit wahrscheinlichsten im Folgenden bei der Berechnung chemischer Gleichgewichte benutzen wollen.

Tabelle 10.

| | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| H ₂ 2,2 | HCl 3,0 | NH ₃ 3,3 | Benzol 3,1 |
| CH ₄ 2,5 | NO ca. 3,7 | H ₂ O 3,7 | Alkohol 4,1 |
| N ₂ 2,6 | N ₂ O 3,3 | CCl ₄ 3,1 | Aether 3,3 |
| O ₂ 2,8 | H ₂ S 3,0 | CHCl ₃ 3,2 | Aceton 3,7 |
| CO 3,6 | SO ₂ 3,3 | | Propylacetat 3,8 |
| Cl ₂ 3,0 | CO ₂ 3,2 | | |
| J ₂ 4,0 | CS ₂ 3,1 | | |

Aus obigen Zahlen ist zu schließen, daß für nicht associierende Substanzen *C* ziemlich regelmäßig mit dem Siedepunkt steigt, so daß man darnach ziemlich sicher auch für andere Stoffe *C* wird interpolieren können; associierende Substanzen (Wasser, Alkohol, Aceton, wahrscheinlich NO, vielleicht auch CO) haben merklich höhere Werte, als ihrem Siedepunkt entsprechen würde.

Vermutlich wird es durch systematisch angestellte Beobachtungen, insbesondere durch Ausdehnung der Messungen von Dampfdrucken bis zu möglichst niederen Temperaturen und ferner durch die Bestimmung spezifischer Wärmen innerhalb weiter Intervalle gelingen, die Integrationskonstante oder, wie man sie wohl auch passend bezeichnen kann, „chemische Konstante“ *C* für reine Substanzen hinreichend genau zu bestimmen; bisher ist mir allerdings trotz zahlloser, zum Teil äußerst mühevoller Rechnungen doch nur eine mehr provisorische und jedenfalls der weiteren Prüfung dringend bedürftige Lösung der Frage geglückt. Ebenso ist die Annahme (S. 12), daß α_0 für alle Atome den gleichen Wert von 1,5 besitzt, wenn auch der Wahrheit vielleicht nahekommend, doch nur eine provisorische.

3. Berechnung des chemischen Gleichgewichts in homogenen gasförmigen Systemen.

Zur Berechnung des Gleichgewichts in einem gasförmigen System haben wir die Gleichung (7) und (14) entwickelt, die wir zusammenfassen

$$(30) \quad \log K = -\frac{Q_0}{RT} + \frac{\sum \nu \alpha}{R} \ln T + \frac{\sum \nu \beta}{R} T + \sum \nu i.$$

Führen wir, ähnlich wie S. 8 geschehen, anstatt der Konzentrationen die Partialdrucke ein und setzen

$$(31) \quad K' = \frac{p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots}{p_1'^{\nu_1'} \dots}$$

so wird

$$\ln K' = -\frac{Q_0}{RT} + \frac{\sum \nu (\alpha + R)}{R} \ln T + \frac{\sum \nu \beta}{R} T + \sum \nu (i + \ln R).$$

Beachten wir ferner, daß nach (18b)

$$\sum \nu (\alpha + R) = \sum \nu C_p = \sum \nu 3,5$$

ist und setzen nach (27)

$$C = \frac{i + \ln R}{2,303},$$

so wird schließlich

$$(32) \quad \log K' = -\frac{Q_0}{4,571 T} + \sum \nu 1,75 \log T + \frac{\sum \nu \beta}{4,571} T + \sum \nu C.$$

Zur Bestimmung der Größe β benutzen wir Gleichungen (6) und (18b), wonach wird

$$C_p = C_p^0 + 2 T_0 \beta = 3,5 + \alpha_0^2 + 2 T_0 \beta,$$

wenn C_p die Molekularwärme bei einer beliebigen Temperatur T bedeutet, oder

$$(33) \quad \sum \nu \beta = \frac{\sum \nu C_p - \sum \nu 3,5}{2 T_0}$$

indem nach (13)

$$\sum \nu \alpha_0 = 0$$

ist. Schließlich sei noch daran erinnert, daß, wenn wir mit Q' die Wärmetönung der betreffenden Reaktion bei konstantem Druck bezeichnen, daß dann

$$(34) \quad Q' = Q_0 + \sum \nu 3,5 T + \beta T^2$$

wird. Um eine einigermaßen sichere Prüfung unserer Gleichungen an der Erfahrung zu ermöglichen, dürfen nur gut untersuchte Gleichgewichte benutzt werden, für welche außer den thermochemischen Daten auch die spezifischen Wärmen und die Werte von C bekannt sind. Die Zahl dieser Beispiele ist nicht groß und ich sah mich fast ausschließlich auf Messungen angewiesen, die in den letzten Jahren von mir oder meinen Schülern ausgeführt worden sind. Es sind dies die Reaktionen

1. $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$
2. $2\text{CO} + \text{O}_2 = 2\text{CO}_2$
3. $\text{N}_2 + \text{O}_2 = 2\text{NO}$
4. $\text{H}_2 + \text{Cl}_2 = 2\text{HCl}$

die im Nachfolgenden zunächst besprochen werden mögen.

1. Dissociation des Wasserdampfes. Wir setzen hier

für H_2O $c_p = 8,02$, für H_2 und O_2 $c_p = 6,9$ bei $T = 450^\circ$

ferner

$$Q' = 116000 \text{ für } T = 373;$$

somit wird

$$Q' = 114600 + 3,5 T + 0,0006 T^2$$

und

$$\log K' = -\frac{25050}{T} + 1,75 \log T + 0,00013 T - 0,2$$

($\sum C = 4,4 + 2,8 - 7,4 = -0,2$). Bedeutet x den (sehr kleinen) Dissociationsgrad bei 1 Atm., so wird

$$K' = \frac{x^2}{2}$$

oder

$$3 \log x = -\frac{25050}{T} + 1,75 \log T + 0,00013 T + 0,1.$$

In folgender Tabelle befinden sich neben den von v. Wartenberg und mir¹⁾ beobachteten die nach obiger Gleichung berechneten Temperaturen, die dem danebenstehenden Dissociationsgrade entsprechen.

1) Gött. Nachr. 1905, Heft 1.

| $100x$ | T beob. | T ber. |
|--------|-----------|----------|
| 0,0189 | 1480 | 1473 |
| 0,181 | 1802 | 1760 |

2. Dissoziation der Kohlensäure. Wir setzen hier für CO_2 $C_p = 10,05$, für CO und O_2 $C_p = 6,9$ bei $T = 473$, ferner

$$Q' = 136000 \text{ für } T = 290;$$

somit wird

$$Q' = 135300 + 3,5 T - 0,0030 T^2$$

und

$$\log K' = -\frac{29600}{T} + 1,75 \log T - 0,00066 T + 3,6$$

($C = 7,2 - 2,8 - 6,4 = 3,6$) und genau wie beim Wasserdampf

$$3 \log x = -\frac{29600}{T} + 1,75 \log T - 0,00066 T + 3,9.$$

Den Grad der Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch zeigt folgende Tabelle, die die von v. Wartenberg und mir¹⁾ gefundenen Werte enthält:

| $100x$ | T beob. | T ber. |
|---------|-----------|----------|
| 0,00419 | 1300 | 1369 |
| 0,029 | 1478 | 1552 |

Für Zimmertemperatur ($T = 290$) liefern die obigen Formeln

$$\text{für } \text{H}_2\text{O } 100x = 10^{-25,81}$$

$$\text{für } \text{CO}_2 \text{ } 100x = 10^{-29,35}$$

während sich aus den Messungen von v. Wartenberg und mir (l. c.) mit Hülfe des zweiten Wärmesatzes

$$\text{für } \text{H}_2\text{O } 100x = 10^{-25,8}$$

$$\text{für } \text{CO}_2 \text{ } 100x = 10^{-29,0}$$

berechnet. Die Zahlen stimmen sehr gut überein; wahrscheinlich sind die rein thermochemisch berechneten Werte bei niederen Temperaturen sogar genauer.

3) Bildung des Stickoxyds. Wir setzen hier mit Strecker²⁾

1) Gött. Nachr. 1905, Heft 1.

2) Wied. Ann. 17 102 (1882).

für N_2 und O_2 $\frac{C_p}{C_v} = 1,40$ für NO $\frac{C_p}{C_v} = 1,39$

und ferner

$$Q' = 43200 \text{ für } T = 290;$$

somit wird

$$Q' = 43200 + 0,0004 T^2$$

und

$$\log K' = -\frac{9450}{T} + 0,00008 T + 2,0$$

$$(\Sigma C = 7,4 - 2,6 - 2,8 = 2,0).$$

Die folgende Tabelle enthält die von mir¹⁾ früher gefundenen Werte neben den aus obiger Formel berechneten; bedeutet x den Bruchteil Stickoxyd, der sich bei der betreffenden Temperatur aus atmosphärischer Luft bildet, so wird

$$K' = \frac{x^2}{\left(79,2 - \frac{x}{2}\right)\left(20,5 - \frac{x}{2}\right)}.$$

| x | T beob. | T ber. |
|--------|-----------|----------|
| 0,0037 | 1825 | 1624 |
| 0,01 | 2205 | 1898 |

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist nur annähernd; doch muß betont werden, daß die Dampfspannungskurve des Stickoxyds offenbar mit Unsicherheiten behaftet ist, wie auch Travers (l. c. S. 275) betont, „daß die von Olszsewski erhaltenen Werte der Dampfdrucke des Stickoxyds gewissermaßen befremdend seien“. In der That verläuft die Kurve für Stickoxyd, aufgetragen nach dem in Figur 1 benutzten Schema, offenbar ganz unregelmäßig und man kann daraus nur schließen, daß sie steiler als für Sauerstoff und Stickstoff ansteigt und daß daher diese Substanz einen merklich höheren Wert von C besitzen muß, als jene Gase. Würden wir z. B. anstatt 3,7 den Wert 3,4 für C einführen, so würde sich in obiger Tabelle anstatt 1898 eine Temperatur von 2162 für $x = 0,01$ ergeben. Eine Revision der Dampfdruckwerte des Stickoxyds erscheint wünschenswert und wäre wegen des auffallenden Verhaltens dieser Substanz (vergl. S. 22) auch an sich von Interesse.

4) Bildung von Chlorwasserstoff. Die spezifischen Wärmen von Wasserstoff und Chlorwasserstoff sind einander prak-

1) Gött. Nachr. 1904, Heft 4.

tisch gleich; die spezifische Wärme des Chlors hingegen ist merklich höher (Strecker l. c.). Man kann aber wohl vermuten, daß es sich bei der spezifischen Wärme des Chlors um Unregelmäßigkeiten handelt, die bei sehr kleinen Drucken verschwinden. Da es sich bei der folgenden Berechnung (Dissociation des Chlorwasserstoffs bei Zimmertemperatur) um ungeheuer kleine Drucke handelt, so wollen wir, umsomehr als es sich in jedem Falle nur um eine kleine Korrektur handelt,

$$\Sigma C_p = \beta = 0$$

setzen. Da die Bildungswärme des Chlorwasserstoffs 22000 beträgt, so wird

$$\log K = \log x^2 = -\frac{44000}{4,571 T} + 2,2 + 3,0 - 6,0$$

oder

$$\log x = -\frac{4813}{T} - 0,4;$$

darin bedeutet x wiederum den (sehr kleinen) Dissoziationsgrad.

Nun sind von Dolezalek¹⁾ sehr sorgfältig die elektromotorischen Kräfte der Chlorknallgaskette gemessen worden und nach bekannten Formeln berechnet sich ihre elektromotorische Kraft

$$\varepsilon = \frac{RT}{F} \ln \frac{p^2}{\pi x},$$

worin p den Partialdruck des Wasserstoffs und des Chlors an den Electroden und π den Partialdruck der Salzsäure über der benutzten Lösung bedeutet. In der erwähnten Arbeit findet sich der Nachweis, daß die elektromotorischen Kräfte im Sinne obiger Formel von dem Partialdrucke der Salzsäure abhängig sind; es genügt daher einen Wert zu berechnen und zwar setzen wir, dem Versuch mit einer sechsfach normalen Salzsäure entsprechend,

$$\pi = 0,52 \text{ mm}, \quad p = 750 \text{ mm}.$$

Da die Versuchstemperatur 30° betrug, so wird

$$\varepsilon = 0,0601 \left(\log \frac{750}{\pi} + \frac{4813}{T} + 0,4 \right) = 1,168 \text{ Volt},$$

während Dolezalek den Wert 1,160 Volt angiebt. Die Uebereinstimmung ist vorzüglich und dies Beispiel zeigt zugleich, wie unsere Theorie die Frage nach der Berechnung elektromotorischer

1) Zeitschrift f. physik. Chem. 26 334 (1898).

Kräfte aus Wärmetönungen beantwortet. Die Berechnung nach Helmholtz-Thomson, wonach die chemische Energie einfach gleich der elektrischen gesetzt wird, liefert bekanntlich in diesem Falle viel zu hohe Werte (ca. 1,4 Volt).

Die obigen Beispiele lehren, daß wir ohne merklichen Fehler einerseits

$$Q' = Q_0$$

setzen und andererseits, wenigstens bei nicht zu hohen Temperaturen, das mit T multiplizierte Glied vernachlässigen dürfen. Die numerische Berechnung vereinfacht sich dadurch sehr erheblich: als Beispiel betrachten wir die von Haber und van Oordt¹⁾ untersuchte

5. Bildung des Ammoniaks, über dessen spezifische Wärme wir nur ungenau orientiert sind. Die Bildungswärme des Ammoniaks beträgt pro Mol 12000 Cal. und es wird daher, wenn wir mit Haber ein äquivalentes Gemenge von Wasserstoff und Stickstoff bei Atmosphärendruck ins Auge fassen und mit x den (kleinen) Partialdruck des gebildeten Ammoniaks bezeichnen

$$\log K' = \log \frac{0,75^3 \cdot 0,25}{x^2} = -\frac{24000}{4,571 T} + 3,5 \log T + 6,6 + 2,6 - 6,6$$

oder

$$\log \frac{0,325}{x} = -\frac{2625}{T} + 1,75 \log T + 1,3;$$

hieraus berechnet sich z. B., daß einem Werte von $x = 1,2 \cdot 10^{-4}$ eine absolute Temperatur von 893 entspricht, während Haber 1293 dafür bestimmt hat. Jedenfalls lehrt also auch die angenäherte Formel, daß Ammoniak, obwohl es sich unter beträchtlicher Wärmeentwicklung bildet, doch schon bei relativ niedrigen Temperaturen fast völlig dissociert ist. Maßgebend ist dafür das Glied $1,75 \log T$, welches in erster Linie die Wärmetönung oder richtiger das Glied $\frac{Q'}{RT}$ überkompensiert.

Ueberhaupt möchte ich betonen, daß meines Erachtens die überzeugende Kraft unseres Fundamentaltheorems nicht allein lediglich in der numerischen Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Gleichgewichte zu suchen ist, obwohl dieselbe, wie die obigen Beispiele zeigen dürften, in der That in die Augen springt. Wichtiger scheint mir der Umstand, daß der allgemeine Charakter der Beziehungen zwischen chemischer Energie und

1) Haber l. c. S. 185.

Wärme durch die Formeln, welche aus dem Fundamentaltheorem fließen, sich nach langem Suchen in harmonischer Einfachheit zu enthüllen scheint. Die numerische Auswertung der Coefficienten von $\log T$ und T und ferner der Zahlenwert von C ist, wie schon öfters betont, der weiteren Nachprüfung bedürftig; an dem Bau der Formeln und damit an der Natur der Beziehung zwischen Wärmeentwicklung und chemischer Affinität würde sich durch eine genauere numerische Bestimmung aber nichts Wesentliches ändern.

4. Heterogene Systeme.

Wie ich schon früher gezeigt habe¹⁾, läßt sich die Behandlung heterogener Systeme auf diejenige eines homogenen Systems und auf die Frage des Gleichgewichts der Verdampfung oder der Sublimation zurückführen. Betrachten wir also etwa eine Reaktion nach dem Schema

$$(35) \quad na + \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \dots = \nu_1' A_1' + \dots,$$

worin a eine Molekülgattung bedeutet, die in reinem (festem oder flüssigem) Zustande mit der Gasphase koexistiert, so gilt für letztere, wie oben (S. 23), die Gleichung

$$\ln K' + \frac{Q_0}{RT} - \frac{\Sigma \nu (\alpha + R)}{R} \ln T - \frac{\Sigma \nu \beta}{R} T - (n + \Sigma \nu)(i + \ln R) = 0.$$

Andererseits liefert die mit n multiplizierte Gleichung (22) für die Koexistenz zwischen gesättigtem Dampf und Bodenkörper

$$\ln p^* + \frac{n\lambda_0}{RT} - \frac{n(\alpha + R)}{R} \ln T - \frac{n(\beta - \beta_0)}{R} T - n(i + \ln R) = 0;$$

wenn wir die beiden obigen Gleichungen von einander subtrahieren, so fällt aus dem ersten, dritten und fünften Gliede alles auf den Bodenkörper bezügliche heraus. Das zweite Glied wird, wie früher, Wärmetönung der Reaktion (35), dividiert durch T , und für die Berechnung des mit T multiplizierten Gliedes folgt schließlich, ähnlich wie oben, Gl. (33)

$$\frac{c + \Sigma \nu C_p - \Sigma \nu 3,5}{2T_0},$$

wenn c die Molekularwärme der Molekülgattung a im condensierten Zustande bei einer Temperatur T_0 bedeutet. Selbstverständlich

1) Theoret. Chem., III. Buch Kap. 3.

gelten dieselben Gleichungen, wenn beliebig viele Bodenkörper in festem oder flüssigem, jedoch reinem Zustande koexistieren; dann wird allgemein, analog (31)

$$36) \log K' = -\frac{Q_0}{4,571 T} + \Sigma \nu 1,75 \log T + \frac{\Sigma n \beta_0 + \Sigma \nu \beta}{4,571} T + \Sigma \nu C;$$

darin bedeutet also Q_0 die Wärmetönung der betreffenden Reaktion und es wird

$$37) \quad \Sigma(n\beta_0 + \nu\beta) = \frac{\Sigma n c + \Sigma \nu C_p - \Sigma \nu 3,5}{2T_0},$$

während bei der Berechnung der übrigen Glieder lediglich die Molekülattungen A , die nicht zugleich als Bodenkörper vorhanden sind, zu berücksichtigen sind. Beispiele, auf welche Gleichung (36) anwendbar ist, giebt es in sehr großer Anzahl; die Berechnung von β ist allerdings mangels genauer Daten über die spezifische Wärme nur in wenigen Fällen möglich.

1. Dissociation der Metallchlorid-Ammoniakverbindungen. Bei Forcrand¹⁾ findet sich eine Zusammenstellung der Wärmetönungen, bestimmt bei Zimmertemperatur und bezogen auf konstanten Druck, und der absoluten Temperaturen, bei denen die Spannung den Atmosphärendruck erreicht; wir entnehmen der Tabelle jede dritte Zahl:

| | Q cal. | T | $\frac{Q'}{T}$ |
|---------------------------------------|----------|-----|----------------|
| Zn Cl ₂ + 6NH ₃ | 11000 | 332 | 33,13 |
| Ca Cl ₂ + 4NH ₃ | 10290 | 315 | 32,66 |
| 2Ag Cl + 3NH ₃ | 11580 | 341 | 33,96 |
| Pd Cl ₂ + 4NH ₃ | 15560 | 483 | 32,22 |
| Li Cl + 2NH ₃ | 11600 | 367 | 31,61 |
| Cu Cl ₂ + 6NH ₃ | 11150 | 363 | 30,72 |

Der Ausdruck $\frac{Q'}{T}$ ist ziemlich gut konstant und zwar findet dies Forcrand bei allen untersuchten Ammoniakverbindungen bestätigt. Es ist dies eine an die Trouton'sche Regel erinnernde Gesetzmäßigkeit; freilich dürfte im Sinne der nachfolgenden Betrachtungen die Konstanz des Coefficienten auch hier nur auf ein gewisses Temperaturenintervall beschränkt sein.

Um Gleichung (36) darauf anzuwenden, setzen wir nach Kopp für die Molekularwärme des festen Chlorammoniums 20,0; für die-

1) Ann. de chimie et de phys. [7] XXVIII (1903) S. 545.

über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. 31

jenige der festen Salzsäure berechnet sich 8,6, sodaß für festes Ammoniak 11,4 übrig bleibt. Setzen wir für die Molekularwärme des gasförmigen Ammoniaks, nach Gleichung (18b) 9,5, so wird

$$Q = Q_0 + 3,5 T - 0,009 T^2$$

und ferner

$$\log p = -\frac{Q_0}{4,571 T} - 1,75 \log T - 0,002 T + 3,3,$$

woraus sich für den Coefficienten $\frac{Q'}{T}$ berechnet, indem wir $p = 1$ setzen:

$$\frac{Q'}{T} = 3,5 \frac{290}{T} - 0,009 \frac{(290)^2}{T} + (1,75 \log T - 0,002 T + 3,3) 4,571.$$

Der rechtsstehende Ausdruck liefert für $T = 290$ den Wert 33,2, für $T = 358$ den Wert 32,9. Wir erkennen also, daß in der That $\frac{Q'}{T}$ innerhalb eines ziemlich weiten Temperaturintervalls, der empirischen Regel von Le Chatelier-Forcrand entsprechend, konstant sein muß und zwar stimmt der von uns theoretisch berechnete Wert vollständig mit dem Mittelwert der Zahlen von Forcrand, nämlich 32,33 bei einer mittleren Temperatur von 358 überein.

Allgemein liefert unsere Theorie als Näherungsformel für den Dissociationsdruck p , indem wir wie oben die Dissociationswärme pro Mol bei konstantem Druck und Zimmertemperatur mit Q' bezeichnen,

$$\log p = -\frac{Q'}{4,571 T} + 1,75 \log T + C.$$

Da nun die Werte von C in der Nähe von 3,0 liegen, wird unabhängig von der Natur der betreffenden Substanz der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{Q'}{T} &= 29,7 \quad \text{für } T = 100 \\ &= 33,6 \quad \text{„ } T = 300 \\ &= 35,3 \quad \text{„ } T = 500 \\ &= 37,7 \quad \text{„ } T = 1000. \end{aligned}$$

Man erkennt deutlich hieraus die Regel von Le Chatelier-Forcrand, wonach der Wert des Ausdruckes $\frac{Q'}{T}$ für die verschiedensten Gase in der Gegend von 33 liegt, jedoch mit dem Unterschiede, daß

der bisher rein empirische Coefficient ca. 33 eine einfache Bedeutung gewonnen hat und daß die Gültigkeit der Regel auf ein mittleres, allerdings ziemlich weites Temperaturintervall beschränkt wird. Für Calciumkarbonat beträgt der Quotient denn auch, im Widerspruch mit obiger Regel und im Einklang mit unserer Theorie 38,6 (s. w. u.).

2. Dissociation des Ammoniumhydrosulfids. Wir berechnen hier die Molekularwärme dieser Substanz nach Kopp für $T = 300$ zu 19,1 und setzen andererseits die Molekularwärme von Ammoniak 9,5, von Schwefelwasserstoff 8,5. Die Dissociationswärme bei konstantem Druck beträgt für Zimmertemperatur 22800, sodaß wir erhalten

$$Q' = 21900 + 7,0 T - 0,013 T^2.$$

Bezeichnen wir mit P den Dissociationsdruck, so wird

$$\frac{1}{2} \log K = \log \frac{P}{2} = -\frac{2396}{T} + 1,75 \log T - 0,0014 T + 3,15;$$

bei $T = 298,1$ wird der Dissociationsdruck 0,661 Atm.; aus obiger Gleichung berechnet sich dafür die Temperatur 318. Rechnen wir mit der Näherungsgleichung

$$\log \frac{P}{2} = -\frac{11400}{4,57 T} + 1,75 \log T + 3,15,$$

so berechnet sich eine Temperatur von 312. Da die Bestimmung des Coefficienten von T , wie schon öfters erwähnt, ziemlich unsicher ist und da die in der Handhabung sehr viel bequemere Näherungsformel, die wir aus Gleichung (36) erhalten, indem wir

$$Q_0 = Q' \quad \text{und} \quad \Sigma(n\beta_0 + \nu\beta) = 0$$

setzen, nur wenig verschiedene Werte liefert, so wollen wir die folgenden Beispiele danach berechnen.

3. Dissociation des Calciumcarbonats. Der Dissociationsdruck p der Kohlensäure folgt hier

$$\log p = -\frac{42500}{4,57 T} + 1,75 \log T + 3,2;$$

für $p = 1$ berechnet sich daraus eine Temperatur von 1091, während Le Chatelier 1100 und neuerdings Brill¹⁾ 1098 fand.

4. Dampfspannung von Natriumphosphat. Frowein²⁾ findet für die Dampfspannung des Salzes $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 12\text{H}_2\text{O}$ bei

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. 45 (1905) 275.

2) Zeitschr. f. physik. Chem. 1 S. 362 (1867).

über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. 33

$T = 283,8$ die Dampfspannung zu $0,00842$ Atm.; die Hydrationswärme ist, in Uebereinstimmung mit den calorimetrischen Werten, berechnet aus der Aenderung der Dampfspannung mit der Temperatur 2244 und die Dissociationswärme $2244 + 10586 = 12830$. Es wird also

$$\log p = -\frac{12830}{4,57 T} + 1,75 \log T + 3,7,$$

woraus sich für den obigen Druck eine Temperatur von 279° (anstatt 284) berechnet. Da auf dem Gebiete der Dissociation kristallwasserhaltiger Salze sehr viele und genaue Messungen vorliegen, so würde eine Untersuchung der specifischen Wärmen der in Betracht kommenden Salze behufs Prüfung der genaueren Formel (36) sehr erwünscht sein.

5. Bestimmung der Stabilität chemischer Verbindungen.

Die Frage, ob bei gegebenen Versuchsbedingungen eine chemische Verbindung sich in merklichen Beträgen bilden kann, ist identisch mit derjenigen nach ihrer Stabilität. Diese Frage läßt sich aus den hier abgeleiteten Formeln mit Hilfe der Wärmetönungen beantworten; da nun in der Regel bei bestimmten Versuchsbedingungen die chemischen Verbindungen entweder sehr stabil oder sehr instabil sind, indem, zumal bei niedrigen Temperaturen, bekanntlich chemische Gleichgewichte, bei denen sämtliche Komponenten in merklichen Konzentrationen koexistieren, immerhin zu den Ausnahmen gehören, so werden unsere Formeln selbst in der angenäherten Form meist eine hinreichend bestimmte Antwort geben können. Wir sahen oben schon, daß z. B. Ammoniak, das unter Volumverdoppelung bei konstantem Druck dissociiert, trotz seiner nicht unbeträchtlichen Verbindungswärme schon bei mäßig gesteigerten Temperaturen instabil ist. Ozon muß, weil es eine negative Bildungswärme besitzt und ebenfalls unter Volumzunahme dissociiert, bei niederen Temperaturen gänzlich instabil sein und erst bei sehr hohen Temperaturen in merklicher Menge neben gewöhnlichem Sauerstoff koexistieren können. Die Halogenwasserstoffsäuren dissociieren ohne Volumänderung; hier entspricht demgemäß einer merklichen Bildungswärme auch, wenigstens bei niederen Temperaturen, eine weitgehende Stabilität (HCl, HBr); Jodwasserstoff hingegen, das sich aus seinen Komponenten im Gaszustande ohne merkliche Wärmetönung bildet, gelangt schon bei

niederen Temperaturen in das Gebiet eines ausgesprochenen Gleichgewichts. — Offenbar liegt die Aufgabe vor, die gesamte Chemie vom Standpunkte der Thermochemie neu zu bearbeiten.

Mancherlei Aufschlüsse dürften insbesondere auf dem Gebiete der Kohlenstoffverbindungen zu erwarten sein, woselbst die Stabilitätsfragen bekanntlich bisher fast gänzlich im Dunkel sich befanden. Da Dank der Bestimmungen der Verbrennungswärme die Thermochemie der organischen Verbindungen sehr genau bekannt ist, so scheint eine eingehende Untersuchung der Stabilitätsfragen ermöglicht.

Um nur einige Beispiele zu erwähnen, so sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Bildung gasförmigen Aethylacetats und Wassers aus Alkoholdampf und Essigsäuredampf ohne erhebliche Wärmetönung erfolgt. Es muß sich daher, da die Reaktion ohne Volumänderung vor sich geht, analog wie beim Jodwasserstoff ein Gleichgewicht herstellen, an welchem sämtliche Komponenten in merklichen Konzentrationen teilnehmen. Da die Dampfspannungen der vier Substanzen nicht gar zu sehr verschieden sind, so müssen wir dies Gleichgewicht auch im flüssigen Gemische wiederfinden; dies ist aber bekanntlich der klassische, von Berthelot untersuchte Fall eines chemischen Gleichgewichts.

Für die Bildung von Acetylen aus Kohle und Wasserstoff erhalten wir die Gleichung

$$(a) \quad \log \frac{[H_2]}{[C_2H_2]} = \frac{11610}{T} - 0,8,$$

für diejenige des Benzols entsprechend

$$(b) \quad \log \frac{[H_2]^3}{[C_6H_6]} = \frac{3740}{T} + 3,5 \log T + 3,5.$$

Erst bei sehr hohen Temperaturen nimmt in Gleichung (a) die rechte Seite den Wert z. B. 3,0 an, d. h., erst dann wird neben Wasserstoff von Atmosphärendruck 0,1 Volumprozent Acetylen beständig. Dies entspricht offenbar der bekannten Bildung von Acetylen, wenn ein Kohlenlichtbogen in einer Wasserstoffatmosphäre erzeugt wird. Benzoldampf besitzt hingegen neben Wasserstoff und festem Kohlenstoff überhaupt „keine merkliche Existenzberechtigung“.

Multiplizieren wir Gleichung (a) mit 3 und subtrahieren davon (b), so wird

$$\log \frac{[C_6H_6]}{[C_2H_2]^3} = \frac{31100}{T} - 3,5 \log T - 5,9;$$

über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. 35

diese Gleichung lehrt in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, daß Acetylen, extrem hohe Temperaturen ausgenommen, zu Benzol sich zu polymerisieren vermag.

Gerade das so überaus reichhaltige Gebiet des Gleichgewichts von Kohlenstoff, Wasserstoff und den verschiedenen Kohlenwasserstoffen dürfte ein reiches Anwendungsgebiet unserer Theorie zu liefern geeignet sein.

6. Sublimationsgleichgewicht.

Für die Dampfdruckkurve eines festen Körpers fanden wir früher die Gleichungen

$$\ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{\alpha + R}{R} \ln T + \frac{(\beta - \beta_0)}{R} T + i + \ln R.$$

Da bei gewöhnlichen Temperaturen die Molekularwärmen des Dampfes und des festen Körpers nicht sehr verschieden sind, so können wir als Näherungsgleichung aufstellen

$$\log p = -\frac{\lambda}{4,571 T} + 1,75 \log T + C,$$

worin λ die Sublimationswärme bei gewöhnlichen Temperaturen bedeutet. Dann wird, genau wie S. 31 für Temperaturen von 300–500° und für $p = 1$ Atm.

$$\frac{\lambda}{T} = 33-35;$$

dies ist aber nichts anderes als die von Forcrand (l. c.) mit vielen Beispielen belegte Regel, wonach obiger Quotient ca. 33 beträgt¹⁾, wenn man für T diejenige Temperatur einführt, für welche der Sublimationsdruck gleich dem Atmosphärendruck wird. Wir erkennen aber zugleich, daß die Gültigkeit dieser Regel, ähnlich wie oben, an ein gewisses Temperaturintervall gebunden und ferner auf Substanzen beschränkt ist, die nicht etwa abnorm große oder abnorm kleine Werte von C besitzen.

1) Forcrand findet mehrfach kleinere Werte (28–30), doch ist zu berücksichtigen, daß er meistens die Sublimationswärme aus der Summe von Verdampfungswärme beim Siedepunkt und Schmelzwärme beim Schmelzpunkt berechnet und für T die Siedetemperatur einführt, wodurch notwendig kleinere Werte als $\frac{\lambda}{T}$ resultieren müssen.

7. Schmelzpunkt und Umwandlungspunkt.

Wir fanden früher für die Dampfdruckkurve einer Flüssigkeit

$$(38) \quad \ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{\alpha + R}{R} \ln T + \frac{(\beta - \beta_0)}{R} T + i + \ln R,$$

und für diejenige eines festen Körpers

$$(39) \quad \ln p' = -\frac{\lambda'_0}{RT} + \frac{\alpha + R}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta'_0}{R} T + i + \ln R;$$

der Schnittpunkt beider Kurven, d. h. die Bedingung

$$(40) \quad T_0 = \frac{\lambda'_0 - \lambda_0}{\beta_0 - \beta'_0},$$

liefert den Schmelzpunkt.

Nun ist ferner

$$\lambda = \lambda_0 + 3,5 T + (\beta - \beta_0) T^2, \quad \lambda' = \lambda'_0 + 3,5 T + (\beta - \beta'_0) T^2$$

oder, wenn wir mit σ die Schmelzwärme beim Schmelzpunkt bezeichnen

$$(41) \quad \sigma = \lambda' - \lambda = \lambda'_0 - \lambda_0 + (\beta_0 - \beta'_0) T_0$$

und somit wird aus (40) und (41)

$$(42) \quad T_0 = \frac{\sigma}{2(\beta_0 - \beta'_0)}.$$

Ferner ist (vergl. Gl. 6a)

$$c_0 = \alpha + \beta_0 T_0; \quad c'_0 = \alpha + \beta'_0 T_0,$$

worin c_0 und c'_0 die Molekularwärme beim Schmelzpunkt bezeichnen, und somit erhalten wir schließlich

$$(43) \quad T_0 = \frac{\sigma}{c_0 - c'_0}.$$

Es muß also, da σ stets > 0 , die spezifische Wärme der Flüssigkeit bei allen Temperaturen größer als diejenige des festen Körpers sein, z. B. auch beim Schmelzpunkt, auf welch letzteren Fall Tammann¹⁾ schon hingewiesen hat. Auch die Gleichung (43)

1) Krystallisieren und Schmelzen, Leipzig 1903. S. 42 ff. — Es sei hier auch noch hervorgehoben, daß erst durch Tammanns Forschungen die Berechtigung erwiesen erscheint, die Dampfspannungskurven von flüssigen bez. amorphen Körpern bis zum absoluten Nullpunkt zu verlängern.

hat Tammann bereits empirisch aufgestellt. Sie stimmt in einzelnen Fällen ziemlich gut (vergl. die Tabelle bei Tammann S. 45), scheint aber in anderen völlig zu versagen. Offenbar müssen eben die höheren Glieder mit T^3 etc. in Gleichung (38) berücksichtigt werden. Tammann zog aus Gl. (43) den gewiß naheliegenden Schluß, daß beim absoluten Nullpunkt häufig die Schmelzwärme verschwindet; wir finden hingegen (vergl. 40 und 42)

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = \frac{\sigma}{2}.$$

In ganz ähnlicher Weise bekommen wir für den Dampfdruck zweier verschiedener Modifikationen einer Substanz die Gleichungen

$$(44) \quad \ln p' = -\frac{\lambda'_0}{RT} + \frac{\alpha + R}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta'_0}{R} T + C,$$

$$(45) \quad \ln p'' = -\frac{\lambda''_0}{RT} + \frac{\alpha + R}{R} \ln T + \frac{\beta - \beta''_0}{R} T + C;$$

die Bedingung

$$\ln p' = \ln p''$$

liefert auch hier den Punkt, woselbst die beiden Modifikationen im Gleichgewichte sich befinden. Da in der Regel die Umwandlungswärmen klein sind, so fallen die spezifischen Wärmen umsomehr ins Gewicht und ich möchte daher, z. B. was die interessante Frage der Umwandlungspunkte der verschiedenen Modifikationen des Kohlenstoffs anlangt, erst dann die Benutzung obiger bez. durch die höheren Glieder erweiterter Formeln für zulässig halten, wenn genauere Bestimmungen über den Verlauf der spezifischen Wärme, besonders auch bei sehr niedrigen Temperaturen, vorliegen werden. Selbst der Satz, daß die bei höherer Temperatur stabile Modifikation bei allen Temperaturen die größere spezifische Wärme besitzt, der sich aus den Gleichungen (38) und (39) bez. (44) und (45) ergibt, kann durch die Glieder mit höheren Potenzen von T in Frage gestellt werden.

Für eine beliebige Reaktion zwischen lauter festen oder flüssigen Substanzen folgt schließlich nach S. 6 und 7

$$(46) \quad Q = Q_0 + \beta T^3, \quad A = Q_0 - \beta T^3$$

und somit für die Umwandlungstemperatur

$$T_0^3 = \frac{Q_0}{\beta}.$$

8. Die physikalischen Gemische.

Ich erwähnte schon oben, daß das in dieser Abhandlung aufgestellte Wärmetheorem keineswegs ausschließlich auf die chemischen Verbindungen beschränkt ist; es ist z. B. auch ohne weiteres auf die physikalischen Gemische verschiedener Substanzen zu übertragen. Ohne hier auf Einzelheiten eingehen zu wollen, sei der allgemeine Gang der Ueberlegungen, die hier anzustellen sein dürften, angedeutet.

Bilden wir aus zwei Flüssigkeiten ein drittes homogenes Gemisch, und bezeichnen wir die Dampfdrucke der beiden reinen Flüssigkeiten mit p_1 und p_2 , diejenigen im Gemisch mit π_1 und π_2 , und bezeichnen wir ferner die Mischungswärme eines Gemisches aus x -Molen der ersten und y -Molen der zweiten Substanz mit $F(x, y)$, so liefert unser Fundamentaltheorem für kleine Werthe von T sofort die Gleichung

$$RT \ln \frac{p_1}{\pi_1} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}; \quad RT \ln \frac{p_2}{\pi_2} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichungen führt dann leicht zur allgemeinen Lösung der Aufgabe, die Dampfdrucke π_1 und π_2 eines Gemisches aus den Werten von C und λ_0 für die einzelnen Bestandteile und aus der Mischungswärme zu berechnen.

Da Gl. (46) ohne Weiteres auf diesen Fall anwendbar ist, so folgt als einfache Bedingung einer „idealen concentrirten Lösung“

$$\beta = 0,$$

die für die Wasser-Schwefelsäuregemische in der That zutrifft¹⁾.

Die Bedingung ferner, daß zwei Gemische der gleichen Komponenten, aber von verschiedener Zusammensetzung, dieselben Dampfdrucke liefern, führt zur Theorie der gegenseitigen Löslichkeit zweier Flüssigkeiten. Der Schnittpunkt der Dampfdruckkurve der einen Komponente eines Gemisches mit der Dampfdruckkurve derselben Komponente im krystallisierten Zustande liefert das Gleichgewicht der Löslichkeit. Der Fall, daß eine Komponente im großen Ueberschuß vorhanden ist, führt dann zur Theorie der verdünnten Lösungen und insbesondere der Verteilung einer Substanz zwischen Lösungsmittel und Gasraum oder auch zwischen

1) Nernst, Wied. Ann. 53 (1894) S. 64.

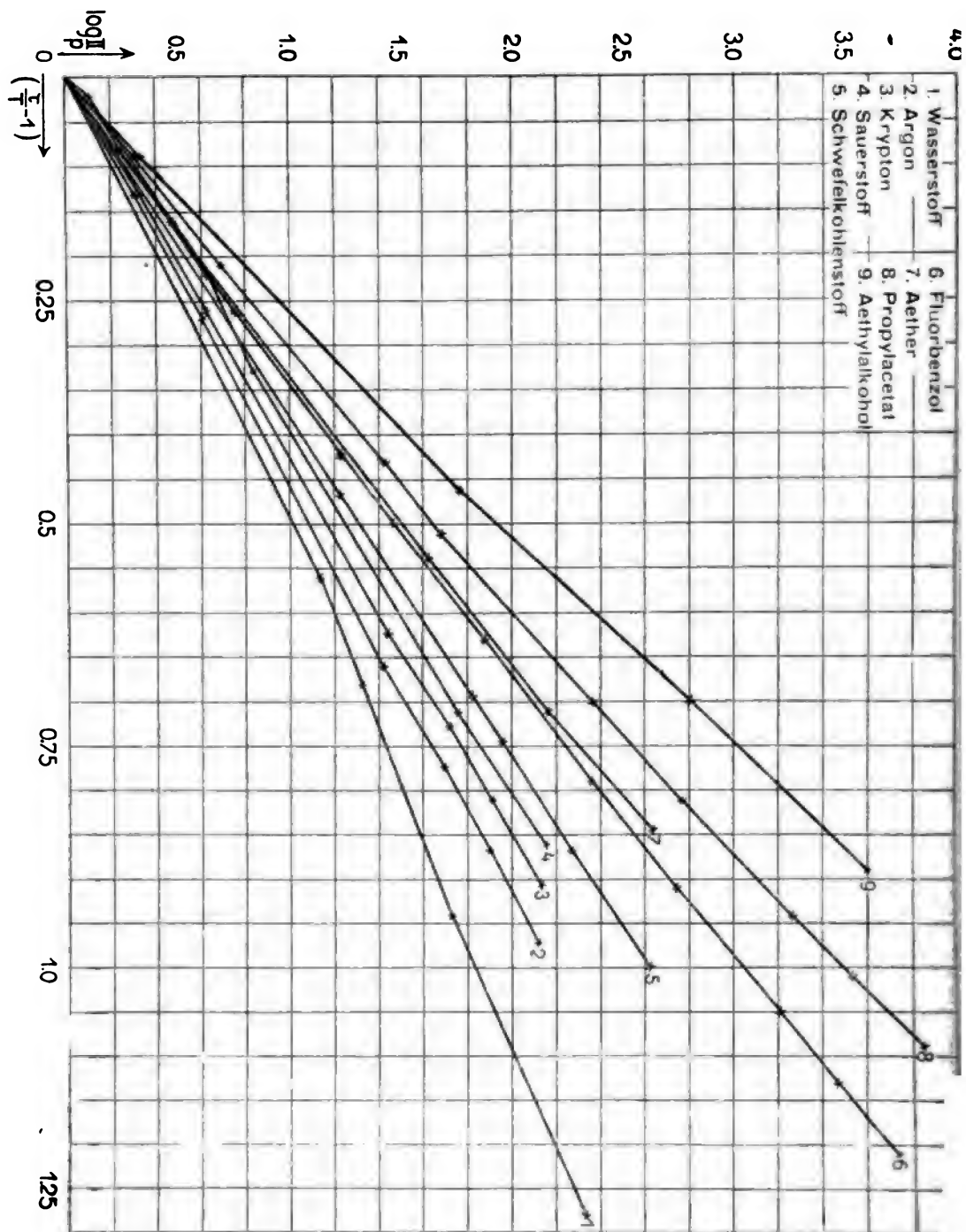
über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. 39

zwei Lösungsmitteln. In allen diesen Fällen sind die betreffenden Erscheinungen eindeutig bestimmt durch die chemischen Konstanten C der einzelnen Komponenten und durch die Wärmeerscheinungen bei einer einzigen Temperatur, die dann mit Hülfe der spezifischen Wärmen für alle Temperaturen gegeben sind.

In experimenteller Hinsicht wird also auch hier das Studium der spezifischen Wärmen die dringlichste Aufgabe bilden.

Fassen wir das Ergebnis unserer Betrachtungen zum Schluß kurz zusammen, so läßt sich sagen, daß das Endziel der Thermochemie, nämlich die exakte Berechnung chemischer Gleichgewichte aus Wärmetönungen, erreichbar erscheint, wenn man eine neue Hypothese zur Hülfe nimmt, nach welcher die Kurven der freien und der gesamten Energie chemischer Reaktionen zwischen lauter festen oder flüssigen Körpern sich beim absoluten Nullpunkt der Temperatur tangieren.

Wenn eine exakte Prüfung der Formeln, zu welchen man mit Hülfe obiger Hypothese gelangt, auch zur Zeit mangels hinreichender Daten über die spezifische Wärme bei niedrigen Temperaturen nicht möglich ist, so haben doch schon die in dieser Arbeit entwickelten Näherungsformeln sich in weitem Umfange an der Erfahrung prüfen lassen. Die Beziehungen zwischen Wärme und chemischer Affinität scheinen in den wesentlichsten Zügen klar gelegt zu sein.



Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre

2 Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 18. Januar 1906.

I. Inhaltsübersicht.

Die Sonnenoberfläche zeigt uns in Granulationen, Sonnenflecken und Protuberanzen wechselnde Zustände und stürmische Veränderungen. Um die physikalischen Verhältnisse zu begreifen, unter denen diese Erscheinungen stehn, pflegt man in erster Annäherung den räumlichen und zeitlichen Wechsel durch einen mittleren stationären Zustand, ein mechanisches Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre zu ersetzen. Im Vordergrund der Betrachtung stand bisher allgemein das sog. adiabatische Gleichgewicht, wie es in unsrer Atmosphäre herrscht, wenn sie von auf- und absteigenden Strömungen gründlich durchmischt ist. Ich möchte hier auf eine andere Art des Gleichgewichts aufmerksam machen, welche man als „Strahlungsgleichgewicht“ bezeichnen kann. Strahlungsgleichgewicht wird sich in einer stark strahlenden und absorbierenden Atmosphäre einstellen, in welcher die durchmischende Wirkung auf- und absteigender Ströme gegenüber dem Wärmeaustausch durch Strahlung zurücktritt. Ob für die Sonne mehr das adiabatische oder das Strahlungsgleichgewicht gilt, wäre aus allgemeinen Gründen schwer zu entscheiden. Indessen giebt es Beobachtungsdaten, welche ein gewisses Urtheil ermöglichen. Die Sonnenscheibe ist nicht gleichmässig hell, sondern vom Centrum nach dem Rande zu abgetönt. Aus dieser Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche lässt sich unter plausiblem Annahmen zurückschliessen auf die Temperaturverteilung in der Tiefe. Das Resultat ist, daß das

Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre im Grossen und Ganzen dem Strahlungsgleichgewicht entspricht.

Die Ueberlegungen, die zu diesem Resultat führen, setzen voraus, daß das Kirchhoff'sche Gesetz gilt oder — in andern Worten — daß die Strahlung der Sonnenatmosphäre reine Temperaturstrahlung ist. Sie setzen ferner voraus, daß man beim Eindringen in den Sonnenkörper einer kontinuierlichen Aenderung des Zustandes begegnet und nicht aus einer ziemlich durchsichtigen Chromosphäre diskontinuierlich in eine aus leuchtenden Wolken gebildete undurchsichtige Photosphäre gerät. Vernachlässigt ist die Wirkung der Streuung des Lichts durch Beugung an den Teilchen der Atmosphäre, auf deren Bedeutung Herr A. Schuster¹⁾ aufmerksam gemacht hat, ebenso ist die Refraction vernachlässigt, die H. v. Seeliger²⁾ zur Erklärung der beobachteten Helligkeitsverteilung heranzieht. Auch wird die verschiedene Absorption verschiedener Wellenlängen, die Abnahme der Schwere mit der Höhe und die kugelförmige Ausbreitung der Strahlung nicht berücksichtigt. Die ganze Betrachtung kann daher keineswegs als abschliessend oder zwingend gelten, doch mag sie weiteren Spekulationen einen Anhalt geben, indem sie einen einfachen Gedanken zunächst in einfachster Form ausführt.

2. Verschiedene Arten des Gleichgewichts.

Man bezeichne den Druck mit p , die absolute Temperatur (in Centesimalgraden) mit t , die Dichte mit ρ , das Molekulargewicht (im Vergleich zum Wasserstoffatom) mit M , die Schwere mit g , die Tiefe in der Atmosphäre (von einem beliebigen Anfangspunkt nach innen gerechnet) mit h . Die Einheiten entnehme man den Verhältnissen, die an der Erdoberfläche bestehn, wähle also als Einheit von p die Atmosphäre, als Einheit von ρ die Dichte der Luft bei 273° absoluter Temperatur unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit von g die Schwere auf der Erdoberfläche und als Einheit von h die Höhe der sog. „homogenen Atmosphäre“, welche 8 km beträgt.

Es gilt dann für ein ideales Gas die Beziehung:

$$(1) \quad \rho t = \frac{p \cdot M}{R} \quad R = 0.106$$

1) Astrophysical Journal, 1905. Bd. 21. pag. 1.

2) Sitzungsberichte der Münchener Akad. d. Wiss., Math.-phys. Classe. 1891. Bd. 21. pag. 264.

und die Bedingung mechanischen Gleichgewichts der Atmosphäre lautet:

$$(2) \quad dp = \rho g dh.$$

Die Elimination von ρ aus (1) und (2) ergibt:

$$(3) \quad \frac{dp}{p} = \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} dh.$$

a) Isothermes Gleichgewicht. Zur allgemeinen Orientierung betrachte man isothermes Gleichgewicht, setze t als konstant voraus. Es folgt dann:

$$(4) \quad p = p_0 e^{\frac{M}{R} \frac{g}{t} h}, \quad \rho = \rho_0 e^{\frac{M}{R} \frac{g}{t} h}.$$

Die Schwere g ist auf der Sonne 27.7 mal größer, als auf der Erde, die Temperatur (rund 6000°) etwa 20 mal höher. Es folgt also für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft etwa dieselbe räumliche Druckverteilung, wie für Luft auf der Erde. Rechnet man genauer, so findet man eine Zunahme von Druck und Dichte auf das 10-fache für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft (28.9) auf je 14.7 km, für Wasserstoff auf je 212 km. Da 725 km auf der Sonne einem Winkelwert von einer Bogensekunde von der Erde aus gesehn entsprechen, so ist klar, daß die Sonne völlig scharf begrenzt aussehn muß.

b) Adiabatisches Gleichgewicht. Wenn eine Gasmasse sich adiabatisch ausdehnt, so gelten die Poisson'schen Beziehungen:

$$(5) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

wobei p_0 und ρ_0 irgend welche zusammengehörige Ausgangswerte bezeichnen. Die Größe k , das Verhältnis der spezifischen Wärme, ist für ein 1-atomiges Gas gleich 5/3, für ein 2-atomiges gleich 7/5, für ein dreiatomiges 4/3, und nimmt für mehratomige Gase bis auf 1 ab. Das Gleichgewicht einer Atmosphäre heißt adiabatisch, wenn an jeder Stelle die Temperatur herrscht, welche eine von unten aufsteigende, sich adiabatisch abkühlende Gasmasse an dieser Stelle annehmen würde, wenn also innerhalb der ganzen Atmosphäre die Gleichungen (5) erfüllt sind. Es folgt dann aus (3) durch Einsetzen von (5) und Integration:

$$(6) \quad t - t_0 = \frac{k-1}{k} \frac{Mg}{R} (h - h_0).$$

Die Temperatur ändert sich linear mit der Höhe. Der Temperaturgradient berechnet sich für die Erdatmosphäre zu 1° auf je 100 m, für die Sonne wird er 27,7 mal größer als auf der Erde. Die Temperaturzunahme um einen Grad erfolgt dort also für Luft auf je 3,63 m, für Wasserstoff auf je 52 m. Die Atmosphäre hat eine bestimmte äußere Grenze ($t = \varrho = p = 0$). Die Tiefe einer Schicht von 6000° Temperatur unter der äußeren Grenze beträgt auf der Sonne für Luft 22 km, für Wasserstoff 300 km.

c) Strahlungsgleichgewicht. Wenn man sich vorstellt, daß die äußeren Teile der Sonne einen kontinuierlichen Uebergang zu immer heißeren und dichteren Gasmassen bilden, so kann man nicht unterscheiden zwischen strahlenden und absorbierenden Schichten, sondern hat jede Schicht gleichzeitig als absorbierend und strahlend anzusehn. Wir wissen, daß ein mächtiger Energiestrom, aus unbekannten Quellen im Sonneninnern entspringend, die Sonnenatmosphäre durchsetzt und in den Außenraum dringt. Welche Temperatur würden beim Fehlen durchmischender Bewegungen die einzelnen Schichten der Sonnenatmosphäre annehmen müssen, damit sie einen solchen Energiestrom ohne weitere eigene Temperaturänderung stationär befördern?

Man nehme an, jede Höhenschicht dh der Sonnenatmosphäre absorbiere den Bruchteil adh der hindurchgehenden Strahlung. Ist E die Emission eines schwarzen Körpers von der Temperatur dieser Höhenschicht und nimmt man das Kirchhoff'sche Gesetz als gültig an, so folgt, daß diese Höhenschicht die Energie $E \cdot adh$ nach jeder Seite ausstrahlt.

Man betrachte jetzt die Strahlungsenergie A , die durch die Sonnenatmosphäre an irgend einer Stelle nach außen wandert, und die Strahlungsenergie B , die (infolge der Strahlung der weiter außen liegenden Schichten) nach innen wandert.

Man verfolge zunächst die nach innen wandernde Energie B . Geht man um eine unendlich dünne Schicht dh nach innen, so geht von der von außen kommenden Energie B der Bruchteil $B \cdot adh$ verloren, auf der anderen Seite kommt durch die nach der einen Seite gehende Eigenstrahlung der Schicht dh der Betrag $aEdh$ hinzu, es ergibt sich also im Ganzen:

$$(7) \quad \frac{dB}{dh} = a(E - B).$$

Völlig analog folgt für die nach außen gehende Strahlung:

$$(8) \quad \frac{dA}{dh} = -a(E - A).$$

Indem man sich das Absorptionsvermögen a als Funktion der Tiefe h gegeben denkt, bilde man die über der Tiefe h liegende „optische Masse“ der Atmosphäre:

$$(9) \quad m = \int^h a dh.$$

Dann lauten die Differentialgleichungen:

$$(10) \quad \frac{dB}{dm} = E - B, \quad \frac{dA}{dm} = A - E.$$

Wir fragen nach einem stationären Zustand der Temperaturverteilung. Derselbe ist bedingt durch die Forderung, daß jede Schicht ebensoviel Energie empfängt, als ausstrahlt, daß also gilt:

$$aA + a \cdot B = 2aE, \quad A + B = 2E.$$

Führt man dieser Bedingung entsprechend die Hilfsgröße γ ein durch:

$$A = E + \gamma, \quad B = E - \gamma,$$

so gehn die Differentialgleichungen durch Addition und Subtraktion über in:

$$\frac{d\gamma}{dm} = 0, \quad \frac{dE}{dm} = \gamma$$

und integriert:

$$\gamma = \text{const}, \quad E = E_0 + \gamma m, \\ A = E_0 + \gamma(1 + m), \quad B = E_0 + \gamma(m - 1).$$

Die Integrationskonstanten E_0 und γ wurden dadurch bestimmt, daß an der Außengrenze der Atmosphäre ($m = 0$) keine nach innen wandernde Energie B vorhanden ist und die nach außen wandernde Energie den zu beobachtenden Betrag A_0 hat. Es muß also für $m = 0$:

$$B = 0, \quad A = A_0$$

sein. Hiermit ergibt sich das Resultat:

$$(11) \quad E = \frac{A_0}{2}(1 + m), \quad A = \frac{A_0}{2}(2 + m), \quad B = \frac{A_0}{2}m.$$

Es läßt sich also nur unter Voraussetzung des Kirchhoff'schen Gesetzes die Abhängigkeit der Strahlung E von der über der betreffenden Stelle liegenden optischen Masse ableiten.

Will man die Verteilung von Druck und Dichte, die bei Strahlungsgleichgewicht herrscht, kennen lernen, so hat man im Grunde eine detailliertere Untersuchung nötig, welche die Strahlung in den einzelnen Wellenlängen betrachtet. Es genüge hier für eine erste Uebersicht die Annahme, daß der Absorptionskoeffizient unabhängig von der Farbe und der Dichte proportional sei:

$$(12) \quad a = \varrho k$$

(k eine Constante). Dann folgt:

$$(13) \quad m = \int a \, dh = k \cdot \int \varrho \, dh = \frac{k}{g} \cdot p.$$

Die Strahlung E des schwarzen Körpers ist nach dem Stefan'schen Gesetz:

$$E = c \cdot t^4 \quad (c \text{ eine Constante}).$$

Setzt man für die nach außen gelangende Energie A_0 :

$$A_0 = c \cdot T^4,$$

so ist T das, was man gewöhnlich als (effektive) Temperatur der Sonne angiebt. Es ist rund $T = 6000^\circ$. Für Strahlungsgleichgewicht gilt dann nach (11):

$$(14) \quad t^4 = \frac{1}{2} T^4 \left[1 + \frac{k}{g} p \right].$$

Unter Einführung der an der äußeren Grenze der Atmosphäre herrschenden Temperatur $\tau \left(= \frac{T}{\sqrt[4]{2}} \right)$ kann man dafür auch schreiben:

$$(14a) \quad t^4 = \tau^4 \left[1 + \frac{k}{g} p \right].$$

Geht man hiermit in (3) ein, so erhält man:

$$(15) \quad \frac{M}{R} g h = \int \frac{4 t^4 \, dt}{t^4 - \tau^4} = \tau \left[4 \frac{t}{\tau} + \log \frac{\frac{t}{\tau} - 1}{\frac{t}{\tau} + 1} - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{\tau} \right] + \text{const.}$$

Diese Gleichung giebt die Temperatur als Funktion der Tiefe. Die zugehörige Dichte folgt aus:

$$(16) \quad \varrho = \frac{M}{R} \frac{p}{t} = \frac{M g}{R k} \frac{t^4 - \tau^4}{t^4}.$$

Das nachstehende Täfelchen giebt die Werte, die aus (11), (15)

und (16) folgen, wenn man die Sonnenatmosphäre aus unserer Luft bestehen läßt. Für den Absorptionskoeffizienten der Luft hat man etwa $k = 0,6$ anzusetzen. Aus der Effektivtemperatur $T = 6000^\circ$ folgt für die Temperatur der äußeren Grenze $\tau = 5050^\circ$. Die Tiefe h ist von einer Stelle an gerechnet, an welcher die Temperatur das $1\frac{1}{2}$ fache dieser Grenztemperatur beträgt. Damit sind die Grundlagen der Rechnung gegeben.

| Tiefe h | t | m | ρ |
|--------------------|---------------|-------|--------|
| $-\infty$ | 5050° | 0.000 | 0.00 |
| -36.9 km | 5060° | 0.008 | 0.02 |
| -19.1 | 5300° | 0.215 | 0.51 |
| 0.0 | 7570° | 4.06 | 6.8 |
| $+12.0$ | 10100° | 15.0 | 18.7 |
| $+55.7$ | 20200° | 255.0 | 159.4 |

Um die entsprechende Tabelle für eine Atmosphäre aus Wasserstoff zu erhalten, hätte man die Tiefe h mit 14,4 zu multiplizieren, die Dichte ρ einerseits durch 14,4 zu dividieren, andererseits mit einem Faktor zu multiplizieren, der angibt, um wie viel dieselbe Masse Wasserstoff durchsichtiger ist, als Luft. Die beiden Spalten t und m blieben unverändert.

Man erkennt, daß sich das Strahlungsgleichgewicht mit der Erhebung über die Sonne mehr und mehr dem isothermen Gleichgewicht, welches der Grenztemperatur τ entspricht, nähert und, daß es, wie dieses, theoretisch eine unendliche Erstreckung der Atmosphäre zur Folge hat.

3. Stabilität des Strahlungsgleichgewichts.

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich des Temperaturgradienten bei Strahlungs- und bei adiabatischem Gleichgewicht. Ist nämlich der Temperaturgradient kleiner als bei adiabatischem Gleichgewicht, so gerät eine aufsteigende Luftmasse in Schichten, welche wärmer und dünner sind, als sie selbst ankommt, sie erfährt daher einen Druck nach unten. Ebenso erfährt dann eine absteigende Luftmasse einen Druck nach oben. Ein Gleichgewicht mit kleinerem Temperaturgradienten, als das adiabatische, ist daher stabil, umgekehrt eines mit größerem Temperaturgradienten instabil.

Für adiabatisches Gleichgewicht gilt nach (6):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{k-1}{k} \frac{Mg}{R},$$

für Strahlungsgleichgewicht nach (15):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tau^4}{t^4}\right) \frac{Mg}{R}.$$

Stabilitätsbedingung ist also:

$$(17) \quad 1 - \frac{\tau^4}{t^4} < 4 \frac{k-1}{k}$$

welche für $k > 4/3$ immer erfüllt ist.

Das Strahlungsgleichgewicht ist demnach überall stabil, so lange das Gas, welches die Atmosphäre bildet, ein-, zwei- oder dreiatomig ist. Für mehratomige Gase würde in tieferen Schichten (von höherer Temperatur t) Instabilität eintreten.

Es wird daher hier die Vorstellung nahe gelegt, daß eine äußere Schale der Sonnenatmosphäre sich in stabilem Strahlungsgleichgewicht befindet, während sich vielleicht in der Tiefe eine dem adiabatischen Gleichgewicht angenäherte Zone auf- und absteigender Ströme erstreckt, die dann zugleich die Entnahme der Energie aus ihren eigentlichen Quellen besorgen wird.

4. Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe.

Jeder Temperaturverteilung längs der Vertikalen in der Sonnenatmosphäre entspricht bei unseren Annahmen eine bestimmte Verteilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe.

Wir hatten früher die Gesamtenergie A betrachtet, die durch die Sonnenatmosphäre nach außen wandert, ohne die einzelnen Bestandteile zu trennen, welche unter verschiedenen Neigungen gegen die Vertikale laufen, und wir hatten den Absorptionskoeffizienten für die Gesamtenergie mit a bezeichnet. Dieses a giebt einen Durchschnittswert aus den für alle möglichen Neigungen gültigen Absorptionskoeffizienten.

Wir wollen jetzt die in einer bestimmten Richtung wandernde Strahlung isoliert betrachten und mit $F(i)$ grade die Strahlung bezeichnen, die sich unter dem Winkel i gegen die Vertikale bewegt. Es bezeichne α den Absorptionskoeffizienten für Strahlung, welche die Atmosphäre normal durchsetzt. Dann ist offenbar $\frac{\alpha}{\cos i}$

der Absorptionskoeffizient für unter dem Winkel i verlaufende Strahlung. Man erhält daher für F in völliger Analogie zu (8) die Differentialgleichung:

$$(18) \quad \frac{dF}{dh} = -\frac{\alpha}{\cos i} (E - F)$$

oder:

$$\frac{dF}{d\mu} = -\frac{1}{\cos i} (E - F),$$

wenn man die Abkürzung:

$$(19) \quad \mu = \int_{-\infty}^h \alpha dh$$

einführt. Die Integration ergibt für die aus der Atmosphäre austretende Strahlung:

$$(20) \quad F(i) = \int_0^{\infty} E e^{-\mu \sec i} d\mu \sec i.$$

Es läßt sich also $F(i)$ berechnen, sobald man die Temperaturverteilung längs der Vertikalen und damit E als Funktion von μ kennt.

Nun hängt aber μ mit der früher eingeführten optischen Masse m zusammen. Man betrachte die Gesamtstrahlung, die auf ein horizontales Flächenelement ds innerhalb der Atmosphäre von unten auffällt. Dieselbe wird gegeben durch das Integral über die aus allen möglichen Richtungen eintreffende Strahlung:

$$J = 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i).$$

Die Absorption, welche diese Strahlung innerhalb der Schicht dh erleidet, wird sein:

$$\begin{aligned} dJ &= 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i) \cdot \frac{\alpha dh}{\cos i} \\ &= 2\pi ds \alpha dh \int_0^{\pi/2} di \sin i F(i). \end{aligned}$$

Der früher verwandte Absorptionskoeffizient für die Gesamtenergie a war definiert durch die Beziehung:

$$\frac{dJ}{J} = a dh.$$

Die Vergleichung mit den vorstehenden Formeln ergibt:

$$a = \alpha \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} d i \sin i F(i)}{\int_0^{\pi/2} d i \sin i \cos i F(i)}$$

Wenn $F(i)$ für kleine Neigungen i einigermaßen konstant ist und sich erst für i in der Nähe von 90° rascher ändert — wie das bei der Sonne nach den unten folgenden empirischen Ergebnissen der Fall ist — so erhält man eine Näherung für a , indem man $F(i)$ überhaupt als unabhängig von i betrachtet, und zwar folgt dann durch Ausführung der Integrale:

$$(21) \quad a = 2\alpha.$$

Von dieser Beziehung wollen wir Gebrauch machen. Es ergibt sich aus (9) und (19):

$$m = 2\mu$$

und damit statt (20):

$$(22) \quad F(i) = \int_0^\infty E e^{-\frac{m}{2} \sec i} \frac{dm}{2} \sec i.$$

Es ist also nunmehr $F(i)$ bekannt, sobald E als Funktion der optischen Masse m gegeben ist. Die Funktion $F(i)$ liefert aber auch sofort die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Denn die Strahlung, die wir auf der Sonnenscheibe im scheinbaren Abstand r vom Centrum der Scheibe beobachten, hat offenbar die Sonnenatmosphäre unter einem Winkel i durchsetzt, der durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(23) \quad \sin i = \frac{r}{R}.$$

Hierbei bezeichnet R den scheinbaren Sonnenradius. Die Verbindung von (22) und (23) liefert zu jedem r die zugehörige Helligkeit F .

Sehr übersichtlich wird der Zusammenhang zwischen der Strahlungsverteilung in der Tiefe E und der Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche F , wenn sich E in eine Potenzreihe nach m entwickeln läßt:

$$(24) \quad E = \beta_0 + m\beta_1 + m^2\beta_2 + \dots$$

Dann folgt nämlich sofort aus (22):

$$(25) \quad F = \beta_0 + 2 \cdot 1! \beta_1 \cos i + 4 \cdot 2! \beta_2 \cos^2 i + \dots$$

Läßt sich E als eine Summe gebrochener Potenzen von m darstellen:

$$(26) \quad E = \sum_n \beta_n \cdot m^{\gamma_n},$$

so folgt für F :

$$(27) \quad F = \sum_n \Gamma(\gamma_n) \beta_n (2 \cos i)^{\gamma_n},$$

wo Γ die Γ -Funktion bedeutet. Auch hier ist der Uebergang von E zu F also noch einfach zu bewerkstelligen.

Wir wollen insbesondere betrachten, wie sich die Helligkeitsverteilung bei adiabatischem und bei Strahlungsgleichgewicht stellt.

Für Strahlungsgleichgewicht gilt nach (11):

$$E = \frac{A_0}{2} (1 + m).$$

Daraus folgt nach (24) und (25):

$$F(i) = \frac{A_0}{2} (1 + 2 \cos i)$$

oder, wenn man die Helligkeit im Centrum der Sonnenscheibe ($i = 0$) als Einheit nimmt:

$$(28) \quad F(i) = \frac{1 + 2 \cos i}{3}.$$

Für adiabatisches Gleichgewicht galt die Beziehung (5):

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Wenn wir ferner, wie oben, die Absorption für alle Farben gleich und der Dichte proportional voraussetzen, so besteht zwischen p und m der Zusammenhang (13):

$$m = \frac{k}{g} p.$$

Damit erhält man für E :

$$E = c \cdot t^k = c_1 p^{\frac{k(k-1)}{k}} = c_2 m^{\frac{k(k-1)}{k}} \quad 4^*$$

wobei c_1 und c_2 neue Konstante bedeuten. Der zugehörige Ausdruck von F wird nach (26) und (27):

$$F(i) = c_1 \Gamma\left[4 \frac{(k-1)}{k}\right] (\cos i)^{4 \frac{(k-1)}{k}},$$

oder, wenn man wieder die centrale Helligkeit als Einheit wählt:

$$(29) \quad F(i) = (\cos i)^{4 \frac{k-1}{k}}.$$

Die Formeln (28) und (29) sind mit der Beobachtung zu vergleichen. Außer den hier nicht in Frage kommenden spektral-photometrischen Untersuchungen für einzelne Farbengebiete giebt es eine Reihe von Messungen, die mit Thermosäulen und Bolometer angestellt sind und die angeben, wie sich die von allen Wellenlängen zugleich gelieferte Gesamtstrahlung über die Sonnenscheibe verteilt. Herr G. Müller hat diese Messungen in seiner „Photometrie der Gestirne“ pag. 323 zusammengestellt und zu den Mittelwerten vereinigt, die in der zweiten Spalte des unten folgenden Täfelchens angegeben sind. Die theoretischen Werte für Strahlungsgleichgewicht und adiabatisches Gleichgewicht nach den Formeln (28) und (29) sind daneben gesetzt. Für das adiabatische Gleichgewicht ist $k = 4/3$ gesetzt, was einem 3-atomigen Gase entspricht. Ein- oder zweiatomige Gase würden eine noch schlechtere Uebereinstimmung geben und die physikalische Wahrscheinlichkeit spricht gewiß gegen mehr als 3-atomige Gase in den äußeren Teilen der Sonnenatmosphäre.

| $\frac{r}{R}$ | Messung. | Strahlungsgleichgew. | Adiabat. Gleichgew. |
|---------------|----------|----------------------|---------------------|
| 0.0 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.2 | 0.99 | 0.99 | 0.98 |
| 0.4 | 0.97 | 0.95 | 0.92 |
| 0.6 | 0.92 | 0.87 | 0.80 |
| 0.7 | 0.87 | 0.81 | 0.71 |
| 0.8 | 0.81 | 0.73 | 0.60 |
| 0.9 | 0.70 | 0.63 | 0.44 |
| 0.96 | 0.59 | 0.52 | 0.28 |
| 0.98 | 0.49 | 0.47 | 0.20 |
| 1.00 | (0.40) | 0.33 | 0.00 |

Man sieht, daß das Strahlungsgleichgewicht die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe so gut darstellt, als beiden vereinfachten Voraussetzungen, unter denen hier gerechnet worden ist, erwartet werden kann, daß das adiabatische Gleichgewicht hingegen ein ganz anderes Aussehn der Sonnenscheibe zur Folge hätte. Damit hat die Einführung des Strahlungsgleichgewichts eine gewisse empirische Rechtfertigung gefunden.

Die Zahl und die Dimension der Geschmacksknospen der Papilla vallata des Menschen in den verschiedenen Lebensaltern.

Von

Friedrich Heiderich.

(Aus dem anatomischen Institut zu Göttingen.)

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1906 von Fr. Merkel.

Nachdem für das Sehorgan von Merkel und Orr (1) festgestellt worden ist, daß die Stelle des deutlichsten Sehens in der Ausbildung dem übrigen Teile der Netzhaut von einer sehr frühen Zeit an vorseilt, und daß bei der Geburt die Fovea centralis von der Mitte des Sehnerveneintritts ebensoweit, wie beim Erwachsenen entfernt ist, „also ein Wachstum zwischen diesen beiden Punkten im späteren Leben nicht mehr stattfindet“, nachdem ferner durch die Untersuchungen von Retzius und von Siebenmann (2) für das Gehörorgan festgestellt worden ist, „daß wesentliche Unterschiede im feineren histologischen Bau des inneren Ohres in den verschiedenen Perioden des extrauterinen Lebens fehlen“, und aus der Betrachtung der Korrosionspräparate des inneren Ohres hervorgeht, daß die Größe desselben beim Neugeborenen fast genau die gleiche ist wie beim Erwachsenen, und endlich Merckels Untersuchungen (3) die frühzeitige Vollendung des Wachstums auch der Lamina cribrosa gelehrt haben, lag es nahe, auch für das Geschmacksorgan Untersuchungen über seine Ausbildung in den verschiedenen Lebensaltern anzustellen.

Hier liegen nun die Verhältnisse insofern etwas ungünstiger, als die Endapparate des Geschmacksorganes auf einen ungleich größeren Raum verteilt sind, und es hierdurch fast zur Unmöglichkeit wird, ihre Gesamtzahl zu bestimmen. Da aber in den Wall-

papillen der Zunge die Geschmacksknospen in größerer Anzahl vorkommen und gerade die Wallpapillen leicht zu untersuchende und auch vergleichbare Gebilde sind, dürfte es unbedenklich sein, die für diese gewonnenen Resultate als für das ganze Geschmacksorgan gültige anzusehen.

Genaue Zählungen der Geschmacksknospen an den Papillae vallatae des Menschen sind, soweit meine Kenntnis der Literatur reicht, bisher überhaupt noch nicht vorgenommen worden. Es handelte sich bisher immer um Schätzungen, deren Resultate außerordentlich weit auseinander gehen. W. Krause (zit. nach Kallius (4)) gibt die Zahl der Geschmacksknospen einer Papilla vallata auf 2500 an, während van Wyss (5) für eine Papille mittlerer Größe etwa 400 annimmt. Graberg (6), der sich eingehender mit dem Geschmacksorgan beschäftigt hat, schätzt die Gesamtzahl der in einer Papilla vallata des erwachsenen Menschen sich befindenden Geschmacksknospen auf „höchstens 100–150“, bemerkt aber, daß es ganz große individuelle Verschiedenheiten hinsichtlich der Zahl gibt, und daß die Gesamtzahl auf 50–40 heruntergehen könne.

Die großen Differenzen in den Angaben der verschiedenen Autoren machten es von vornherein nötig, um zu einwandfreien Resultaten zu kommen ein möglichst großes Material zu untersuchen. Es standen mir die Zungen von 41 Individuen zur Verfügung, von denen ich, da ich mich nur auf gut entwickelte Papillen beschränkte, 111 Papillen gewann. Diese verteilten sich dem Alter nach folgendermaßen:

| Neugeboren | 1 Individ. | 3 Papillen |
|---------------------------------|------------|------------|
| 2 Tage | 2 | 3 |
| 1 Monat | 1 | 4 |
| 6 Monate | 1 | 4 |
| 7 „ | 1 | 3 |
| 9 „ | 5 | 14 |
| 10 „ | 1 | 1 |
| 11 „ | 2 | 4 |
| 1 Jahr | 7 | 16 |
| 1 ¹ / ₄ „ | 3 | 5 |
| 1 ¹ / ₂ „ | 1 | 4 |
| 2 Jahre | 2 | 5 |
| 2 ¹ / ₂ „ | 4 | 8 |
| 3 „ | 2 | 8 |
| 4 „ | 1 | 2 |
| 8 „ | 1 | 3 |
| 9 „ | 1 | 2 |

| 10 Jahre | 1 Individ. | 3 Papillen |
|----------|------------|------------|
| 14 " | 1 " | 2 " |
| 16 " | 1 " | 5 " |
| 20 " | 2 " | 12 " |

Das Material stammt von pathologischen Sektionen, ist also für die feinere histologische Untersuchung nicht ganz einwandfrei. Es wurde fixiert in Formal, Müllerformol und Zenkerscher Flüssigkeit. Die Papillen bettete ich in Paraffin ein (die geringe Schrumpfung, welche Paraffineinbettung mit sich bringt, war vielfach der Untersuchung förderlich) und ließ Serien in einer Schnittdicke von 10μ schneiden. Als Schnittrichtung wählte ich die Richtung senkrecht zur Längsaxe der Papille, da hierbei die Knospen meist längs getroffen wurden. Gefärbt wurden die Schnitte mit Hämatoxylin und Orange.

Ich zählte nun die in den Schnitten sichtbaren Geschmacksknospen, und zwar alle ohne Ausnahme, mochten sie nun gerade in der Mitte getroffen oder nur eben angeschnitten sein. Da die Geschmacksknospen eine viel größere Dicke (im Mittel etwa 40μ) als die Schnitte haben, kehrte natürlich ein und dieselbe Knospe in einer Anzahl aufeinander folgender Schnitte wieder, wurde also mehrfach gezählt. Diese relativen Zahlen erwiesen sich als nicht vergleichbar, denn einmal ist auch die Dicke der Knospen individuell sehr verschieden, zum andern aber war die Differenzierung in den Knospen einzelner junger Individuen oft nur wenig vorgeschritten, so daß es unmöglich wurde, die äußersten Schnitte einer Knospe zu erkennen. So wurde es nötig, zu versuchen für jede einzelne Papille die absolute Zahl der Knospen zu bestimmen. Hierfür sind zwei Wege möglich. Entweder man mißt die Dicke der Knospen und berechnet daraus in wieviel Teile eine solche durch Schnitte einer bestimmten Dicke zerlegt werden muß. Ist z. B. die Knospe 40μ dick und haben die Schnitte eine Dicke von 10μ , so wird die Knospe in mindestens vier höchstens fünf Teile zerlegt werden, vorausgesetzt daß die Schnittrichtung der Längsaxe der Knospen parallel ist. Hiernach müßte also 4,5 der Divisor sein, durch den die durch Zählung gefundene Anzahl der Knospen dividiert werden muß, um die wirkliche Zahl der Knospen in einer Papille zu berechnen. Oder aber man bestimmt direkt am Präparat, an einer Reihe, in mehreren aufeinanderfolgenden Schnitten mit Sicherheit wieder aufzufindender Knospen durch wieviel Schnitte man jede einzelne verfolgen kann, und benutzt diese Zahl resp. den Mittelwert als Divisor. Der erste Weg erwies sich als sehr unzuverlässig, denn die äußersten Schnitte

aufzufinden gelang auch bei gut differenzierten Knospen nur unvollkommen. Wenn die Dicke der Knospen auch meist $40\ \mu$ betrug, so konnte doch höchst selten eine Knospe in fünf Schnitten wiedergefunden werden. Außerdem ist die oben erwähnte verschieden weit vorgeschrittene Differenzierung der Knospen eine sehr große und gar nicht zu beurteilende Fehlerquelle hierbei. Auch der zweite Weg ist nicht ganz einwandfrei, da auch in ein und derselben Papille Knospen verschiedener Dicke vorkommen; jedoch ist hier die Fehlerquelle bedeutend geringer. Ich benutzte deshalb zu meinen Untersuchungen den zweiten Weg. Um den durch dieses Verfahren bedingten Fehler möglichst zu reduzieren, stellte ich bei jeder Papille für mindestens 10 Knospen, waren nennenswerte Unterschiede vorhanden, für mindestens 20 Knospen und mehr die Anzahl der auffindbaren Teile fest, in die sie durch das Schneiden zerlegt wurden und benutzte die hieraus sich ergebende Mittelzahl als Divisor.

Die so gewonnenen Resultate sind in den beigegeführten Tabellen zusammengestellt. Es sind in den Tabellen nur 92 Papillen verarbeitet. 19 der Serien waren lückenhaft und wurden deshalb nicht in die Tabellen aufgenommen, wenngleich sie zu den allgemeinen Resultaten mit herangezogen werden konnten. In den Tabellen sind die Papillen dem Alter nach geordnet. Die von ein und demselben Individuum stammenden Papillen folgen aufeinander und sind durch einen Abstand von denen des folgenden Individuums getrennt. In der ersten Spalte der Tabellen ist das Alter des Individuums, von dem die Papille stammt, eingetragen, in der zweiten und dritten Spalte findet sich die durch die Zählung festgestellte Anzahl der Knospenteile und zwar für Papille und Wall getrennt. Die vierte Spalte giebt den in der geschilderten Weise festgestellten Divisor an, die Spalten 5 und 6 bringen als Resultat die absolute Anzahl der Geschmacksknospen jeder Papille, und zwar wieder getrennt für Papille und Wall. Spalte 7 gibt die Anzahl der Schnitte in Papille und im Wall an, in denen sich Knospen vorfanden. Aus ihr ist also die Höhe des Teiles der Papille, welcher Sinnesepithel trägt ersichtlich. In Spalte 8 sind die höchsten Zahlen der Knospen in einem Schnitte angegeben. Aus Spalte 9 ersehen wir die kleinste und die größte Dicke, welche bei der Messung von mindestens 10 oft auch mehr Geschmacksknospen einer Papille gefunden wurde, aus Spalte 10 die hieraus berechnete mittlere Dicke, und aus Spalte 11 die Länge der Knospen. Alle diese Maße sind in μ angegeben. In Spalte 12 endlich haben einzelne Bemerkungen Aufnahme gefunden.

Betrachten wir nun die Tabellen im einzelnen. Hier fallen vor allem die außerordentlich großen Unterschiede in den Ergebnissen auf. So z. B. beträgt die höchste Zahl der für eine Papille berechneten Geschmacksknospen 508 (Pap. No. 17), die geringste Zahl 33 (Pap. No. 24). Diese Unterschiede sind einmal individuelle. So tragen die von einem neun Monate alten Kinde stammenden Papillen No. 22—24 177, 95 und 33 Knospen, während die Papillen No. 25—27 eines gleichaltrigen Kindes 317, 275 und 306 Knospen, also die fast dreifache Zahl aufweisen. Aber auch die Papillen ein und derselben Zunge sind sehr verschieden stark mit Geschmacksknospen besetzt, wie u. a. aus dem Vergleich der Papillen No. 4 und 5 und No. 88 und 89 besonders deutlich zu ersehen ist. Die Unterschiede betragen hier 305 resp. 301. Die Größe der Papillen kommt hierbei nicht in dem Maße zur Geltung, wie man annehmen sollte; oft waren die bestentwickelten Papillen gerade besonders arm an Geschmacksknospen.

Diese großen Schwankungen in der Zahl der Geschmacksknospen, die auch Graberg konstatiert hat, erschweren natürlich die Lösung der Frage ob hinsichtlich der Zahl Altersunterschiede bestehen ungemein. Aus den einzelnen Zahlen ist überhaupt kein Schluß zu ziehen. Man muß vielmehr, um diese großen Unterschiede einigermaßen zu nivellieren, aus einer Anzahl von Einzelzahlen gleichalteriger Papillen für jedes Alter den Mittelwert berechnen. Erst diese Mittelwerte sind mehr oder weniger vergleichbar. Leider standen mir trotz des verhältnismäßig großen Materials nicht genügend gleichalterige Papillen zur Verfügung. Ich war also genötigt, Papillen verschiedenen Alters zu diesen Berechnungen zu vereinigen, und zwar faßte ich die Papillen von Individuen im Alter von 0—11 Monaten (Tab. 1), von 1—3 Jahren (Tab. 2) und von 4—20 Jahren (Tab. 3) zu je einer Gruppe zusammen. Hierbei ergab sich als Mittelwert

für die ersten 11 Monate 241 Geschmacksknospen für eine Papille
für das Alter von 1—3 Jahren 242

" " " " 4—20 " 269 " " " "

Diese Zahlen sind, wie ja auch aus den großen Schwankungen der Einzelresultate nicht anders zu erwarten war, nicht gleich; jedoch ist der Unterschied von 28 resp. 27 so gering, daß wir ihn als innerhalb der Fehlergrenze liegend völlig außer Acht lassen können, mithin zu der Annahme berechtigt sind, daß die Papillen verschiedenen Alters eine annähernd gleiche Anzahl von Geschmacksknospen besitzen. Wir sahen, daß Papillen mit ungewöhnlich vielen (Pap. No. 10, 17, 33, 89, 90

u. (a. und solche mit ungewöhnlich wenigen Geschmacksknospen (Pap. No. 5, 16, 24, 47 u. a.) vorkommen. Auch diese verteilen sich annähernd gleichmäßig in den drei Gruppen:

In Tab. 1 (32 Pap.) befinden sich 8 Papillen mit unter 200 Knospen

| | | | | | | |
|---|---|-------------|---|---|-----------|---|
| | | 17 | " | " | 200—300 | " |
| | | 7 | " | " | über 300 | " |
| " | " | 2 (40 Pap.) | " | " | 11 | " |
| | | 20 | " | " | unter 200 | " |
| | | 9 | " | " | 200—300 | " |
| | | | " | " | über 300 | " |
| " | " | 3 (24 Pap.) | " | " | 6 | " |
| | | 15 | " | " | unter 200 | " |
| | | 5 | " | " | 200—300 | " |
| | | | " | " | über 300 | " |

Rechnet man diese Werte, um sie vergleichen zu können für jede Tabelle für die Zahl von 40 Papillen um, so ergeben sich für Tab. 1, Tab. 2 und Tab. 3

| | | | |
|----|----|----|---------------------------------------|
| 10 | 11 | 10 | Papillen mit weniger als 200 Knospen, |
| 21 | 20 | 22 | " " 200—300 Knospen und |
| 9 | 9 | 8 | " " mehr als 300 Knospen, |

eine recht bemerkenswerte Uebereinstimmung der drei Altersgruppen, die das vorher gewonnene Resultat zu stützen sehr geeignet ist. Es bleibt nun noch übrig festzustellen, wie sich die Zahl der Geschmacksknospen innerhalb des ersten Lebensjahres verhält. Hierfür ist das mir zur Verfügung stehende Material (32 Papillen in Tab. 1) vielleicht etwas dürftig. Doch läßt sich wenigstens daraus ersehen, daß auch bei der Geburt Mittelzahlen wie 230 in Papille No. 1 und 246 in Papille No. 2 vorkommen, und daß auch sehr hohe Zahlen wie 385 in Papille No. 4 erreicht werden. Eine nennenswerte Zunahme der Geschmacksknospen dürfte also auch während der ersten Monate nach der Geburt nicht statthaben. Ich glaube daher auf Grund des vorgelegten Materials zu dem Schlusse berechtigt zu sein, daß eine erhebliche Zunahme der Geschmacksknospen der Papilla vallata und mithin wohl auch des gesamten Geschmackorgans nach der Geburt nicht mehr erfolgt, daß also auch dieses Sinnesorgan bei der Geburt in seinen wesentlichen Teilen fertig ist.

Ich habe in meiner bisherigen Betrachtung die in Spalte 6 der Tabellen aufgeführten Zahlen der Geschmacksknospen, die sich im Wall der betreffenden Papille vorfinden nicht erwähnt. Dies geschah deshalb, weil diese Zahlen so außerordentlich schwankend sind, daß es sicherlich zu ganz falschen Resultaten führen würde, wollte man sie irgendwie rechnerisch verwerten. Eine sehr große

Anzahl von Papillen, die eine normale oder sogar abnorm große Menge von Knospen tragen, entbehren diese im Wall völlig. In andern Fällen aber trägt der Wall fast ebensoviel Knospen wie die Papille. Daß Tab. 3 eine verhältnismäßig große Zahl gut besetzter Wälle aufweist, dürfte daher mehr dem Zufall als dem vorgeschrittenen Alter der in dieser Tabelle zusammengestellten Papillen zuzuschreiben sein; jedenfalls halte ich es für zu gewagt, hieraus auf eine Zunahme der Geschmacksknospen schließen zu wollen.

Wie verhält sich nun die Größe (Länge und Dicke) der Geschmacksknospen mit zunehmendem Alter? Die Länge der Knospen ist ebenfalls individuell sehr verschieden; sie schwankt zwischen 54μ und 80μ . Altersunterschiede aber fanden sich auch hier nicht. Auch die Dicke der Knospen ist sehr variabel und zwar nicht nur individuell, wobei die äußersten Grenzen in 20μ und 58μ gegeben sind, sondern auch innerhalb der einzelnen Papillen, wo in einem Falle die Differenz 22μ betrug. Berechnen wir auch für die Dicke den Mittelwert für jede der drei Altersgruppen, so ergibt sich hier die bemerkenswerte Tatsache, daß die Dicke für das erste Lebensjahr nur 35μ beträgt, während für das Alter von 1—3 Jahren und das Alter von 4—20 Jahren die Knospen im Mittel 41μ dick sind. Hier haben wir also eine mit Sicherheit nachweisbare Zunahme der Dicke mit zunehmendem Alter, die allerdings schon am Ende des ersten Lebensjahres, z. T. schon nach neun Monaten ihr Ende erreicht, wie aus Spalte 10 der Tab. 1 direkt zu ersehen ist. Ob diese Dickenzunahme nur einer Vermehrung der Stützelemente zuzuschreiben ist, oder auch die Geschmackszellen selbst zahlreicher werden, das ließ sich bei der Beschaffenheit meines Materials nicht feststellen. Ich erwähne nur, daß die Differenzierung der Elemente der Geschmacksknospen in dieser Zeit noch nicht vollendet schien.

Zum Schlusse entledige ich mich gern der angenehmen Pflicht, Herrn Geh.-Rat Merkel sowie Herrn Professor Kallius für die liebenswürdige Ueberlassung des Materials und das große Interesse, das sie meiner Arbeit entgegenbrachten, bestens zu danken.

Tabelle 1.

| No. | 1. Alter | 2. Papille | 3. Wall | 4. Divisor | 5. Resultate Papille | 6. Wall | 7. Schnitte | 8. Höchste Zahl in einem Schnitte | 9. Dicke | 10. Mittlere Dicke | 11. Länge | 12. Bemer- kungen |
|-----|-------------|---------------|------------|---------------|----------------------------|------------|----------------|---|-------------|--------------------------|--------------|--------------------------|
| | | | | | | | P. W. | P. W. | μ | μ | μ | |
| 1. | Neugeb. | 574 | — | 2.5 | 230 | — | 43 — | 12 — | 24—40 | 31 | 72 | |
| 2. | Neugeb. | 614 | — | 2.5 | 246 | — | 48 — | 24 — | 22—40 | 29 | 72 | |
| 3. | 2 Tage | 168 | 110 | 2.5 | 67 | 44 | 25 19 | 14 9 | 20—40 | 28 | 60 | |
| 4. | 2 Tage | 895 | 24 | 2.5 | 358 | 10 | 43 10 | 45 5 | 22—40 | 30 | 66 | |
| 5. | 2 Tage | 122 | 56 | 2.5 | 49 | 22 | 31 19 | 11 6 | 22—40 | 30 | 60 | |
| 6. | 1 Monat | 627 | 23 | 2.6 | 241 | 9 | 36 9 | 30 3 | 28—40 | 35 | 72 | |
| 7. | 1 " | 660 | 28 | 2.6 | 254 | 11 | 37 7 | 29 6 | 28—40 | 33 | 70 | |
| 8. | 1 " | 749 | 19 | 2.6 | 288 | 7 | 25 4 | 36 9 | 32—40 | 36 | 70 | |
| 9. | 6 Monate | 937 | — | 3.3 | 284 | — | 59 — | 33 — | 28—40 | 36 | 72 | |
| 10. | 6 " | 1154 | 246 | 3.0 | 385 | 82 | 53 30 | 42 15 | 28—40 | 36 | 72 | |
| 11. | 6 " | 895 | — | 2.9 | 310 | — | 38 — | 49 — | 32—42 | 36 | 72 | |
| 12. | 7 " | 860 | — | 3.0 | 287 | — | 36 — | 29 — | 30—40 | 36 | 72 | |
| 13. | 7 " | 1124 | — | 3.0 | 375 | — | 38 — | 31 — | 34—40 | 38 | 76 | |
| 14. | 7 " | 860 | 95 | 3.0 | 287 | 32 | 43 — | 29 9 | 32—40 | 36 | 72 | |
| 15. | 9 " | 339 | — | 1.5 | 226 | — | 54 — | 13 — | 32—40 | 36 | 70 | sehr wenig different. |
| 16. | 9 " | 74 | — | 1.5 | 50 | — | 26 — | 24 — | 30—40 | 36 | 70 | " |
| 17. | 9 " | 1270 | 104 | 2.5 | 508 | 42 | 49 32 | 44 14 | 22—36 | 28 | 54 | |
| 18. | 9 " | 737 | — | 2.5 | 295 | — | 40 — | 35 — | 22—40 | 30 | 54 | |
| 19. | 9 " | 623 | — | 3.0 | 208 | — | 49 — | 23 — | 36—50 | 40 | 60 | |
| 20. | 9 " | 875 | — | 3.2 | 273 | — | 37 — | 48 — | 30—50 | 42 | 60 | |
| 21. | 9 " | 752 | 20 | 3.0 | 251 | 7 | 36 9 | 44 4 | 32—50 | 40 | 60 | |
| 22. | 9 " | 353 | — | 2.0 | 177 | — | 89 — | 9 — | 26—34 | 29 | 60 | |
| 23. | 9 " | 190 | 31 | 2.0 | 95 | 16 | 31 14 | 10 4 | 24—36 | 29 | 60 | |
| 24. | 9 " | 65 | — | 2.0 | 33 | — | 16 — | 7 — | 22—34 | 28 | 60 | |
| 25. | 9 " | 1046 | — | 3.3 | 317 | — | 52 — | 40 — | 30—40 | 36 | 60 | |
| 26. | 9 " | 907 | — | 3.3 | 275 | — | 63 — | 25 — | 36—46 | 40 | 62 | |
| 27. | 9 " | 1134 | — | 3.7 | 306 | — | 97 — | 30 — | 38—44 | 41 | 62 | s. T. quer. |
| 28. | 10 " | 781 | 140 | 3.0 | 260 | 47 | 35 21 | 45 13 | 36—50 | 43 | 56 | wenig diff. |
| 29. | 11 " | 536 | — | 3.0 | 179 | — | 56 — | 17 — | 38—50 | 43 | 68 | |
| 30. | 11 " | 548 | — | 3.0 | 181 | — | 32 — | 30 — | 40—50 | 43 | 66 | |
| 31. | 11 " | 595 | — | 2.8 | 213 | — | 41 — | 23 — | 36—44 | 42 | 70 | |
| 32. | 11 " | 605 | — | 3.0 | 202 | — | 55 — | 22 — | 38—44 | 40 | 70 | |

Tabelle 2.

| No. | 1. Alter | 2. Papille | 3. Wall | 4. Divisor | 5. Resultate | | 6. Wall | 7. Schnitte | 8. | | 9. Dicke | 10. Mittlere Dicke | 11. Länge | 12. Bemer- kungen |
|---------------------|-------------------------------------|---------------|------------|---------------|-----------------|------|------------|----------------|---|----------|-------------|--------------------------|--------------|--|
| | | | | | Pa- pille | Wall | | | Höchste Zahl in einem Schnitte | P. W. | | | | |
| 33. | 1 Jahr | 1276 | -- | 3.0 | 425 | -- | 62 | -- | 33 | -- | 36—42 | 38 | 70 | viele schräg. s. T. schräg. |
| 34. | 1 " | 760 | -- | 3.0 | 253 | -- | 43 | -- | 33 | -- | 36—40 | 38 | 70 | |
| 35. | 1 " | 1083 | 45 | 4.0 | 271 | 11 | 38 | 15 | 60 | 7 | 30—40 | 38 | 70 | |
| 36. | 1 " | 563 | -- | 2.5 | 225 | -- | 37 | -- | 25 | -- | 24—32 | 30 | 70 | |
| 37. | 1 " | 1242 | -- | 4.0 | 311 | -- | 59 | -- | 33 | -- | 36—42 | 40 | 70 | |
| 38. | 1 " | 519 | 9 | 3.0 | 173 | 3 | 46 | 3 | 11 | 4 | 36—42 | 40 | 70 | |
| 39 ¹⁾ a. | 1 " | 967 | -- | 3.0 | 322 | -- | 57 | -- | 34 | -- | 38—42 | 40 | 65 | |
| b. | | 843 | | | 114 | | 49 | | 19 | | | | | |
| c. | | 280 | | | 93 | | 38 | | 12 | | | | | |
| 40 ¹⁾ a. | 1 " | 908 | -- | 3.2 | 284 | -- | 36 | -- | 33 | -- | 38—48 | 44 | 70 | |
| b. | | 556 | | | 174 | | 45 | | 22 | | | | | |
| 41 ¹⁾ a. | 1 " | 299 | | 3.2 | 93 | | 35 | | 20 | | 30—56 | 43 | 68 | |
| b. | | 868 | | | 271 | | 55 | | 35 | | | | | |
| 42. | 1 ¹ / ₄ Jahr | 585 | 61 | 3.2 | 182 | 19 | 45 | 14 | 27 | 8 | 38—48 | 43 | 68 | |
| 43. | 1 ¹ / ₄ " | 975 | 161 | 3.2 | 305 | 50 | 43 | 34 | 38 | 9 | 30—44 | 40 | 68 | |
| 44. | 1 ¹ / ₄ " | 752 | 155 | 3.0 | 251 | 52 | 49 | 32 | 23 | 11 | 30—42 | 40 | 60 | |
| 45. | 1 ¹ / ₄ " | 1030 | -- | 3.0 | 343 | -- | 47 | -- | 44 | -- | 36—46 | 40 | 63 | |
| 46. | 1 ¹ / ₄ " | 588 | -- | 2.0 | 294 | -- | 39 | -- | 31 | -- | 28—32 | 30 | 66 | |
| 47. | 1 ¹ / ₂ " | 111 | -- | 3.0 | 37 | -- | 17 | -- | 12 | -- | 36—44 | 40 | 70 | |
| 48. | 1 ¹ / ₂ " | 615 | 63 | 3.0 | 205 | 21 | 35 | 17 | 36 | 6 | 35—44 | 40 | 70 | |
| 49. | 1 ¹ / ₂ " | 766 | -- | 3.0 | 255 | -- | 43 | -- | 22 | -- | 36—44 | 40 | 70 | |
| 50. | 2 Jahre | 938 | 67 | 3.5 | 268 | 16 | 61 | 18 | 27 | 5 | 44—56 | 48 | 80 | |
| 51. | 2 " | 1013 | -- | 3.5 | 289 | -- | 52 | -- | 40 | -- | 44—55 | 48 | 80 | |
| 52. | 2 " | 1118 | 29 | 3.5 | 319 | 8 | 61 | 12 | 36 | 4 | 40—52 | 46 | 80 | |
| 53. | 2 " | 800 | 43 | 3.5 | 229 | 12 | 52 | 16 | 29 | 5 | 42—56 | 46 | 80 | |
| 54. | 2 ¹ / ₂ Jahre | 935 | 103 | 3.6 | 260 | 29 | 54 | 22 | 42 | 10 | 38—46 | 40 | 72 | |
| 55. | 2 ¹ / ₂ " | 1196 | 57 | 3.6 | 331 | 16 | 68 | 16 | 39 | 6 | 36—58 | 42 | 80 | |
| 56. | 2 ¹ / ₂ " | 1342 | 47 | 4.0 | 336 | 12 | 58 | 15 | 38 | 4 | 40—54 | 44 | 80 | |
| 57. | 2 ¹ / ₂ " | 1065 | 144 | 4.0 | 266 | 36 | 55 | 20 | 35 | 13 | 38—49 | 43 | 70 | |
| 58. | 2 ¹ / ₂ " | 789 | 122 | 3.5 | 225 | 35 | 32 | 22 | 46 | 14 | 38—44 | 40 | 70 | |
| 59. | 2 ¹ / ₂ " | 512 | 265 | 3.4 | 151 | 78 | 38 | 33 | 25 | 13 | 38—46 | 40 | 70 | |
| 60. | 2 ¹ / ₂ " | 837 | 199 | 3.5 | 239 | 57 | 47 | 37 | 35 | 10 | 36—45 | 40 | 72 | |
| 61. | 2 ¹ / ₂ " | 769 | 299 | 3.5 | 220 | 85 | 71 | 66 | 20 | 9 | 38—46 | 40 | 72 | |
| 62. | 3 Jahre | 1188 | -- | 3.6 | 330 | -- | 42 | -- | 40 | -- | 38—48 | 40 | 70 | |
| 63. | 3 " | 634 | -- | 3.6 | 180 | -- | 38 | -- | 25 | -- | 34—48 | 39 | 70 | |
| 64. | 3 " | 914 | -- | 3.5 | 261 | -- | 33 | -- | 30 | -- | 36—46 | 41 | 64 | |
| 65. | 3 " | 976 | 168 | 3.5 | 279 | 48 | 40 | 24 | 53 | 15 | 38—46 | 40 | 74 | |
| 66. | 3 " | 691 | -- | 3.5 | 197 | -- | 35 | -- | 39 | -- | 38—48 | 40 | 74 | |
| 67. | 3 " | 534 | 181 | 3.7 | 144 | 50 | 29 | 24 | 41 | 16 | 36—49 | 39 | 72 | |
| 68. | 3 " | 1065 | 336 | 4.0 | 266 | 84 | 49 | 44 | 54 | 18 | 38—50 | 42 | 70 | |

1) In einem Wall liegende aber gut entwickelte Papillen.

Tabelle 3.

| No. | 1. Alter | 2. Papille | 3. Wall | 4. Divisor | 5. Resultate Pa- pille | 6. Wall | 7. Schnitte | 8. Höchste Zahl in einem Schnitte | 9. Dicke | 10. Mittlere Dicke | 11. Länge | 12. Bemer- kungen |
|-----|-------------|---------------|------------|---------------|---------------------------------|------------|----------------|---|-------------|--------------------------|--------------|-------------------------|
| 69. | 4 Jahre | 1156 | 152 | 3.9 | 296 | 39 | P. 55 W. 29 | P. 37 W. 13 | 32-46 | 39 | 80 | |
| 70. | 4 " | 1237 | — | 4.0 | 309 | — | 63 — | 49 — | 38 50 | 40 | 74 | |
| 71. | 8 " | 1276 | 378 | 4.0 | 319 | 95 | 54 41 | 56 26 | 40-50 | 43 | 70 | |
| 72. | 8 " | 929 | 330 | 4.0 | 232 | 83 | 62 47 | 26 13 | 40-50 | 43 | 70 | |
| 73. | 8 " | 1314 | 231 | 4.0 | 329 | 58 | 55 28 | 46 14 | 38-58 | 40 | 70 | |
| 74. | 9 " | 1197 | 584 | 4.0 | 299 | 146 | 44 44 | 46 35 | 30-48 | 40 | 70 | |
| 75. | 10 " | 1227 | 429 | 4.2 | 292 | 100 | 57 44 | 40 22 | 36-43 | 40 | 80 | |
| 76. | 14 " | 723 | 218 | 4.0 | 181 | 55 | 48 34 | 30 15 | 38-43 | 40 | 60 | |
| 77. | 14 " | 1158 | — | 4.0 | 289 | — | 63 — | 36 — | 38-44 | 40 | 60 | |
| 78. | 16 " | 805 | 468 | 4.2 | 192 | 111 | 50 30 | 26 25 | 37-43 | 40 | 60 | |
| 79. | 16 " | 771 | — | 4.0 | 193 | — | 45 — | 42 — | 36-43 | 40 | 60 | |
| 80. | 16 " | 1092 | 544 | 4.0 | 273 | 136 | 50 49 | 33 24 | 37-42 | 41 | 60 | |
| 81. | 16 " | 1066 | 791 | 4.0 | 267 | 198 | 60 59 | 34 21 | 36-42 | 40 | 60 | |
| 82. | 16 " | 1045 | — | 4.0 | 261 | — | 46 — | 40 — | 38-44 | 40 | 60 | |
| 83. | 16 " | 1208 | 309 | 4.2 | 288 | 74 | 50 40 | 55 15 | 38-42 | 40 | 60 | |
| 84. | 20 " | 2060 | 1259 | 7.5 | 275 | 167 | 91 88 | 53 28 | 38-43 | 41 | 75 | { meist quer. |
| 85. | 20 " | 1093 | 321 | 4.0 | 273 | 80 | 71 49 | 39 17 | 38-42 | 40 | 75 | |
| 86. | 20 " | 1096 | 129 | 4.0 | 274 | 32 | 76 32 | 30 9 | 40-50 | 44 | 80 | |
| 87. | 20 " | 594 | 176 | 4.0 | 149 | 44 | 39 19 | 26 16 | 38-43 | 40 | 68 | |
| 88. | 20 " | 577 | 432 | 4.0 | 144 | 103 | 55 43 | 25 20 | 38-42 | 40 | 68 | |
| 89. | 20 " | 1779 | 166 | 4.0 | 445 | 42 | 110 53 | 46 7 | 37-42 | 41 | 68 | |
| 90. | 20 " | 1755 | 445 | 4.0 | 439 | 111 | 82 46 | 42 16 | 38-42 | 40 | 68 | |
| 91. | 20 " | 1248 | — | 5.0 | 250 | — | 54 — | 47 — | 38-44 | 40 | 70 | z. T. quer. |
| 92. | 20 " | 802 | — | 4.2 | 191 | — | 69 — | 28 — | 40-46 | 42 | 64 | |

Literatur.

- 1) Merkel, Fr. und Andrew W. Orr, Das Auge des Neugeborenen an einem schematischen Durchschnitt erläutert. Anatomische Hefte, Abt. 1, Bd. 1.
- 2) Siebenmann, Mittleres und inneres Ohr. Handbuch der Anatomie des Menschen von K. v. Bardeleben. Bd. 8.
- 3) Merkel, Fr., Beitrag zur Kenntnis der postembryonalen Entwicklung des menschlichen Schädels. Beiträge zur Anatomie und Embryologie als Festgabe Jakob Henle zum 24. April 1882 dargebracht von seinen Schülern. Bonn 1882.
- 4) Kallius, E., Geschmacksorgan. Handbuch der Anatomie des Menschen von K. v. Bardeleben.
- 5) V. Wyss, Hans, Die becherförmigen Organe der Zunge. Archiv f. mikr. Anat. Bd. 6, 1870.
- 6) Graberg, John, Beiträge zur Genese des Geschmacksorgans des Menschen. Morphologische Arbeiten von G. Schwalbe. Bd. 8, 1898.
- 7) Derselbe, Zur Kenntnis des cellulären Baues der Geschmacksknospen beim Menschen. Anatomische Hefte, Abt. 1, Bd. 12, 1899.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen. XV.

Von

O. Wallach.

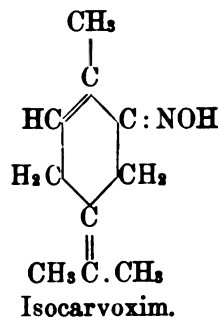
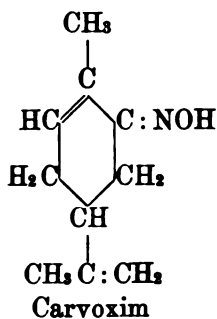
Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Februar 1906.

I. Ueber den Isomerisationsverlauf bei Oximen.

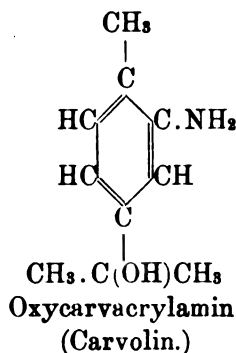
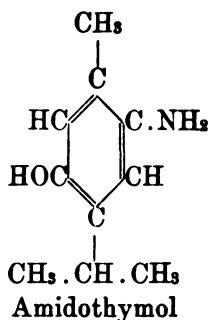
Schon vor längerer Zeit habe ich eine ganze Reihe von Beobachtungen über Isomerisationsvorgänge bei cyclischen Oximen mitgeteilt [Nachr. d. K. Ges. d. W. 1893, 747; 1894, 59, 165; 1900, 241; 1902, 300; 1904, 15]. Jetzt kann man nun innerhalb dieser Verbindungen zwei Gruppen von Vorgängen scharf unterscheiden. In dem einen Fall werden nämlich die cyclischen Oxime in Lactime d. h. innere Anhydride von Säureamiden umgewandelt, in dem anderen Fall entstehen Basen (bezw. Oxybasen). Die erstere Art der Isomerisation entspricht vollkommen der s. g. Beckmannschen Umlagerung bei acyclischen Ketoximen und bildet die Regel. Für die zweite Art der Isomerisation war bis dahin nur ein, allerdings sehr prägnantes Beispiel bekannt: Carvoxim isomerisiert sich zu Amidothymol. Neuerdings habe ich nun gelegentlich einer gemeinsam mit Herrn H. Lautsch ausgeführten Untersuchung ein neues Beispiel für die Umlagerung zweiter Art kennen gelernt und dieses Beispiel scheint mir insofern besondere Wichtigkeit zu besitzen, als es einen deutlichen Fingerzeig giebt, in welcher Weise der Mechanismus der Umlagerungsreactionen sich abspielt.

Das Carvoxim läßt sich, wie man lange weiß, in das isomere sog. Isocarvoxim verwandeln. Dieser Vorgang beruht auf einer einfachen Bindungsverschiebung im Molekül und hat mit den Isomerisationsvorgängen, die hier besprochen werden

sollen, nichts zu thun. Die Constitution der eben genannten Verbindungen läßt sich durch folgende Formeln zum Ausdruck bringen:



Isomerisiert man nun diese beiden isomeren Oxime mit Hülfe von Säuren so entsteht aus Carvoxim, wie erst schon bemerkt, Amidothymol aus Isocarvoxim aber Oxy-carvacrylamin (Carvolin):



d. h. also: es bilden sich aus den bindungsisomeren Oximen zwei Oxy-Basen, welche sich durch die relative Stellung des Hydroxyls unterscheiden.

Zunächst ist der Beweis für die Constitution des Umlagerungs-products von Isocarvoxim anzutreten, welches zuerst H. Goldschmidt in kleiner Menge unter Händen gehabt und mit dem Namen Carvolin belegt hat, ohne zu einer Vorstellung über den Bau der Verbindung zu kommen.

Das Carvolin ließ sich sofort als eine aromatische Base diagnosticieren, als es mit salpetriger Säure in Umsetzung gebracht wurde: es entsteht dabei eine Diazoverbindung, welche alle für diese Körperklasse so charakteristischen Reactionen aufweist. Der analytischen Zusammensetzung nach mußte die Base weiter als Oxy- oder Ketobase angesprochen werden. Die Reactionen auf

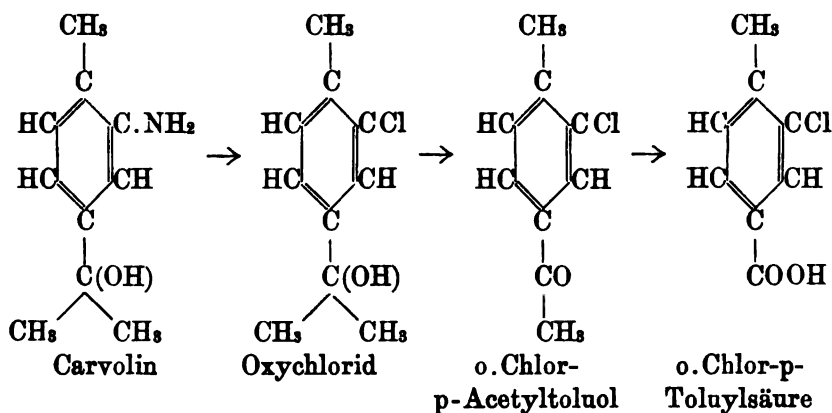
die Ketogruppe versagten: also konnte nur eine Oxybase vorliegen. Die Hydroxylgruppe konnte aber auch nicht im aromatischen Kern stehen, denn die Verbindung erwies sich als unlöslich in Alkalien, somit blieb nur die Stelle aufzusuchen, an welcher das Hydroxyl in eine der Seitenketten eingetreten war.

Die folgenden Abwandlungen brachten darüber Klarheit.

Carvolin wurde in salzsaurer Lösung bei Gegenwart von Cuprochlorid diazotiert. Es fand in normaler Weise der Austausch von NH_2 gegen Chlor statt.

Die entstehende Verbindung hatte die Zusammensetzung $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{Cl}(\text{OH})$, siedete bei $245-249^\circ$ und schmolz bei $50-51^\circ$. Bei der Oxydation mit Chromsäure entstand daraus ein Keton $\text{C}_9\text{H}_9\text{OCl}$, Siedepunkt $250-254^\circ$, Schmelzpunkt $45-46^\circ$. Aus diesem Abbau ging hervor, daß die Ausgangsverbindung eine Oxyisopropyl-Gruppe $-\text{C}(\text{OH}) < \begin{smallmatrix} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_3 \end{smallmatrix}$ enthalten haben muß, welche zu COCH_3 aboxydiert worden war. Das weitere Verhalten des gechlorten Ketons, dessen Oxim bei $96-97^\circ$ und dessen Semicarbazon bei $237-238^\circ$ schmilzt, bestätigte diese Annahme. Bei der Behandlung mit Hypobromit ging das Keton glatt in die bei $200-201^\circ$ schmelzende o-Chlor-p-Toluylsäure über. Damit war auch gleichzeitig die ursprüngliche Stellung der Amidogruppe im Carvolin festgelegt, die übrigens auch dadurch bestimmt worden war, daß es gelang Carvolin beim Kochen mit Jodwasserstoff in Carvacrylamin überzuführen.

Die Vorgänge, welche zum Beweis für die Constitution des Carvolins herangezogen wurden, lassen sich durch folgende Formeln klar veranschaulichen:

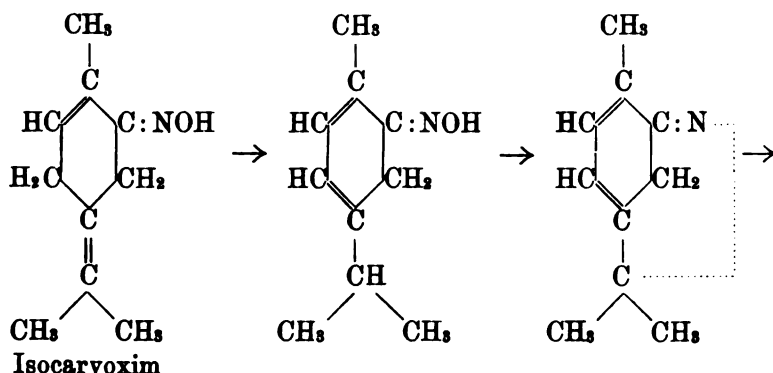


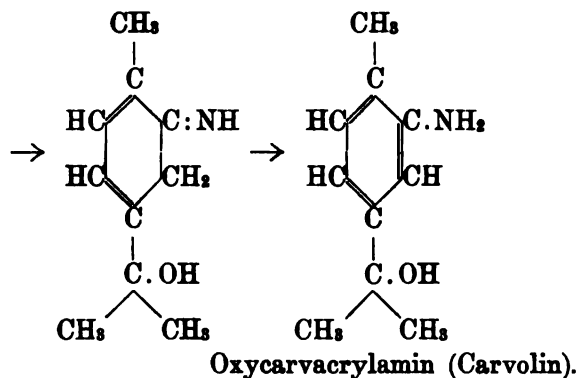
Nachdem nunmehr die Constitution des Carvolins feststeht,

gewinnt die Thatsache Bedeutung, daß nach der Isomerisierung von Isocarvoxim sich die OH-Gruppe in der Seitenkette, nach der Isomerisation von Carvoxim ein Kern befindet, während man bei dem sehr ähnlichen Bau beider Oxime hätte erwarten sollen, daß sie bei der Behandlung mit Säuren dieselben Producte liefern würden.

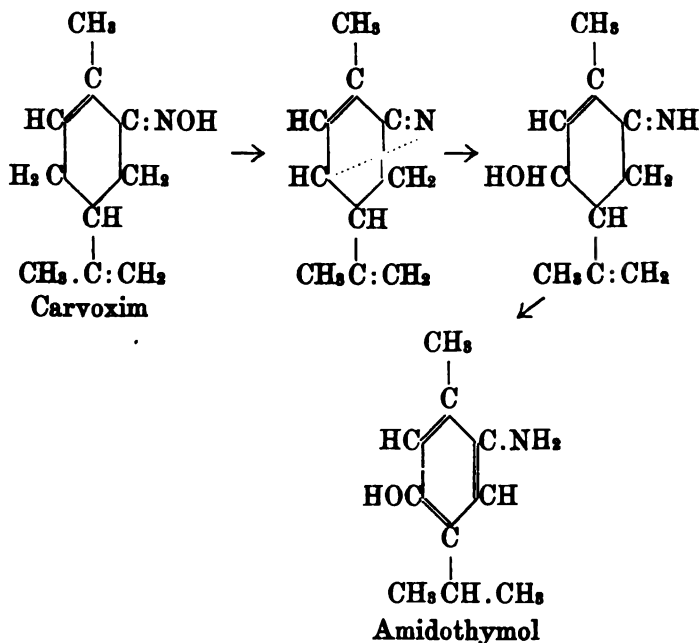
Der verschiedene Umlagerungsverlauf erklärt sich nun aber ganz glatt, wenn man annimmt, daß der Mechanismus der Umlagerung bei Oximen sich immer so abspielt, daß das OH der Oximgruppe: NOH zunächst in Form von Wasser mit einem labilen H-Atom austritt. Dann muß sich ein Kohlenstoff-Stickstoffring bilden. Man weiß nun aber jetzt, daß solche Ringe nicht unter allen Umständen beständig sind, vielmehr sich gern unter Wasseraufnahme lösen. Diese Ringsprengung erfolgt dann natürlich so, daß das unter den gegebenen Bedingungen stabilste System entsteht. Da nun die Oxime nicht zu den in saurerer Lösung stabilen Verbindungen gehören, erfolgt die Ringsprengung unter Wasseraufnahme in anderem Sinne als die Ringschließung erfolgt ist: d. h. die Reaction wird nicht rückläufig, sondern es entsteht ein neues Gebilde.

Ueberträgt man das Gesagte auf die vorhin besprochenen Verhältnisse, so kommt man zu folgender Vorstellung bezüglich des Isomerisationsvorgangs von Isocarvoxim zu Carvolin. Im Isocarvoxim findet erst eine Bindungsverschiebung in bekannter Weise statt. Dann tritt das Oxim-Hydroxyl mit dem tertiär gebundenen H-Atom der Isopropylgruppe als H₂O aus und die hergestellte Stickstoffkohlenstoffbindung wird durch Wasseraufnahme wieder gelöst — aber in anderem Sinne als sie entstanden ist. Der Vorgang wird durch folgende Formelbilder ganz anschaulich:



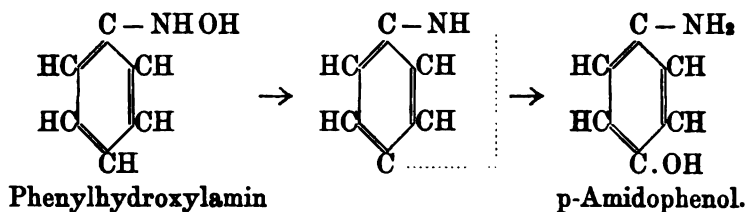


Bei der Isomerisierung des Carvoxim kann nun die intermediäre Stickstoff-Kohlenstoffringbildung nicht nach der Isopropylgruppe hin erfolgen, weil das entsprechende H-Atom fehlt und bei Wasseraufnahme an die Äthylenbindung in der Seitenkette die tertiäre Stelle nicht durch H, sondern durch OH ersetzt wird. Daher tritt der Wasserstoff aus dem Ring aus und bei nachfolgender Ringsprengung tritt OH in den Kohlenstoffring: so entsteht dann, unter gleichzeitig sich abspielender Bindungsverschiebung Amidothymol:

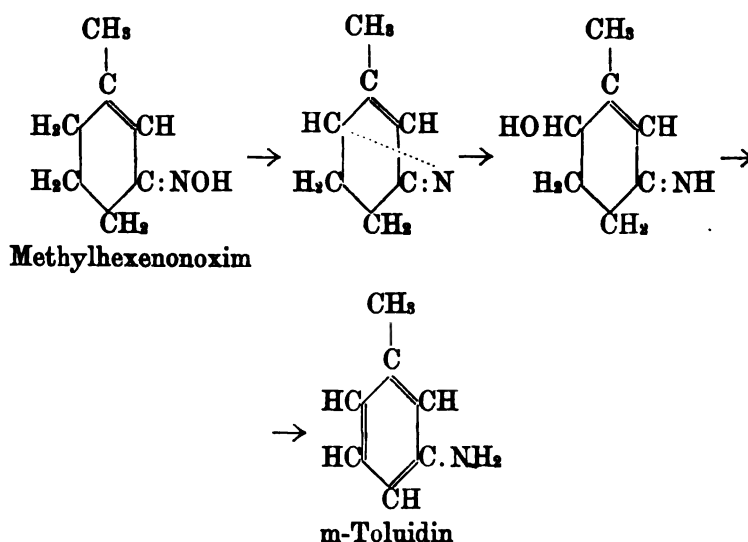


Ein ganz analoges Beispiel von Isomerisation bietet der

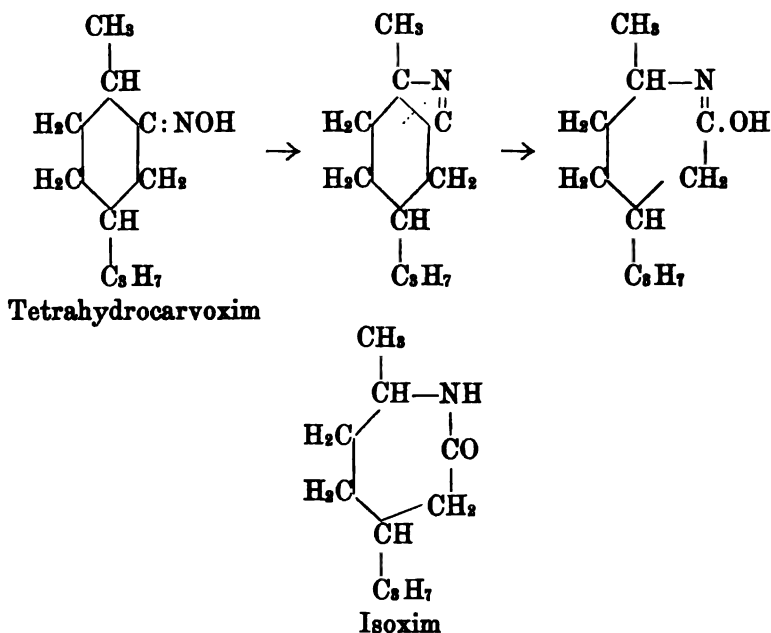
Uebergang von Phenylhydroxylamin in p-Amidophenol



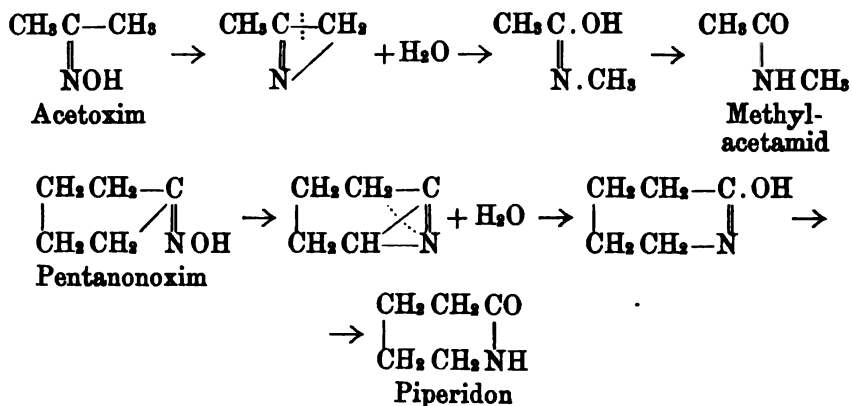
Ferner der von L. Wolff beobachtete Uebergang von Methylcyklohexenonoxim in m-Toluidin:



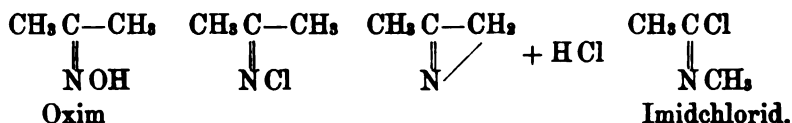
Wenn in den erörterten Fällen der Verlauf der Isomerisation — auch bei den Derivaten des hydrierten Ringsystems — immer als Endproduct zu einer Base der Benzolreihe führt, so erklärt sich das daraus, daß der Benzolkern ein besonders stabiles System vorstellt und er unter den gegebenen Bedingungen entstehen kann. Wo das nicht der Fall ist, sehen wir die Isomerisation sich in anderer Richtung, nämlich nach der Seite der Säureamide abspielen. Das Oxim-Hydroxyl nimmt den zur Wasserbildung nötigen Wasserstoff dann aus möglichster Nähe, also vom benachbarten C-Atom. So vollzieht sich der Vorgang z. B. beim vollkommen hydrierten Carboxim in folgender Weise:



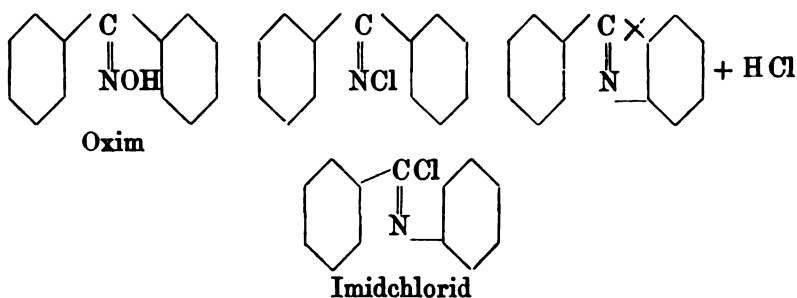
Diese ganze Art der Betrachtung läßt sich nun auch zu einer Erklärung der Vorgänge bei den eigentlichen „Beckmann'schen Umlagerungen“ verwerthen, wo es sich also um den Uebergang von gewöhnlichen Oximen in Säureamide handelt und für die eine einleuchtende Interpretation des Umlagerungs-Mechanismus noch vollkommen fehlt. Man hat hier als erste Phase der Reaction auch die intermediäre Bildung eines Stickstoff haltigen Ringes anzunehmen, der in der zweiten Phase in anderer Richtung als er entstanden ist und zwar unter Bildung eines unter den gegebenen Bedingungen stabileren Systems, wieder gelöst wird. Durch folgende Beispiele wird das erläutert:



Bei den Umlagerungen unter Anwendung von Chlorphosphor wird natürlich statt des Wassers HCl die Ringsprengung übernehmen. Z. B.:

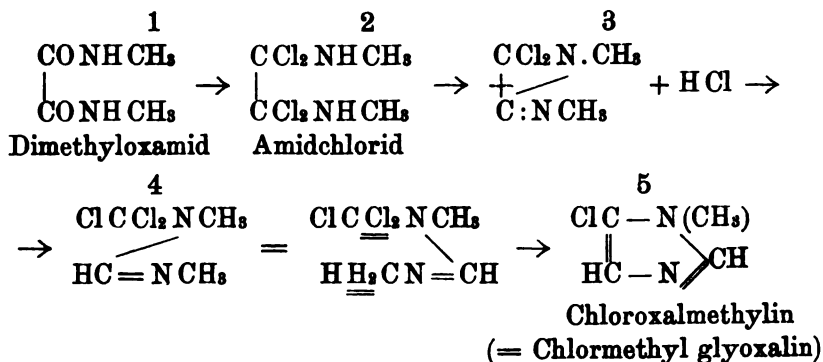


In den vorstehenden Beispielen handelt es sich um intermediäre Bildung eines unbeständigen Dreirings. Bei der Anwesenheit nur aromatischer Radicale wird als einfachster Fall die intermediäre Bildung eines heterocyclischen Vierrings anzunehmen sein, wie folgendes Beispiel erläutert:

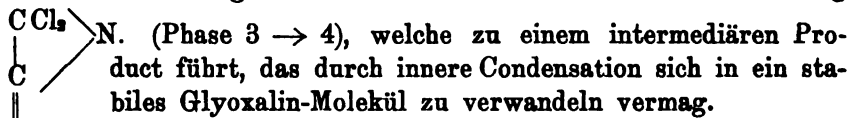


Die intermediäre Ringbildung und damit die Art der Isomerisation wird unter Umständen aber auch etwas abweichend verlaufen können, wie es sich ja grade bei den hydrierten Benzolringen zeigt.

Noch ein ganz anderer nur viel complicierterer Vorgang, nämlich die glatte Ueberführbarkeit von Bialkyloxamiden in Alkylglyoxaline läßt sich, wie ich schon im Jahre 1883 (Ber. chem. Ges. 16, 546) dargelegt habe, in ganz analoger Weise deuten.



Das Wesentliche ist auch hier die Lösung einer vorher bestehenden Kohlenstoffbindung durch HCl in dem Kohlenstoffstickstoffring



II. Ueber isomere Formen des Cyklodimethylhexylamins.

Wenn man Methylhexanon mit Ammoniumformiat bei Gegenwart von Essigsäure oder Ameisensäure umsetzt, so entsteht ein Gemenge stereoisomerer bei 273° siedender secundärer Basen von der Formel



Die isomeren Formen, welche im folgenden als α - und β -Modification unterschieden werden sollen, kann man durch die verschiedene Löslichkeit ihrer Formiate in Aether trennen.

Die Verbindungen der α -Base zeigen ein stärkeres Lichtablenkungsvermögen als die der β -Base, welch' letztere schwerer in reinem Zustand zu gewinnen sind. Von gut characterisierten Verbindungen und deren Eigenschaften seien hier aufgeführt:

Die Benzoyl-Verbindungen, $(\text{C}_6\text{H}_{10}\text{CH}_3)_2\text{N}.\text{CO C}_6\text{H}_5$:

Die α -Modification schmilzt bei 141° und zeigt $[\alpha]_D = -34,65^\circ$.

Die β -Modification schmilzt bei 151° und zeigt $[\alpha]_D = -11,88^\circ$.

Die Nitroso-Verbindungen, $(\text{C}_6\text{H}_{10}\text{CH}_3)_2\text{N}.\text{NO}$:

Die α -Modification schmilzt bei 83–84° und zeigt $[\alpha]_D = -34^\circ$.

Die β -Modification schmilzt gegen 70° und besitzt geringeres Drehungsvermögen.

Das α -Phenylcarbamid $(\text{C}_6\text{H}_{10}\text{CH}_3)_2\text{NCONHC}_6\text{H}_5$ schmilzt bei 174–176°, die β -Verbindung bei 137–138°. Einen besonders hervorstechenden Unterschied zeigen aber die beiden stereoisomeren Formen der freien Basen in ihrem Verhalten gegen Wasser.

Wenn man ganz trockenes unter Abschluß feuchter Luft über Natrium destilliertes α -Di-Methylhexylamin, das auch bei starkem Abkühlen flüssig bleibt, auf Wasser gießt und kräftig umschüttelt, so erstarrt die ganze Masse zu einem Krystallbrei. Diese Krystalle stellen ein Hydrat der Base vor. Dementsprechend wird die Base auch fest, wenn sie an feuchter Luft steht und die

bei 46—48° schmelzenden Krystalle verflüssigen sich wieder, wenn sie im Exsiccator über Schwefelsäure verweilen. Das β -Di-Methylhexylamin zeigt diese Neigung Krystallwasser aufzunehmen durchaus nicht: die Base bleibt in Berührung mit Wasser vollkommen flüssig. Diese Unterschiede bezüglich der Neigung zweier sich so nahestehender geometrisch-isomerer Verbindungen mit Wasser zu krystallisieren, scheint mir um so beachtenswerther zu sein, als man auch sonst schon einige raumisomere Verbindungen kennt, die sich bezüglich ihrer Fähigkeit Hydrate zu bilden, auffallend unterscheiden. So krystallisiert Cis-Terpin mit 1 Mol. Wasser, Trans-Terpin krystallisiert wasserfrei. Weinsäure krystallisiert wasserfrei, Traubensäure krystallisiert mit 1 Mol. Wasser.

Es liegt daher nahe anzunehmen, daß es durch die Art der Raumerfüllung, welche dem Molekül eigen ist, bedingt wird, ob Krystallwasser aufgenommen wird oder nicht.

III. Ueber die einfachsten Methenkohlenwasserstoffe der verschiedenen Ringsysteme und deren Abwandlung in alicyclische Aldehyde.

Die Penten-, Hexen- und Heptenessigsäure, welche ich früher dargestellt und andern Orts [Ann. d. Ch. 323, 159, 314, 157; 343, 51] beschrieben habe, zeigen übereinstimmend die Eigenschaft unter CO_2 -Abspaltung in Methenkohlenwasserstoffe überzugehen, sodaß man in dieser Reaction nunmehr ein bequemes Mittel an der Hand hat, die einfachsten Repräsentanten der wichtigen Methenkohlenwasserstoffe zu bereiten und es läßt sich voraussehen, daß man zahlreiche Homologe in entsprechender Weise wird gewinnen können, wofür nachher auch schon einige Belege gegeben werden sollen.

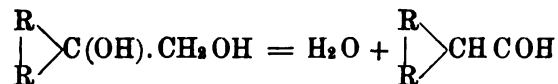
Von den einfachsten Abwandlungsproducten der Methenkohlenwasserstoffe $\begin{array}{c} \text{R} \\ | \\ \text{C} \\ | \\ \text{R} \end{array} \text{CH}_2$ verdienen im Augenblick das größte Interesse.

1) Die Glycole $\begin{array}{c} \text{R} \\ | \\ \text{C} \\ | \\ \text{R} \end{array} \text{C(OH).CH}_2\text{OH}$ und

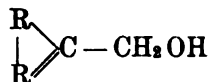
2) Die Nitrosochloride $\left[\begin{array}{c} \text{R} \\ | \\ \text{C} \\ | \\ \text{R} \end{array} \text{CCl.CH}_2\text{NO} \right]$

beziehungsweise die analog gebauten Nitrosate u. s. w. Die

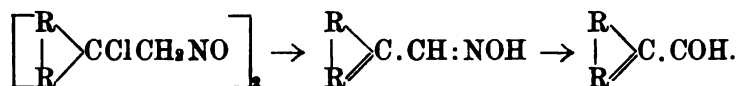
Glycole lassen sich nämlich mehr oder weniger leicht durch Wasserabspaltung in die vollkommen gesättigten Aldehyde verwandeln:



wobei u. A. als Nebenproducte ungesättigte Alkohole



auftreten können, während die Nitrosochloride durch Salzsäure-Abspaltung sich in Oxime ungesättigter Aldehyde verwandeln, die dann leicht in die zugehörigen Aldehyde überführbar sind:

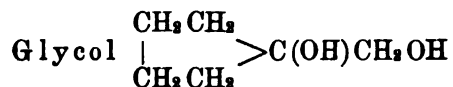


Von beiden Körperklassen waren bisher aber nur sehr wenige Repräsentanten und diese nur sehr oberflächlich bekannt geworden.

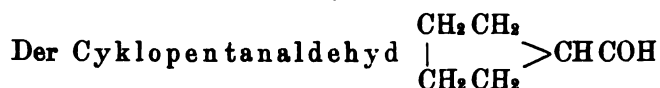


Der Kohlenwasserstoff siedet bei 78°—81° und zeigte $d = 0,78$, $n_D = 1,4355$ bei 19°. Er besitzt einen höchst durchdringenden lauchartigen Geruch, der sich bei der großen Flüchtigkeit des Präparats bei der Darstellung sehr unangenehm bemerkbar macht.

Das bei der Oxydation des Kohlenwasserstoffs mit Permanganat entstehende



erstarrt allmählich zu sehr löslichen und schlecht umzukrystallisierenden Krystallen, die nach dem Abpressen bei 39—41° schmolzen.

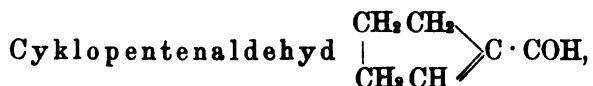


hat einen an Valeraldehyd erinnernden Geruch und seine Dämpfe reizen sehr stark zum Husten.

Das Semicarbazon des Aldehyds schmilzt bei 123—124° und läßt sich aus heißem Wasser umkrystallisieren.

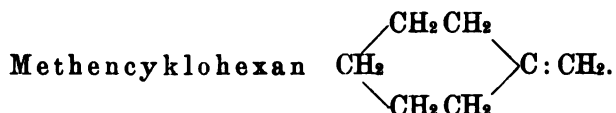
Das Nitrosochlorid des Methencyklopentans bildet sich leicht und zersetzt sich bei etwa 80—81°. Mit Piperidin setzt er sich zu dem gut krystallisierenden Nitrolamin $C_5H_{10}NO \cdot NC_5H_{10}$ um, das bei 116—117° schmilzt.

Das durch HCl-Abspaltung aus dem Nitrosochlorid entstehende Oxim, C_5H_8NOH , zeigt keine Krystallisationsneigung. Bei der Umsetzung mit Schwefelsäure liefert es den



der eine nach Benzaldehyd riechende Verbindung vorstellt, dessen Semicarbazon bei 208° schmolz und der bei der Oxydation mit Silberoxyd in die leicht erstarrende zugehörige Penten-Carbonsäure $C_5H_7CO_2H$ vom Schmelzpunkt 119° überzuführen war.

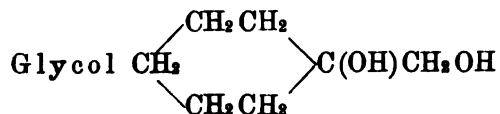
Den eben beschriebenen Aldehyd haben bereits von Baeyer und H. von Lieben bei der Oxydation der Dioxy-Korksäure erhalten, welche dabei intermediär in den Aldehyd der Adipinsäure übergeht (Ber. ch. Ges. 31, 2107). Die von den Genannten für die Cyklopentenverbindungen ermittelten Eigenschaften decken sich vollkommen mit den oben angegebenen.



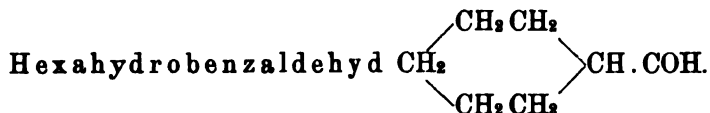
Der Kohlenwasserstoff siedet sehr konstant bei 105—106°, $d = 0,8025$, $n_D = 1,4501$. Er ist unter Mitwirkung von Herrn Stud. Isaac eingehender untersucht worden.

In kleiner Menge haben diesen Kohlenwasserstoff schon Sabatier und Mailhe (Centralbl. 1904, II. 704) bereitet und zwar haben sie ihn aus dem zugehörigen Alkohol ($C_6H_{11} \cdot CH_2OH$) durch Wasserentziehung erhalten, den Alkohol aber aus Trioxymethylen und Hexylmagnesiumchlorid aufgebaut. Sie geben den Siedepunkt des Kohlenwasserstoffs zu 105° und $d = 0,828$ bei 0° an, haben ihn aber nicht weiter untersucht.

Bei der Oxydation mit Permanganat geht das Methencyklohexan in das



über, eine sehr schön krystallisierende Verbindung, die in Aether ziemlich schwer löslich ist und bei 76–77° schmilzt und beim Erwärmen mit Säuren Hexahydrobenzaldehyd liefert.



Diese interessante Substanz haben schon verschiedene Chemiker in Händen gehabt, offenbar aber in so kleiner Menge, daß das chemische Verhalten des Aldehyds nicht ermittelt werden konnte.

Einige, wenn auch sehr spärliche Angaben über die physikalischen Eigenschaften macht Bouveault (Centralbl. 1903, II. 1437). Er gibt den Siedepunkt zu 159° an, $d = 0,945$ bei 0°, den Schmelzpunkt des Semicarbazons zu 176°. Bouveault erhielt den Aldehyd durch Oxydation des zugehörigen Alkohols, den er wiederum durch Reduktion aus Hexahydrobenzoëster bereitete. Sabatier und Mailhe (l. c.) haben den Aldehyd aus Cyklohexylmagnesiumchlorid und Ortho-Ameisensäureester aufgebaut und geben nichts weiter an als den Siedepunkt zu 155,5°.

Der aus dem erst beschriebenen Glycol erhältliche Aldehyd wurde in genügender Menge hergestellt, um nicht nur die physikalischen, sondern auch die chemischen Eigenschaften etwas genauer studieren zu können.

Der Siedepunkt des Aldehyds ist nicht ganz leicht genau zu bestimmen, weil das Präparat die von den genannten Autoren gar nicht erwähnte Eigenschaft besitzt, sich sehr schnell zu höher siedenden Produkten zu polymerisieren, welche den Siedepunkt durch ihre Gegenwart natürlich beeinflussen. Ein aus dem Semicarbazon mit Hilfe von Oxalsäure frisch regeneriertes Präparat zeigte:

Siedepunkt 161–163°, $d = 0,9263$, $n_D = 1,4495$ bei 19°,

$M = 32,46$ (berechnet für $C_7H_{12}O = 32,41$).

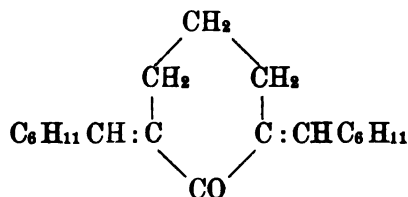
Der Aldehyd riecht ausgesprochen nach Bittermandeln, daneben aber etwas scharf und nicht angenehm.

Leitet man in eine ätherische Lösung des Aldehyds Ammoniak, so krystallisiert nach einiger Zeit eine Ammoniakverbindung in durchsichtigen Prismen aus, die bei 103–105° unter Gasentwicklung sich zersetzt.

Die Kondensationsfähigkeit der hydrierten Verbindung ist ebenso groß wie die des Benzaldehyds.

1 Mol. Hexanon wurden mit 2 Mol. Hexahydrobenzal-

dehyd vermischt, etwas Alkohol und einige Tropfen Natronlauge hinzugefügt. Schon nach wenigen Stunden hat Kondensation stattgefunden und das Kondensationsprodukt scheidet sich freiwillig oder nach Zusatz von etwas Wasser in feinen Nadeln aus, die sich aus verdünntem Methylalkohol gut umkrystallisieren lassen. Der interessanten bei 89—90° schmelzenden Verbindung kommt gemäß der Analyse die Formel



zu. Bemerkenswert ist, daß sie fast ganz farblos ist, während das analoge Kondensationsprodukt von Benzaldehyd mit Hexanon eine intensiv gelbe Farbe besitzt. Für das Hervorrufen der Färbung ist also nicht allein die Nachbarschaft zweier Aethylenbindungen zum Carbonyl ausreichend, sondern es spielt dabei auch die Konstitution des Benzolkerns eine entscheidende Rolle [vergl. Nachr. d. G. d. W. 1896, 304].

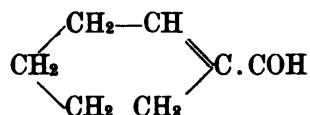
Auch mit Phenylhydrazin kondensiert sich Hexahydrobenzaldehyd momentan unter Wasserabscheidung und starker Erwärmung. Aus der mit verdünnter Essigsäure versetzten Flüssigkeit schieden sich nach einiger Zeit durchsichtige, rötlich gefärbte Prismen von niederem Schmelzpunkt ab, die sich aus verdünntem Methylalkohol umkrystallisieren ließen, an der Luft aber schnell verschmierten.

Das Semicarbazon des Aldehyds $\text{C}_6\text{H}_{11}\text{CH} : \text{NNHCO NH}_2$ schmilzt bei 167—168°. Es ist in Alkohol sehr löslich und löst sich auch in Wasser erheblich auf, worauf bei seiner Gewinnung zu achten ist. Man krystallisiert die Verbindung am besten aus kochendem Wasser, höchstens unter Zusatz weniger Tropfen Alkohol, um.

Besonders charakteristisch ist das Verhalten des ganz hydrierten Aldehyds gegen verdünnte Schwefelsäure. Mit dieser in Berührung verwandelt er sich bald in ein Haufwerk von farblosen Krystallnadeln, die sehr schwer löslich in Alkohol, etwas leichter löslich in Aether sind und bei 202—203° schmelzen. Momentan tritt dieselbe Reaktion ein, wenn man den Aldehyd mit konzentrierter Salzsäure schüttelt.

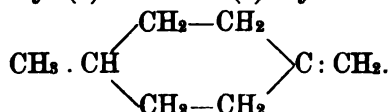
Das Nitrosochlorid des Methencyclohexans bildet sich leicht. Bei der Umsetzung mit Piperidin entsteht daraus ein

Nitrolamin, $C_7H_{12}NONC_5H_{10}$, das durch große Krystallisationsfähigkeit ausgezeichnet ist und bei 127° schmilzt. Durch Chlorwasserstoffabspaltung erhält man aus dem Nitrosochlorid das Oxim des Aldehyds



der in Form des in Wasser schwer löslichen Semicarbazons isoliert wurde. Diese Verbindung schmilzt bei $212-213^\circ$.

Methyl(1)-Methen(4)-cyklohexan.



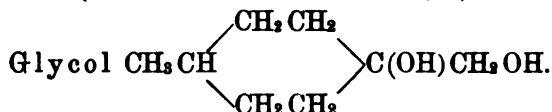
Diesen Kohlenwasserstoff habe ich unter Mitwirkung von Herrn Edgar Evans aus der Methyl(1)-hexenessäure(4) hergestellt. Die noch nicht beschriebene Säure siedet unter 14mm bei $137-145^\circ$ und erstarrt sehr leicht. Der Schmelzpunkt liegt bei $42-43^\circ$.

Beim Destillieren spaltet die Säure Kohlendioxyd ab und liefert glatt den Kohlenwasserstoff C_8H_{14} von folgenden Eigenschaften.

Siedepunkt $122-123^\circ$ (ein kleiner Teil — 131°),

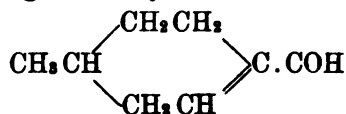
$d = 0,7955$, $n_D = 1,4465$ bei 20° , $M = 36,91$

(berechnet für $C_8H_{14} = 36,43$).

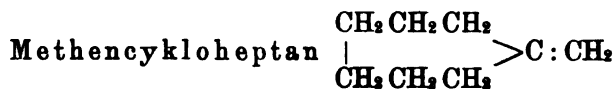


Diese Verbindung krystallisiert sehr schön und schmilzt bei $87-88^\circ$. Mit verdünnten Säuren erwärmt gab sie den zugehörigen Hexahydro-p-Tolylaldehyd, dessen Semicarbazon nach dem Umkrystallisieren aus heißem Wasser bei $154-156^\circ$ schmolz.

Das Nitrosochlorid des Methyl(1)-Methen(4)-cyklohexans bildet sich leicht. Durch Austausch des Chlors gegen Piperidin entsteht das Nitrolamin $C_8H_{14}NONC_5H_{10}$ vom Schmelzpunkt $136-137^\circ$. Durch Abspaltung von HCl entsteht aus dem Nitrosochlorid der ungesättigte Aldehyd

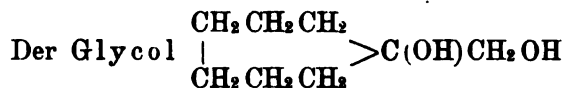


dessen Semicarbazon bei $192-194^\circ$ schmilzt.

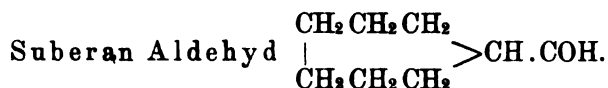


Der Kohlenwasserstoff siedet bei 138—140°.

$d = 0,824$, $n_D = 1,4611$ bei 20°.

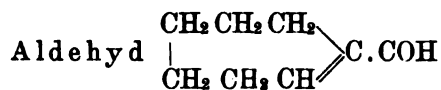


schmilzt bei 50—51° und siedet unter 16 mm bei etwa 135—140°. Beim Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure entsteht neben hochsiedenden mit Wasserdämpfen kaum flüchtigen Kondensationsprodukten der



Derselbe wurde durch das bei 153—154° schmelzende Semicarbazon charakterisiert und dadurch, daß er durch Oxydation in die bereits bekannte Suberancarbonsäure übergeführt wurde, deren Silbersalz zur Analyse kam.

Das Nitrosochlorid des Methencykloheptans bildet sich in mäßiger Ausbeute (32% der Theorie) und gibt bei der Chlorwasserstoffabspaltung ein flüssiges Oxim, welches sich mit verdünnter Schwefelsäure hydrolytisch zu dem



aufspaltet. Schmelzpunkt des Semicarbazons 203—204°. Bei der Oxydation mit Silberoxyd lieferte der Aldehyd bei 50—51° schmelzende Suberencarbonsäure.

Bei diesen Untersuchungen bin ich durch Herrn Dr. H. Köhler eifrig unterstützt worden.

Zur Theorie der Wirbelringe.

Von

Julius Weingarten, Corresp. (Freiburg i. B.).

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Februar 1906.

Seit dem Erscheinen der berühmten Arbeiten von Helmholtz und William Thomson über die Wirbelbewegung, ist ins Besondere die Theorie der Bewegung dünner kreisförmiger Wirbelringe durch hervorragende englische Geometer bereichert und vervollkommen worden. Es scheint aber, daß dem Verhalten des hydrodynamischen Drucks in solchen Ringen und ihrer Umgebung nicht die gleiche Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, wie dem Zustande ihrer Bewegung. Anderenfalls würde es hervorgehoben sein, daß der Druck in einem Helmholtz'schen Wirbelring und in seiner Umgebung jeden negativen Werth überschreiten muß und hiernach einen unendlich großen Zug darstellt. Vor der Bildung eines solchen Ringes in einer tropfbaren Flüssigkeit würde daher durch Zerreißen eine Lösung des Zusammenhanges der Flüssigkeit eintreten und die, den Zusammenhang voraussetzende, Gültigkeit der Eulerschen Gleichungen für den unendlichen Raum nicht weiter bestehen.

In der nachstehenden, diesem Gegenstand gewidmeten Note wollen wir uns den Bezeichnungen anschließen, welche Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mechanik ¹⁾ benutzt hat, in welchen er die Helmholtz'schen Entwicklungen mit einigen Modifikationen wiedergibt.

Kirchhoff betrachtet Bewegungen einer incompressiblen Flüssig-

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. 20te Vorlesung §§ 5 u. 6.

keit, welche symmetrisch gegen eine feste Axe stattfinden. Bei solcher Bewegung beschreiben die Theilchen der Flüssigkeit Bahnen in Ebenen, welche diese Axe enthalten, und geschieht die Bewegung in jeder Ebene auf gleiche Weise. Es bezeichne ϱ den Abstand eines Theilchens von der festen Axe, z die Abscisse desselben Theilchens in Beziehung auf diese Axe, von einem gegebenen Punkte derselben gezählt. Ferner seien durch s und w die Componenten der Geschwindigkeit dieses Theilchens nach den Richtungen der wachsenden ϱ und z angegeben. Alsdann wird die Rotationsgeschwindigkeit σ desselben, welche um eine zur Ebene der ϱ, z senkrechte Axe statt hat, durch die Gleichung:

$$1. \quad 2\sigma = \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \varrho}$$

bestimmt sein.

Bei der Betrachtung der vorausgesetzten symmetrischen Bewegung sind die drei Eulerschen Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit auf zwei reducirbar, welchen noch die Bedingung der Incompressibilität hinzuzufügen ist.

Wird der, in einem gegebenen Punkt (ϱ, z) der Flüssigkeit zur Zeit t vorhandene Druck durch p , die constante Dichtigkeit durch τ bezeichnet so verwandeln sich die Eulerschen Gleichungen in die nachstehenden:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial \varrho} + w \frac{\partial s}{\partial z} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial \varrho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + s \frac{\partial w}{\partial \varrho} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varrho s}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0$$

falls die Einwirkung äußerer Kräfte auf die Flüssigkeit ausgeschlossen bleibt. In ihnen erscheint der Druck nur in den Differentialquotienten nach den räumlichen Coordinaten. Jede diesen Gleichungen genügende Function p kann daher um eine für sämtliche Flüssigkeitstheilchen in jedem Augenblick gleiche, sonst willkürliche, Größe vermehrt gedacht werden. Unbeschadet der Allgemeinheit wird daher in den folgenden Entwicklungen, die mit Kirchhoff voraussetzen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruhe, der Druck im Unendlichen als Null angenommen werden. Alsdann ist sein Werth in jedem Punkt des Raums bestimmt.

Mit Hilfe der Gleichung 1 verwandeln sich die zwei ersten

der obigen Gleichungen in die folgenden:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + 2\sigma w = - \frac{\partial \left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) \right]}{\partial \rho}$$

I.

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 2\sigma s = - \frac{\partial \left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) \right]}{\partial s}$$

aus denen nach Elimination von p , mit Hilfe der Continuitätsgleichung sich ergibt:

$$\frac{d\sigma}{dt} - \frac{\sigma s}{\rho} = \frac{d\sigma}{dt} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

in welcher Gleichung die Totaldifferentialle sich auf die Veränderung an einem und demselben Theilchen während der Zeit dt beziehen. Für das nämliche Theilchen bleibt daher der Quotient

$$\frac{\sigma}{\rho} = C$$

während der ganzen Zeitdauer der Bewegung von demselben Werth.

Wir werden in der Folge annehmen, daß in einem ganz im Endlichen befindlichen und durch eine geschlossene Curve vollständig begrenzten Gebiete der (ρ, z) Ebene zu irgend einer Zeit allen in ihm bewegten Flüssigkeitstheilchen die Rotationsgeschwindigkeit

$$\text{II.} \quad \sigma = A \cdot \rho$$

inne wohne, unter A eine für diese Theilchen gemeinsame constante Zahl verstanden, und daß für alle außerhalb dieses Gebiets befindlichen Theilchen die Rotationsgeschwindigkeit σ gleich Null sei.

Alsdann wird zu jeder Zeit, gemäß den Helmholtz'schen Sätzen, in dem bewegten Gebiet der rotirenden Theilchen der Werth von σ durch $A\rho$ gegeben sein, außerhalb desselben aber Null bleiben. Im Raum bewegt sich alsdann ein Ring von endlichen Querdimensionen, erfüllt mit rotirenden Flüssigkeitstheilchen, dessen Schnitt durch eine die Z -Axe enthaltende Ebene das eben bestimmte bewegte Gebiet rotirender Theilchen darstellt. Außerhalb des Ringes ist die Bewegung wirbelfrei.

Aus der Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho w}{\partial s} = 0$$

ergibt sich die Folgerung:

$$\text{III.} \quad s\varrho = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad w\varrho = \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}.$$

Die Function Φ , welche hiernach die Bestimmung der Geschwindigkeiten s und w durch Differentiation herbeiführt, wird von den englischen Autoren als „Stromfunction“ bezeichnet. Sie ist für den vorliegenden Fall von Helmholtz gegeben worden.

Führt man in die Gleichungen I den durch II festgesetzten Werth von σ , und die vorstehenden Werthe von $s\varrho$ und $w\varrho$ ein, so verwandeln sich diese Gleichungen in die zwei nachstehenden, getrennt zu haltenden Gruppen:

a) Für alle Punkte des Raums, welche in dem bewegten nicht rotationsfreien Gebiet liegen:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial\left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) + 2A\Phi\right]}{\partial\varrho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial\left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) + 2A\Phi\right]}{\partial s},$$

b) für alle im rotationsfreien Gebiet befindlichen Punkte:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial\left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2)\right]}{\partial\varrho}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial\left[\frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2)\right]}{\partial s}.$$

Wir wollen nunmehr durch $\vartheta = \vartheta(\varrho, s, t)$ eine Function der Argumente ϱ, s und t bezeichnen, welche im Gebiete der rotirenden Theilchen durch die Gleichung:

$$\vartheta = \frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) + 2A\Phi$$

im Gebiete der rotationsfreien Theilchen durch:

$$\vartheta = \frac{p}{\tau} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2)$$

definiert wird. Dann ergibt sich aus der nach der Zeit abgeleiteten

Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

daß die Function ϑ für jeden Punkt der Ebene ϱ, z der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

Genüge leistet. Diese Gleichung ist aber, wenn man in der Function ϑ die Variable ϱ durch die Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + y^2}$ ersetzt denkt, keine andere als die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0.$$

Es ist daher ϑ eine Potentialfunction. Sie nimmt nach den eingeführten Voraussetzungen in unendlicher Entfernung \mathfrak{R} vom Anfangspunkt der Coordinaten den Werth Null an. Nach den Helmholtz-Kirchhoffschen Grundformeln für die in Rede stehenden Bewegungen bleiben die mit \mathfrak{R}^2 multiplicirten ersten Ableitungen der Function ϑ im Unendlichen endlich.

Ferner springt der Werth der Function ϑ beim Durchgange durch die Grenze des rotationsfreien Gebiets in das Innere des Gebiets der rotirenden Theilchen um die Größe $2A\overline{\Phi}$, unter $\overline{\Phi}$ den Werth der Stromfunction Φ in dieser Grenze verstanden. Zur vollständigen Bestimmung der Function ϑ bleibt daher nur noch die Kenntniß des Sprunges des Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{dn}$

in Beziehung auf die nach dem Inneren des begrenzten Gebietes gerichtete Normale an der Begrenzung selbst zu ermitteln, da nur an dieser Begrenzung eine Unstetigkeit dieser Function und ihrer Differentialquotienten auftreten kann.

Wir behaupten nun, daß $\frac{d\vartheta}{dn}$ beim Durchgange durch diese Grenze keinen Sprung erleidet. Bezeichnen wir zunächst die Werthe, welche eine Function $\Psi(\varrho, z, t)$ an dem inneren Ufer der gedachten Begrenzung annimmt durch Ψ_i , diejenigen derselben Function am äußeren Ufer durch Ψ_a , und weiter, der Kürze wegen, durch $\Delta\Psi$ die Differenz $\Psi_i - \Psi_a$. Die Functionen s und w welche die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes der Flüssigkeit

darstellen, sind in der ganzen Ebene φ, z stetig, ihre Differentialquotienten dagegen springen beim Durchgange durch die gegebene Grenze. Es gelten daher längs dieser Grenze die Gleichungen

$$s_i - s_a = 0, \quad w_i - w_a = 0$$

zu jeder Zeit, daher auch die folgenden:

$$\frac{ds_i}{dt} - \frac{ds_a}{dt} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} - \frac{dw_a}{dt} = 0.$$

Die letzten beiden Gleichungen nehmen nach Ausführung der Totaldifferentiation die Gestalt an:

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} + s \Delta \frac{\partial s}{\partial \varphi} + w \Delta \frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

IV.

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial t} + s \Delta \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \Delta \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Für die Sprünge der Differentialquotienten der stetigen Functionen s und w beim Durchgange durch die Begrenzung bestehen bekanntlich die Relationen:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial s}{\partial \varphi} &= \Delta \frac{ds}{dn} \cos \alpha & \Delta \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \Delta \frac{dw}{dn} \cos \alpha \\ \Delta \frac{\partial s}{\partial z} &= \Delta \frac{ds}{dn} \cos \beta & \Delta \frac{\partial w}{\partial z} &= \Delta \frac{dw}{dn} \cos \beta, \end{aligned}$$

in denen $\frac{ds}{dn}, \frac{dw}{dn}$ die Differentialquotienten nach der in das Innere der Begrenzung gerichtete Normale, $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ die cosinus der Richtung derselben mit den Richtungen der wachsenden φ und z bezeichnen.

Die Einführung der Werthe dieser Sprünge in die Gleichung IV ergibt:

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = -[s \cos \alpha + w \cos \beta] \Delta \frac{ds}{dn}$$

V.

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial t} = -[s \cos \alpha + w \cos \beta] \Delta \frac{dw}{dn}.$$

Wenn man schließlich die Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{s}{\varphi} = 0,$$

die in jedem Punkte der Ebene φ, z erfüllt ist, für einen Punkt

des inneren Ufers der Begrenzung, alsdann für denselben Punkt des äußeren Ufers aufstellt, und die Differenz der Resultate bildet, so findet man:

$$A \frac{\partial s}{\partial \rho} + A \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = A \frac{ds}{dn} \cos \alpha + A \frac{dw}{dn} \cos \beta,$$

mit Hilfe welcher Gleichung man aus V schließt:

$$A \frac{\partial s}{\partial t} \cos \alpha + A \frac{\partial w}{\partial t} \cos \beta = A \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \cos \alpha + A \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cos \beta = 0$$

d. h.

$$A \frac{d\vartheta}{dn} = 0.$$

Diese Gleichung beweist, daß $\frac{d\vartheta}{dn}$ beim Durchgange durch die Begrenzung stetig bleibt.

In Folge bekannter Sätze der Theorie der Potentialfunctionen ist daher die Function ϑ das Potential einer Doppelbelegung, welche über die Oberfläche des durch die rotirenden Flüssigkeitstheilchen gebildeten Ringes ausgebreitet ist und deren Dichtigkeit durch die Größe $2A\overline{\Phi}$ getheilt durch 4π bestimmt wird. Bezeichnet nunmehr r die Entfernung eines Punctes (x, y, z) im Raume von dem Flächenelemente dq der Ringoberfläche, so wird in bekannter Bezeichnungsweise ϑ durch die Gleichung

$$\vartheta = \frac{A}{2\pi} \int \overline{\Phi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dq$$

gegeben sein, in welcher die Differentiation nach der gegen das Innere des Ringes gerichteten Normale zu vollziehen ist.

Hiernach ist der Druck p für jeden Punkt der Flüssigkeit mit Hilfe der Stromfunction Φ bestimmt, und zwar für einen Punkt im Inneren des Wirbelrings durch die Gleichung:

$$\text{VI} \quad p = \frac{A}{2\pi} \int \overline{\Phi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dq - 2A\Phi - \frac{1}{2}(s^2 + w^2)$$

dagegen für einen Punkt außerhalb dieses Ringes:

$$\text{VII} \quad p = \frac{A}{2\pi} \int \overline{\Phi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dq - \frac{1}{2}(s^2 + w^2).$$

Was den Werth der durch Helmholtz gefundenen Stromfunction

Φ selbst betrifft, so ermittelt sich derselbe nach folgender Vorschrift. Wird durch R das bestimmte Integral

$$R(s' - z, \varrho', \varrho) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{(s' - z)^2 + \varrho'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos \varphi}}$$

bezeichnet, und setzt man das mit den Werthen von R gebildete Integral

$$\text{VIII.} \quad \frac{1}{2\pi} \int \sigma' \varrho' R(s' - z, \varrho', \varrho) \, df = S$$

in welchem Integrale die Integration über alle Flächenelemente df der begrenzten, die rotirenden Flüssigkeitstheilchen (ϱ', s') enthaltenden, Fläche ausgedehnt werden soll, so wird die Stromfunction Φ durch die Gleichung

$$\Phi = \varrho \cdot S$$

gegeben. Die Componenten s, w der Geschwindigkeit eines Theilchens (ϱ, z) und die Rotationsgeschwindigkeit desselben ermitteln sich alsdann vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned} s\varrho &= -\frac{\partial \varrho S}{\partial z} & w\varrho &= \frac{\partial \varrho S}{\partial \varrho} \\ -2\sigma &= \frac{\partial \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho S}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho S}{\partial z}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Function R genügt, wie leicht zu zeigen, für alle Werthe der Variablen ϱ und z mit alleiniger Ausnahme der Werthe $\varrho = \varrho', z = s'$, für welche diese Function Unendlich wird, der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho R}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho R}{\partial z}}{\partial z}.$$

Würde man für die Stromfunction Φ das Product ϱR oder ein constantes Multiplum dieser Größe annehmen, d. h. das Integral S durch ein einzelnes seiner Elemente ersetzen, so würde wie aus der vorstehenden Gleichung hervorgeht, die durch solche Stromfunction dargestellte Bewegung im ganzen Raum wirbelfrei sein, d. h. kein noch so kleiner Raumtheil angegeben werden können, in welchem eine Wirbelbewegung statt hat. Diese Annahme würde daher mit dem Vorhandensein eines, wenn auch noch so dünnen, Wirbelringes nicht vereinbar sein. Sie ist folglich, auch für eine angenäherte Rechnung auszuschließen.

Die Function $R(z' - z, \varphi', \varphi)$ läßt sich auffassen, als das Potential einer mit der Dichtigkeit $\varphi'^{-1} \cos \varphi$ belegten Kreislinie $z = z', \varphi = \varphi'$ für einen Punkt (φ, z) in derjenigen die Z -Axe enthaltenden Ebene, für welche der Winkel φ gleich Null gezählt wird.

Nach einem bekannten Satze von Riemann¹⁾ erlaubt alsdann die Function R in der Umgebung des Punktes (φ', z') die Darstellung durch die Gleichung:

$$\text{IX.} \quad R(z - z', \varphi, \varphi') = \frac{2}{\varphi'} \log \frac{1}{r} + 2g$$

wenn $r = \sqrt{(z - z')^2 + (\varphi - \varphi')^2}$ und g eine Function der Argumente φ, z, φ', z' bezeichnet, welche auch für $\varphi = \varphi'$ und $z = z'$ endlich und stetig bleibt.

Das Gebiet der rotirenden Flüssigkeitstheilchen wollen wir von jetzt an im Zeitmoment t , durch einen Kreis vom Radius c , dessen Mittelpunktscoordinaten $\varphi = a, z = b$ seien, begrenzt denken, und voraussetzen, daß c eine gegen a kleine Zahl sei, die schließlich unter jede Grenze sinken soll. Ferner werden wir die Kirchhoff'sche Voraussetzung annehmen, nach welcher die Rotationsgeschwindigkeit σ der rotirenden Theilchen so groß gewählt werden soll, daß das, von der Zeit unabhängige, Integral

$$m = \int \sigma' df,$$

welches über alle Elemente df der Kreisfläche zu erstrecken ist, für jedes noch so klein gewählte c einen endlichen Werth erhalte. Diese Voraussetzung erfordert, gemäß der Annahme, die wir über den Werth von σ für jedes φ, z, t gemacht haben, die Erfüllung der Bedingung:

$$m = A \int \varphi' df = A a c^2 \pi,$$

und ergibt für A den Werth:

$$A = \frac{m}{a c^2 \pi}.$$

Hiernach folgt aus Gleichung VIII. der Werth der Function S durch die Bestimmung:

$$S = \frac{m}{2 a c^2 \pi^2} \int \varphi' \cdot \varphi' R(z - z', \varphi, \varphi') df$$

für welche die Integration über alle Flächenelemente df der Kreis-

1) Riemann-Hattendorf: Schwere, Electricität und Magnetismus. Abschn. I. § 17.

fläche zu erstrecken ist. Mit Hilfe von IX. ergibt sich für Punkte z, ϱ im Inneren dieser Fläche die andere Darstellung:

$$S = \frac{m}{ac^2\pi^2} \int \varrho'(-\log r + g) df.$$

Bemerkt man noch, daß für solche Punkte stets die Gleichung

$$\varrho' = a + \varepsilon c$$

gilt, in welcher ε eine Zahl bezeichnet, deren Absolutwerth kleiner als Eins ist, so wird die Function S auch in der Gestalt:

$$S = \frac{m}{a\pi} \left\{ \frac{-a \int \log r df}{c^2\pi} + \frac{c \int \varepsilon \log r df}{c^2\pi} + \frac{\int g' df}{c^2\pi} \right\}$$

dargestellt werden können, unter g' eine Function verstanden, die im ganzen Inneren des Kreises für jeden Werth von c endliche Werthe besitzt.

Das Integral im ersten Summanden dieses Ausdrucks ist das logarithmische Potential eines mit der Flächendichtigkeit Eins belegten Vollkreises vom Radius c auf einen inneren Punkt (ϱ, z) , also durch die Gleichung:

$$\int \log r df = \pi c^2 \left(\log c + \frac{1}{2} \frac{(\varrho - a)^2 + (z - b)^2 - c^2}{c^2} \right)$$

gegeben. Das zweite Integral hat, den Werthen von ε gemäß, einen kleineren Absolutwerth als dieses Potential. Daher ist der Quotient, der sich aus ihm durch Division mit $c^2\pi$ ergibt nach Multiplication mit c eine GröÙe, welche mit c verschwindet. Die Division des dritten Integrals durch $c^2\pi$ ergibt für jedes c einen endlichen Quotienten.

Es ist daher im Inneren des Kreisgebiets die Function S in der nachstehenden Form darstellbar:

$$S = \frac{m}{\pi} \left\{ \log \frac{a}{c} + \frac{1}{2} \frac{c^2 - (\varrho - a)^2 - (z - b)^2}{c^2} + h \right\}$$

in welcher Gleichung h eine für noch so kleine Werthe von c mit ihren ersten Differentialquotienten endlich bleibende Function der GröÙen ϱ, z, a, b, c darstellt.

Hiernach ist die Stromfunction Φ für alle Punkte des Kreisinneren durch die Gleichung:

$$\text{X.} \quad \Phi = \varrho S = \frac{m\varrho}{\pi} \left\{ \log \frac{a}{c} + \frac{1}{2} \frac{c^2 - (\varrho - a)^2 - (z - b)^2}{c^2} + h \right\}$$

gegeben, und ermitteln sich aus ihr die Geschwindigkeiten s und

w durch die nachstehenden Formeln:

$$s = -\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{m}{\pi} \left(\frac{s-b}{c^3} - \frac{\partial h}{\partial s} \right)$$

$$w = \frac{\partial S}{\partial \varrho} + \frac{S}{\varrho} = \frac{m}{\pi} \left(-\frac{\varrho-a}{c^3} + \frac{\partial h}{\partial \varrho} \right) + \frac{S}{\varrho}.$$

Für einen Ring von unendlich kleinem Querschnitt ist c unendlich klein zu wählen. Vernachlässigt man, bei Voraussetzung dieser Wahl, endlich bleibende Werthe gegen ins Unendliche wachsende, so ergeben die vorstehenden Gleichungen:

$$s = \frac{m}{c^3 \pi} (s-b), \quad w = -\frac{m}{c^3 \pi} (\varrho-a) + \frac{m}{a\pi} \log \frac{a}{c}$$

als Bestimmung der Geschwindigkeitscomponenten im Innern des Wirbelrings, und hiernach für die Geschwindigkeit des Kreismittelpunkts

$$s^* = \frac{da}{dt} = 0, \quad w^* = \frac{db}{dt} = \frac{m}{a\pi} \log \left(\frac{a}{c} \right)^1.$$

In Folge dieser Bestimmungen besteht die fernere Gleichung:

$$s(\varrho-a) + \left(w - \frac{db}{dt} \right) (s-b) = 0$$

d. h. die folgende:

$$\frac{d((\varrho-a)^2 + (s-b)^2)}{dt} = 0,$$

welche aussagt, daß während der weiteren Bewegung der Abstand eines im Kreisinneren befindlichen Theilchens vom Mittelpunkt des Kreises unverändert bleibt. Daher ändert sich die einmal vorhandne Kreisform des rotirenden Gebiets nicht. Die Theilchen

1) Die englischen Autoren geben für die Geschwindigkeit ω^* die Hälfte des hier angegebenen Werths, was uns unrichtig erscheint.

Ist als Ringquerschnitt in einem gegebenen Augenblick eine Ellipse mit den unendlich kleinen Halbachsen p und q gegeben, so ergeben sich die Geschwindigkeitscomponenten ihres Mittelpunktes (a, b) als:

$$s^* = \frac{da}{dt} = 0, \quad \omega^* = \frac{db}{dt} = \frac{m}{a\pi} \log \frac{2a}{p+q}.$$

Im Verlaufe der weiteren Bewegung behält dieser Querschnitt die nämliche elliptische Form. Die Ellipse selbst aber rotirt (scheinbar) mit der Winkelgeschwindigkeit: $-2m\pi^{-1}(p+q)^{-2}$ um den gleichförmig fortschreitenden Mittelpunkt (a, b) . Die in dem Querschnitt enthaltenen Theilchen, deren Rotationsgeschwindigkeit $m(\pi pq)^{-1}$ beträgt, bewegen sich in ihm relativ gegen einander.

dieses Gebiets schreiten mit der Geschwindigkeit $\frac{db}{dt}$ parallel der Z -Axe fort, und rotiren gleichzeitig um den fortschreitenden Mittelpunkt mit der Rotationsgeschwindigkeit $\frac{m}{c^2 \pi}$.

Die bisher erlangten Resultate scheinen mit den Ergebnissen des Theils der Helmholtz-Kirchhoffschen Entwicklungen, der sich auf die Bewegung der Gesammtheit des Ringes bezieht, im Einklang zu stehen.

Allein die Bestimmung der Größe des Drucks, welcher im Wirbelringe selbst und in seiner Umgebung statthaben muß, führt zu Bedenken gegen die Möglichkeit des Eintretens solcher Bewegung in einer incompressiblen Flüssigkeit.

Nach Gleichung VII. ist der Druck p in einem außerhalb des Wirbelringes befindlichen Theilchen durch die Gleichung

$$p = \frac{m}{2ac^2\pi^2} \int \bar{\Phi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dq - \frac{1}{2}(s^2 + w^2)$$

bestimmt.

Die Gleichung X ergiebt für $\bar{\Phi}$, falls man noch $\bar{\varrho} = a + c \cos \theta$ setzt, den Werth:

$$\bar{\Phi} = \frac{m}{\pi} (a + c \cos \theta) \left[\log \frac{a}{c} + \bar{h} \right],$$

woraus, nach Weglassung einer für alle Punkte der Ringoberfläche constanten, also auf die Druckbestimmung einflußlosen Größe, sich ergiebt

$$\bar{\Phi} = \frac{m}{\pi} \bar{k}$$

in welcher Gleichung k eine mit verschwindendem c endlich bleibende Größe bezeichnet.

Berücksichtigt man noch, daß die Oberflächenelemente dq der Ringfläche dem Radius c proportional abnehmen, und führt statt ihrer die Oberflächenelemente dq' des Parallelrings mit dem Querschnittsradius Eins in die Rechnung ein, so erhält man zur Bestimmung des Drucks p in einem außerhalb des Ringes liegenden Punkt die Gleichung:

$$p = \frac{1}{c} \cdot \frac{m^2}{2a\pi^2} \int \bar{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dq' - \frac{1}{2}(s^2 + w^2),$$

in welcher sich die Integration auf die Oberfläche des Parallelrings bezieht. Das erste Glied dieses Ausdrucks ist von der Ordnung c^{-1} , das zweite für Punkte in der Nähe der Oberfläche des Wirbelrings oder an ihr selbst von der Ordnung c^{-2} . Man kann daher c stets so klein wählen, daß der dort bestimmte Druck jeden negativen Werth überschreitet. Bei unendlich dünnen Ringen würde daher der Druck in ihrem Inneren oder an ihrer Oberfläche einen unendlich hohen Zug darstellen. In tropfbaren Flüssigkeiten würde hiernach die Bildung eines solchen Ringes nicht eintreten können.

Durch Hinzufügung eines für alle Flüssigkeitselemente gleichen positiven Druckes würde das erreichte Resultat nicht abgeändert werden können, wenn man diesen Druck nicht unendlich groß wählen wollte. Jedoch die Vorstellung, daß die zu betrachtende Flüssigkeit in eine Kugel von unendlichem Radius eingeschlossen sei, deren Wandung einen unendlich hohen Druck auf die Flüssigkeit ausübte, würde das Eintreten der betreffenden Bewegung nicht plausibler erscheinen lassen.

Mitteilungen über die Wirkung von Lichtstrahlen auf lebende Zellen.

Von

Professor E. Hertel in Jena.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1906 von M. Verworn.

Im Folgenden möchte ich kurz die Resultate besprechen, die sich aus meinen Arbeiten an der zoologischen Station zu Neapel während des Frühjahrs 1905 ergeben haben. Der mehrwöchentliche Aufenthalt an der Station wurde mir durch die Munificenz der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und der Gräfin Bose-Stiftung zu Jena ermöglicht. Einen Arbeitsplatz an der Station verdankte ich dem Entgegenkommen des Königlich-Sächsischen Unterrichtsministeriums. An der Station erfreute ich mich eines außerordentlich weitgehenden Entgegenkommens hinsichtlich der zu meinen Experimenten notwendigen Installationen. Herr Geheimrat Dohrn und seine Mitarbeiter, namentlich die Herren Henze, Burian und Lo Bianco, haben stets mit größtem Wohlwollen meine Arbeiten gefördert. Für alle diese Unterstützungen möchte ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Die Fragen, die ich experimentell zu behandeln vorhatte, schlossen sich an Beobachtungen bei früheren Experimenten an, durch die sie aber aus Mangel an geeigneten Objekten nicht zur gewünschten Klarheit hatten durchgeführt werden können.

Zuerst beschäftigte mich die Untersuchung der Frage:

Hat das Licht Einfluß auf den Zellteilungsprozeß?

Ich wurde hierzu veranlaßt durch die Beobachtung, daß an bestrahlten Kaninchenhornhäuten sich eine Proliferation der Gewebszellen feststellen ließ, speziell eine Vermehrung der Mitosen. Es war ja nun wohl denkbar, daß durch die Zuführung strahlender Energie aus einem Wellenbereich, der hauptsächlich als Licht-

strahlen in Erscheinung tritt, ebenso die Kernteilung beeinflusst wird wie durch Strahlen aus einem Wellenbereich, der vorwiegend Wärme entfaltet.

Als Objekte benutzte ich zu meinen Untersuchungen künstlich befruchtete Seeigeleier. Diese wurden zunächst mit spektral zerlegtem Licht aus verschiedenen, aber genau ausgemessenen Wellenlängengebieten bestrahlt; die jeweilig verwendete Intensität der Strahlung wurde dabei durch thermoelektrische Messungen bestimmt, sodaß die zur Beobachtung kommenden Wirkungen der Bestrahlung nicht durch Intensitätsdifferenzen der angewendeten Strahlenggebiete in unbeabsichtigter Weise beeinflusst werden konnten. Die Bestrahlung wurde unter gleichzeitiger Beobachtung der Eier mit dem Mikroskop vorgenommen, um sogleich alle Veränderungen registrieren zu können. Ueber genauere Einzelheiten der Versuchsanordnung, sowie über die verwendeten Intensitäten und ihre Feststellung verweise ich auf meine früheren ausführlichen Mitteilungen in der Zeitschrift für allgemeine Physiologie Bd. 4, 5, 6.

Durch Einwirkung von unsichtbaren ultravioletten Strahlen (280μ aus dem Magnesiumfunkenspektrum) wurde auch bei ganz geringer Intensität und kurzer Einwirkung (1 Min.) eine deutliche Störung des Zellteilungsprozesses erzielt, gleichgültig, in welchem Stadium die Eizellen der Bestrahlung ausgesetzt wurden. Waren die Eier noch ungeteilt, so trat zum mindesten eine Verspätung der zu erwartenden Furchungsphase ein, die bei geringer Verstärkung der Intensität oder bei längerer Dauer der Einwirkung sich sehr schnell mit einer unvollkommenen Ausbildung der durch die Teilung neu entstandenen Zellen vergesellschaftete. Durch weitere Verstärkung der Intensität gelang es leicht, die Teilung überhaupt zu unterdrücken, ja, die Zellen abzutöten und zu zerstören.

Wurde die Bestrahlung erst im Zweizellenstadium vorgenommen, so war, sofern beide Zellen im Strahlenbezirk lagen, dieselbe Art der Behinderung zu sehen, wie bei den noch nicht gefurchten Eiern. Lagen die zweizelligen Eier aber nur partiell im Strahlenbezirk, so war die Strahlenwirkung verschieden, je nachdem wie die Strahlengrenze zu den beiden Zellen verlief. Lagen sie beide zum Teil in der Strahlenzone, dann wurde eine Behinderung der weiteren Furchung beobachtet, selbst wenn die Bestrahlung nur auf kleine Teile der Zellen beschränkt blieb. Lag nur eine Zelle in der Strahlenzone, so trat meist die Behinderung nur in dieser ein, die andere entwickelte sich gut weiter. Ließ ich die Strahlengrenze möglichst exakt mit der Grenze der beiden Zellen zusammen-

fallen, so gelang es bei geeigneten Intensitäten der Strahlen, die bestrahlte Zelle abzutöten, während die nicht bestrahlte sich weiter entwickelte. In ähnlicher Weise ließ sich auch das Vierzellenstadium der Eier in seiner Entwicklung beeinflussen.

Es bietet sich also nach meinen Versuchen in der Applikation von ultravioletten Strahlen Gelegenheit, auf einzelne Zellen von befruchteten und in Furchung begriffenen Eiern einen in seiner Intensität bequem abstufbaren Reiz zu setzen, ohne die anderen Zellen wesentlich zu tangieren. Dieser Reiz kann ohne weiteres so gesteigert werden, daß die bestrahlte Zelle abgetötet wird, während die anderen sich normal weiter zu entwickeln vermögen. Es dürfte diese Beobachtung für weitere entwicklungsmechanische Studien auch methodisch von Interesse sein.

Interessant war ferner, daß sich unter der Einwirkung der ultravioletten Strahlen eine schon aufgetretene Furchung wieder zurückbilden konnte. Meist starb die rückgebildete Zelle nach einiger Zeit ab, doch konnte ich Beobachtungen machen, die darauf hindeuteten, daß unter geeigneter Anordnung der Versuche sich auch eine weitere Entwicklung derartiger Zellen, die zuerst eine Rückbildung durchgemacht hatten, erzielen läßt.

Versuche mit sichtbarem Licht (blauen Strahlen von 440μ und gelben Strahlen von 558μ) ließen unzweifelhaft ebenfalls einen schädigenden Einfluß der Strahlen auf den Furchungsprozeß der Eizellen erkennen, doch waren die erzielten Abweichungen von der Norm trotz hoher Intensität der Strahlung relativ gering. Diese graduelle Differenz in der Wirkung der ultravioletten und sichtbaren Strahlen findet, wie ich schon früher betont habe, ihre Erklärung darin, daß die langwelligen sichtbaren Strahlen relativ weniger Wirkung entfalten, weil sie von den bestrahlten Organismen in geringerem Grade aufgenommen werden als die kurzwelligen unsichtbaren. Erhöhte ich künstlich die Aufnahmefähigkeit durch biologische Sensibilisation mit Eosin in einer Concentration von 1 : 5000, so erhielt ich auch stärkere Einwirkung der sichtbaren Strahlen auf den Teilungsprozeß (cf. Zeitsch. f. allg. Phys. Bd. 5, Heft I, S. 116; Heft IV, S. 557).

Schließlich stellte ich noch Versuche an mit unzerlegtem Sonnenlicht und diffusem Tageslicht. Es zeigte sich, daß das Sonnenlicht stets, und zwar je nach der Intensität der Strahlen, ziemlich schnell die Zellen abtötete. Das diffuse Tageslicht dagegen erwies sich als zu schwach, um eine deutliche Wirkung auf den Zellteilungsprozeß in Erscheinung treten zu lassen; erst nachdem ihm eine höhere Aufnahme in die Zellen durch Sensibilisation ge-

sichert war, sah ich auch durch Tageslicht den Teilungsprozeß der Eizellen beeinflußt werden, und zwar bestand auch hier eine deutliche Retardierung des Eintritts der einzelnen Furchungsphasen.

Ich kam daher auf Grund meiner Experimente zu dem Schluß, daß die Einwirkung der Lichtstrahlen für den Ablauf des Zellteilungsvorganges ungünstig ist, allerdings tritt dieser Einfluß auf die Teilung erst bei höherer Intensität des Lichtes hervor. Bei der Bemessung dieser Intensitätsgrenze fällt ins Gewicht, daß nach früheren Versuchen die physiologische Wirkung der einzelnen Spektralgebiete auf die Organismen eine verschieden starke ist wegen des nach der Wellenlänge verschieden großen Strahlungsaufnahmevermögens seitens der Organismen. Es ist deshalb auch unmöglich, einen allgemein gültigen Schwellenwert anzugeben, bei welchem die schädigende Wirkung des Lichtes auf den Teilungsprozeß eintritt.

In zweiter Linie beschäftigte ich mich mit Experimenten, welche weiteren Aufschluß bringen sollten über
Die Wirkung der Lichtstrahlen auf pigmentiertes Gewebe.

Ich hatte schon früher an Tritonlarven unter der Bestrahlung mit verschiedenen welligen Lichtstrahlen Veränderung der Chromatophoren konstatieren können und hoffte, durch geeignete Experimente an Cephalopoden diese Beobachtungen zu ergänzen und besser aufklären zu können. Ich benutzte zu meinen Untersuchungen Sepiola, Octopus, besonders aber Loligo vulgaris. Die Tiere wurden im Dunkelzimmer in geeigneter Weise Strahlen aus verschiedenen Spektralgebieten von bekannter Wellenlänge und Intensität ausgesetzt. (Genaueres über die Versuche cf. Zeitschr. f. allgem. Phys. Bd. 6, Heft I, S. 44.)

Die Applikation von ultravioletten Strahlen ($280\mu\mu$) ließ die Chromatophoren sehr schnell aufschießen, und zwar nicht nur innerhalb der Strahlzone, sondern die Färbung breitete sich nach ganz kurzer Zeit auch über das übrige Tier aus; das Tier selbst wurde sehr unruhig und entzog sich durch Fortschwimmen der Einwirkung der Strahlen. Bei Bestrahlung mit sichtbarem Licht (blaue Strahlen von $440\mu\mu$ und gelbe Strahlen von $558\mu\mu$) fiel, namentlich deutlich an jungen Loligo-Exemplaren, eine unverkennbare Differenz in der aufschießenden Färbung je nach der Wellenlänge der auftreffenden Strahlen auf. Durch die kurzwelligeren blauen Strahlen gerieten zunächst die gelben Zellen in die bekannt-

ten zuckenden Bewegungen, erst geraume Zeit später fingen auch die violettroten Zellen an, sich zu bewegen. Bei den langwelligeren gelben Strahlen dagegen trat ausnahmslos gerade die Ausbreitung der violettroten Zellen zuerst auf, während die gelben erst viel später sich expandierten. Eine Ausbreitung der Erregung auf das ganze Tier und eine Fluchtbewegung desselben konnte ich bei diesen Strahlen nicht beobachten.

Noch schöner ließen sich die Experimente anstellen an der überlebenden Haut getöteter Tiere, in welcher bekanntlich die Chromatophoren noch stundenlang durchaus reaktionsfähig bleiben. Es ließen sich so, namentlich nach Freipräparieren der die Chromatophoren führenden Schicht und nach Ausbreiten derselben auf kleine Wachsrähmchen, die Veränderungen mit dem Mikroskop beobachten, auch war man sicherer, daß die Strahlen mit der gewollten Intensität die Chromatophoren trafen, da sie jetzt nicht erst noch andere Schichten (Epithel usw.) zu passieren hatten. Die Resultate dieser Experimente waren dieselben wie die oben skizzierten. — Eine Untersuchung der Absorption der Zellen mit Engelmanns Mikrospektroskop ergab für die violettroten Zellen ein Maximum der Absorption bei etwa 55μ , für die gelben Zellen bei etwa 46μ . Die ultravioletten Strahlen dagegen wurden gleichmäßig von beiden Zellensorten ausgelöscht, namentlich waren Strahlen von 280μ nicht im Stande, die Zellen zu passieren. Daraus erklärt sich auch die verschiedenartige Wirkung der Strahlen auf die Zellen. Die von beiden Sorten gleichmäßig aufgenommenen ultravioletten Strahlen erregten die violettroten und gelben Zellen gleichmäßig, die blauen Strahlen wurden am meisten aufgenommen von den gelben Zellen, deren Absorptionsmaximum am nächsten der Wellenlänge der blauen Strahlen lag, während die gelben Strahlen von 558μ am nächsten dem Absorptionsmaximum der violettroten Zellen kamen, und daher auch diese Zellen zuerst erregten. Es ging daraus also auch hervor, daß die Strahlen von größerer Wellenlänge das Pigment zur Entfaltung ihrer Wirkung auf die Zellen benötigten. Das Pigment bildete gewissermaßen die Aufnahme-station der Reizwirkung, von hier aus wurde der Reiz zur weiteren Wirkung auf die übrige Zelle übertragen.

Um zu eruieren, ob diese Reizübertragung direkt auf die plasmatischen kontraktile Elemente der Zelle oder auf die an die Zellen tretenden motorischen Nerven stattfände, habe ich weitere Versuche an atropinisierten Chromatophoren angestellt, nachdem ich mich überzeugt hatte, daß die Wirkung nicht nur des indirekten reflektorisch übermittelten, sondern auch des direkten Lichtreizes

durch Atropin in ganz ähnlicher Weise beeinflusst wird, wie z. B. die Wirkung der elektrischen Reizung: das heißt, es wurde die Erregbarkeit der Nerven für direkten Lichtreiz aufgehoben, die Erregbarkeit der glatten Muskelsubstanz aber für den Lichtreiz blieb erhalten. Die Versuche an den atropinisierten Chromatophoren ergaben nun, daß die oben beschriebene Einwirkung der Lichtstrahlen durch die Atropinisierung in keiner Weise verändert wurde, das will besagen, daß die Uebertragung des Reizes durch das Pigment direkt auf die kontraktile Substanz der Radiärfasern erfolgte.

Daß aber auch Lichtreiz durch Pigment auf Nerven übertragen werden kann, davon überzeugte ich mich durch Bestrahlung des pigmenthaltigen Bauchstranges von *Sipunculus nudus*. Ich konnte durch Bestrahlung desselben sowohl mit unsichtbarem wie mit sichtbarem Licht Kontraktionen in dem zugehörigen Muskelbereich auslösen. Es dürfte diese Beobachtung um so wertvoller sein, als sie vielleicht im Stande ist, einen Fingerzeig zu geben für weitere Aufschlüsse über die Bedeutung der Pigmentflecke niederer Tiere. Denn es ist nach meinen Experimenten sehr wohl möglich, daß dem Pigment — wenigstens an manchen Stellen — die Rolle zukommt, den Reiz von Lichtstrahlen bestimmter Wellenlänge auf sonst nicht gegen diese Strahlen empfindliche Elemente zu übertragen. Weitere Experimente müssen in diese Fragen noch mehr Klarheit bringen.

Ueber elektrische Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium.

(Erste Mitteilung)

von

Alfred Coehn.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1906 von Eduard Riecke.

Das Verhalten der Salze des Ammonium-Radikals, NH_4 , nach ihren krystallographischen Eigenschaften, ihrem physikalischen und chemischen Verhalten ist vollkommen analog denen des Kaliums und Rubidiums. Und auch die Möglichkeit, dass das Ammonium selbst in metallischer Form auftreten könne, schien mit der Darstellung des Ammoniumamalgams erwiesen zu sein. Der einzige Einwand gegen die metallische Natur des Ammoniums im Amalgam beruhte auf einem Versuche von Landolt,¹⁾ welcher gezeigt hatte, dass das Ammoniumamalgam, in die Lösung von Schwermetallsalzen, z. B. Kupfersulfat, gebracht, nicht wie die Amalgame der Alkalimetalle das Schwermetall reduzierte. Ich konnte vor einiger Zeit zeigen,²⁾ dass unter leicht innezuhaltenden Bedingungen der Versuch von Landolt ein positives Resultat ergibt. Das Ammonium kann in zweifacher Weise aus dem Amalgam verschwinden. Entweder geht es — analog den Alkalimetallen — als NH_4 -Ion in Lösung oder es zerfällt in die Gase Wasserstoff und Ammoniak. Nur im ersteren Falle aber besteht die Möglichkeit, daß ein metallisches Ion aus der Lösung seine Ladung gegen das NH_4 -Ion austauscht und am Quecksilber reduziert wird. Die Tendenz zu dieser Wirkung, welche durch das Potential des

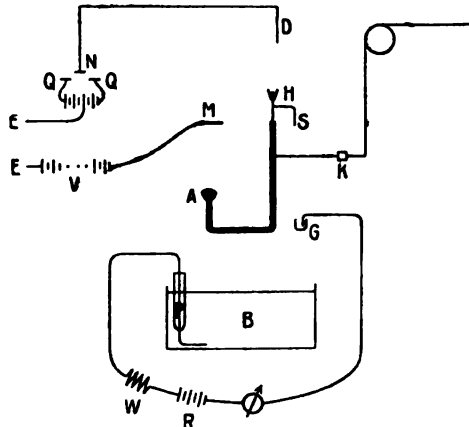
1) Ann. d. Chem. u. Pharm. Suppl. 6 (1868) 346.

2) Zeitschr. anorg. Chem. 25 (1900) 430, Zeitschr. phys. Chem. 38. 609. (1901.)

Ammoniums im Quecksilber gegeben ist, hängt nur wenig von der Temperatur ab, dagegen zeigt sich der Zerfall in Ammoniak und Wasserstoff stark abhängig von der Temperatur. Durch Abkühlung wird die Tendenz zu dem zweiten Zerfall herabgesetzt, ohne daß die erste wesentlich geändert würde. Und so gelingt es, bei etwa 0° mit Ammoniumamalgam Kupfer und auch wasserzersetzende Metalle wie Cadmium und Zink zu reduzieren. Damit ist erwiesen, daß das Ammonium im Amalgam sich wie ein Alkalimetall verhält.

2. In dem Zerfall des NH_4 in NH_3 und H haben wir einen Vorgang, wie bei keinem anderen Metall: den Uebergang eines Metalles in Nichtmetalle. Wohl ist ein ähnlicher Vorgang bei Elementen wie Tellur möglich. Aber deren metallischer Character ist wenig ausgesprochen, und der Uebergang vollzieht sich auch nur in langer Zeit. Beim Ammonium haben wir in der Analogie zu den Alkalimetallen den ausgesprochensten Metallcharacter, und die Umwandlung findet schon bei Zimmertemperatur sehr rasch statt.

Geht aber ein Metall in ein Nichtmetall über, so bedeutet das einen Rückgang der Dissociation von Elektronen innerhalb der



Substanz. Und geschieht dieser plötzlich, so kann man erwarten, daß Elektronen in die Umgebung gelangen und daß daselbst Erscheinungen sich zeigen werden, die ein Analogon zu den bei radioactiven Substanzen auftretenden darstellen.

Ich habe mir — in Anknüpfung an meine früheren Arbeiten über das Ammonium — die Aufgabe gestellt, nach derartigen Erscheinungen zu suchen.

3. Ein Quadrantelektrometer — in der von Dolezalek angegebenen Form — wurde so geschaltet, daß an dem Quadranten *Q* die beiden Pole einer 8 Volt-Batterie lagen, deren Mitte ebenso wie das Gehäuse des Elektrometers zur Erde geführt waren. Die Ableitung von der Nadel *N* wurde mit dünnem Draht auf Bernsteinstützen eine Strecke fortgeführt und endete als vertikales Drahtstück *D*. Diesem Ende konnte ein mit Quecksilber gefülltes Metallnäpfchen *H* bis zum Eintauchen von *D* entgegengeführt werden. Dann war die Quecksilbermenge, die sich bei *A* in einem unten zugeschmolzenen und von einem Platindraht durchsetzten Glasgefäß befand, metallisch mit der Elektrometernadel verbunden. Das ganze Gefäß wurde von einem Halter getragen, dessen Griff durch ein Bernsteinstück *K* unterbrochen war. Durch eine Schnur, die über eine Rolle gelegt und deren Ende bis zum Ablesefernrohr geführt war, konnte das Glasgefäß um eine Höhe von etwa 30 cm gehoben und gesenkt werden. War es oben, so stand es durch *D* in *H* nur mit der Elektrometernadel in Verbindung. War es an seiner tiefsten Stelle, so tauchte ein seitlicher Drahtansatz *S* in das mit Quecksilber gefüllte Gefäß *G*, und die Quecksilberkuppe *A* stand in dem Becherglas *B*. In diesem befand sich ein bis auf das untere Ende in Glas eingeschmolzener Platindraht *P*. Das Becherglas enthielt eine Lösung von Ammoniumbromid, welches mit *P* als Anode und dem Quecksilber in *A* als Kathode von der Stromquelle *R* aus elektrolysiert werden konnte. Ammoniumbromid bietet dabei den Vorteil, daß das am Boden des Gefäßes entstehende Brom dort liegen bleibt. Ferner war eine Hochspannungsbatterie von 200 Volt vorhanden, *V*, deren einer Pol zur Erde geleitet war, während der andere zu einer Metallplatte *M* über Bernsteinstützen geführt war. Diese Metallplatte war vertikal an einem Bernsteingriff verschiebbar, sodass sie, wenn *A* seine höchste Stellung einnahm, in bestimmter abgemessener Entfernung, wenn nicht anders angegeben immer 3 cm über *A* stand. Dann war die Leitung der Hochspannung von *V* zur Nadel *N* nur durch die 3 cm lange Luftstrecke zwischen *A* und *M* unterbrochen.

4. Der Versuch wurde so ausgeführt, daß während *D* in *H* eintauchte, *A* also seine höchste Stellung 3 cm unter der Metallplatte *M* hatte, eine Erdleitung bei *D* aufgehoben und der Gang des Elektrometers 5 bis 10 Minuten beobachtet wurde. Da alles sorgfältig durch Bernstein isoliert war, blieb der Ausschlag konstant oder es fand nur eine geringe — wohl durch Staubteilchen herbeigeführte — Aufladung der Nadel statt, die ca. 0,1—0,3 mm pro Minute betrug.

Sodann wurde *A* vom Fernrohr her an der Schnur herab-

gelassen, dadurch der Kontakt *SG* geschlossen, und der Stromübergang in der Lösung zwischen *P* und *A* erzielt. Durch einen Widerstand *W* wurde die Stromstärke im Amperemeter auf bestimmter Höhe gehalten, die, wenn nicht anders angegeben, immer 0,007 Amp. betrug. Dabei war der Durchmesser der Quecksilber-Kathode in *A* ca. 0,6 cm.

5. Der typische Versuch zeigt folgenden Gang: *A* befindet sich in der oberen Stellung, also *D* in *H*. Die Erdleitung bei *D* wird aufgehoben und der Ausschlag beobachtet.

| | |
|-------------------|-------|
| Der Ausschlag war | 52,2 |
| Nach 1 Min. | 52,35 |
| „ 2 „ | 52,43 |
| „ 3 „ | 52,53 |
| „ 4 „ | 52,53 |
| „ 5 „ | 52,53 |
| „ 6 „ | 52,52 |

Das Gefäß *A* wird in die Lösung herabgelassen, sodaß es in *G* taucht. Ein Strom von 0,007 Amp. geht 4 Minuten lang durch die Lösung. Man bemerkt an dem Aufsteigen der Quecksilberkuppe die Entstehung von Ammoniumamalgam.

Der Ausschlag beträgt am Ende der 4 Minuten 52,6.

Sodann wird das Gefäß *A* emporgehoben, sodaß es wieder in genau dieselbe Stellung kommt wie während der ersten 6 Minuten. Der Ausschlag bleibt noch einige Sekunden konstant. Dann tritt plötzliches Ansteigen ein.

| | | |
|---------------------------|-----------|----------------|
| Nach $\frac{1}{2}$ Minute | Ausschlag | 70 |
| „ $1\frac{1}{2}$ „ | „ | 90 |
| „ 2 „ | „ | aus der Skala. |

6. Wird das Gefäß *A* statt in Ammoniumbromid in Kaliumbromid gebracht, sodaß Kaliumamalgam sich bildet, so zeigt sich der Effekt nicht.

7. Wird dagegen dasselbe Kaliumamalgam, mit welchem keine Wirkung eintrat, ohne Strom in die Lösung eines Ammoniumsalzes gesenkt, sodass durch das Kalium Ammonium ausgefällt wird, und wird dann wieder die obere Stellung unter der Platte gegeben, so tritt zwar ein schwächerer, aber doch deutlicher Effekt ein. Es scheint, daß die Anwesenheit eines anderen Alkalimetalls im Quecksilber die Beständigkeit des Ammoniumamalgams vergrößert. Stellt man durch Einbringen von metallischem Natrium im Quecksilber Natriumamalgam her und durch Eintauchen dieses in Ammoniumsalzlösung ein Natrium-Ammonium-Amalgam, so ist der bei reinem

Ammoniumamalgam sehr starke Effekt — wenn überhaupt vorhanden — nur sehr gering.

8. Der Effekt rührt nicht von verspritzenden Bläschen her. Man vermeidet diese, indem man das Quecksilber in dem kleinen Gefäß so hoch auffüllt, daß — nach der Ausdehnung während der Bildung von Ammoniumamalgam — die Kuppe herausragt, sodaß bei dem Emporziehen aus der Lösung die Flüssigkeit von der Kuppe herabläuft.

9. Der Effekt rührt nicht von Ammoniakdämpfen her. Denn wird das reine Quecksilber mit einer Lösung von Ammoniak überschichtet, dessen Dämpfe gegen die Platte gelangen, so tritt keine Wirkung ein.

10. Auch wenn Wasserstoff durch eine Lösung von Ammoniak geleitet wird und das Gemisch von Wasserstoff und Ammoniak sodann durch eine Quecksilberschicht streicht, zeigt sich die Wirkung nicht.

11. Entsprechend der früher gefundenen Tatsache, daß die Zersetzung in NH_3 und H bei niedriger Temperatur verhindert wird, während die Bildung von NH_4 -Ionen dabei stattfindet, ist der Eintritt des Effekts abhängig von der Temperatur.

War die Lösung ca. 30° warm, so trat der Effekt momentan, oder nach Verlauf von einigen Sekunden ein. Wurde dagegen die Lösung bei einer Temperatur von ca. 15° verwendet, so vergingen mehrere Minuten bis zum plötzlichen Eintritt der Wirkung. Man kann dann durch Beobachtung der Ammoniumamalgamkuppe genau angeben, wann die Bewegung der Elektrometernadel eintritt. Es bildet sich dann zuerst ein Ueberzug von feinen Blasen auf der Kuppe, die periodisch verschwinden und wieder erscheinen, bis plötzlich die Fläche metallisch blank aussieht, dann erst setzt der Effekt ein.

Bei höherer Temperatur wird die Kuppe sofort blank und der Effekt tritt dementsprechend gleich ein.

Es scheint, daß — dem früheren Ergebnis über Metallreduktion durch Ammonium entsprechend — bei niedriger Temperatur zuerst Ammoniumionen sich unter Reduktion von Wasserstoff bilden, während bei höherer Temperatur der den Effekt gebende Zerfall des NH_4 in NH_3 und H überwiegt.

12. Es ist nicht erforderlich, daß das Quecksilber in *A* mit der Nadel selbst in Verbindung gesetzt wird. Die Leitfähigkeit der Luft zeigt sich auch dann, wenn das Quecksilbergefaß *A* nach der Elektrolyse frei an dem isolierenden Bernsteingriff gehalten wird, während ein 2 cm darüber befindliches Drahtnetz mit der

200 Voltbatterie verbunden ist, über welchem eine Metallplatte sich befindet, die mit der Nadel verbunden ist.

13. Die wirksame Menge des Ammoniums ist außerordentlich gering. Berechnet man das durch Elektrolyse abgeschiedene Ammonium nach dem elektrochemischen Aequivalent, so nimmt man jedenfalls eine zu große Menge an, denn bei der Bildung des Ammoniumamalgams findet zugleich Wasserstoffentwicklung statt. Setzt man aber jenen Wert als Maximalwert, so ergibt sich, daß 0,007 Amp. in einer Minute 0,00004 gr. NH_4 abscheiden. Diese Menge zeigt noch vollkommen deutlichen Effekt.

Göttingen, Institut für physikalische Chemie,
im Januar 1906.

**Ueber elektrische
Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium.
(Zweite Mitteilung)**

von

Alfred Coehn.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1906 durch Eduard Riecke.

14. Die Frage nach der Natur der vom zerfallenden Ammonium ausgehenden Wirkung ist dahin zu beantworten, daß der Effekt wesentlich herrührt von positiv geladenen Teilchen, die vom zerfallenden Ammonium ausgesandt werden. Dies wird durch die folgende Versuchsreihe bewiesen.

Für diese wurde das Elektrometer, um es unempfindlicher zu machen, mit einem stärkeren Quarzfaden versehen und um die Empfindlichkeit durch Aenderung der angelegten Spannung besser variieren zu können, in der gewöhnlichen Schaltung verwendet. An die Nadel konnten 20—200 Volt gelegt werden¹⁾, das eine Quadrantenpaar lag mit dem Gehäuse zugleich an Erde, das andere blieb mit dem ersten verbunden bis nichts an der Versuchsanordnung mehr geändert wurde und konnte dann mit dem Teil, dessen Potential geprüft werden sollte, verbunden werden. Die Empfindlichkeit betrug, wenn nicht anders angegeben, 18 cm für ein Volt.

15. Ammoniumamalgam wurde in der früher angegebenen Weise elektrolytisch hergestellt, indem jetzt immer ein Strom von 0,01 Amp. während 3 Min. durch eine Lösung von Ammoniumsulfat, deren Temperatur auf 30° gehalten wurde, hindurchging. Durch

1) Herr Dr. F. Krüger hat in der No. 6 der phys. Zeitschr. eine neue außerordentlich bequeme Form von Hochspannungsbatterien zu 100 Volt beschrieben. Er hatte die Freundlichkeit, mir die vier ersten Exemplare davon zur Verfügung zu stellen.

eine einfache Vorrichtung, in der in der ersten Mitteilung skizzierten Art, konnte das Amalgam aus der Lösung gehoben, in Verbindung mit dem einen Quadrantenpaar gebracht und erst dann dessen Verbindung mit dem andern und der Erde aufgehoben werden. Die Schaltungsvorrichtungen waren so eingerichtet, daß dies immer in 5 Sekunden bewerkstelligt war, sodaß der Effekt von da ab beobachtet werden konnte.

16. Es wird zunächst die Platte *M* (siehe Figur der ersten Mitteilung) und die Hochspannungsbatterie *V* entfernt. Wird dann nach der Elektrolyse das Gefäß *A* durch den Bernsteingriff *P* isoliert in die Höhe gezogen (Fig. 1), sodaß in das Näpfchen *H* der Draht *D* eintaucht, der aber nicht wie in den vorigen Versuchen zur Nadel, sondern zu dem einen Quadrantenpaar führt, so zeigt sich deutliche negative Aufladung des Ammoniumamalgams.

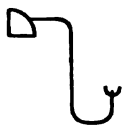


Fig. 1.

Der Effekt der Selbstaufladung des Ammoniumamalgams bei seiner Zersetzung ist so stark, daß um ihn zu messen die Empfindlichkeit des Elektrometers bedeutend herabgesetzt werden mußte. Es wurden nur 20 Volt an die Nadel gelegt; dabei war die Empfindlichkeit 2,65 cm für ein Volt. Die Selbstaufladung des Ammoniumamalgams betrug unter den angegebenen Bedingungen ca. 7 Volt.

17. Wird wie in den früheren Versuchen elektrolytisch in genau gleicher Weise hergestelltes Natriumamalgam an die Stelle des Ammoniumamalgams gebracht, so läßt es sich nicht auf.

Wird dagegen das Natriumamalgam, welches zuerst keinen Effekt gegeben hatte, eine Minute in die Lösung von Ammoniumsulfat gebracht, so tritt — aber entsprechend der bei den früheren Versuchen hervorgetretenen größeren Beständigkeit des Natrium-Ammonium-Amalgams nach längerer Zeit (bis zu 13 Min.) — die negative Selbstaufladung ein.

Es ist also zu schließen, daß positiv geladene Teilchen von dem zerfallenden Ammonium ausgesandt werden.

18. Es wird jetzt über das Gefäß wieder die Metallplatte *M* gebracht (Fig. 2) und geprüft, ob die Selbstaufladung des Ammoniumamalgams durch eine darüber angebrachte positive oder negative Ladung beeinflußt wird. Bei der früheren Empfindlichkeit des Elektrometers mit dem dünneren Quarzfaden war sowohl bei

positiver wie bei negativer Ladung der Platte der Elektrometerausschlag über die Skala hinausgegangen, so daß ein Unterschied nicht bemerkt wurde. Dieser tritt nunmehr deutlich hervor: bei positiver Ladung der Platte erfolgt eine langsame und schwache positive Aufladung des Ammoniumamalgams, die im Maximum 8 cm beträgt. Bei negativer Ladung der Platte nimmt das Ammoniumamalgam sofort starke negative Ladung an, die 50 cm übersteigt.

Während also bei positiver Ladung der Platte die durch die leitend gewordene Luft zum Ammonium gelangende Ladung den Effekt der Selbstaufladung des Ammoniumamalgams überdeckt, superponiert sich bei negativer Ladung der Platte die von dieser ausgehende Ladung der Selbstaufladung des Ammoniumamalgams.

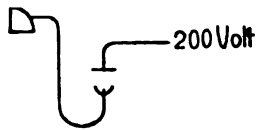


Fig. 2.

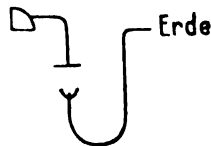


Fig. 3.

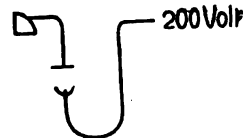


Fig. 4.

19. Wird nicht das Ammoniumamalgam, sondern die Platte mit dem Elektrometer verbunden (Fig. 3) und das mit der Erde verbundene Ammoniumamalgam darunter gebracht, so zeigt sich eine schwache (3 cm) aber doch deutliche positive Ladung der Platte. Die Kleinheit des Effectes läßt die durch den Sinn des Ausschlages unterstützte Vermutung offen, daß hier in der leitend gewordenen Luft ein Volta-Effect zwischen dem Ammoniumamalgam und der darüber befindlichen Kupferplatte sich geltend macht. Es wurde daher an die Stelle der Kupferplatte eine frisch geschnittene Natriumplatte gebracht, die gegenüber dem Ammoniumamalgam den Volta-Effect im umgekehrten Sinne zeigen mußte. Aber auch diese lud sich wie die Kupferplatte deutlich positiv.

20. Wird endlich, während die Platte mit dem Elektrometer verbunden bleibt (Fig. 4), das Ammoniumamalgam selbst mit der am andern Ende abgeleiteten Batterie von 200 Volt verbunden, so tritt bei positiver Ladung des Ammoniumamalgams an der Platte eine Ladung im positiven Sinne ein, welche 50 cm übersteigt, während bei negativer Ladung des Ammoniumamalgams der Ausschlag im Maximum 13 cm beträgt.

Es zeigt sich also, daß die Aussendung der posi-

tiven Teilchen durch positive Ladung des Ammoniumamalgams befördert, durch negative Ladung gehemmt wird.

21. Die Entstehung freier Ladungen beim Zerfall des Ammoniums ergibt sich sehr deutlich durch den folgenden Versuch. Es wird das Elektrometer in idiostatischer Schaltung verwendet (Fig. 5), so daß überhaupt keinerlei Elektrizitätsquelle an der Versuchsanordnung vorhanden ist.¹⁾ Die Nadel ist dabei

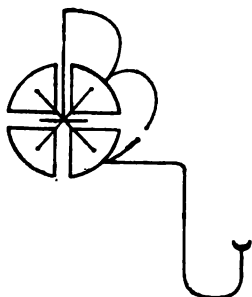


Fig. 5.

mit dem einen Quadrantenpaar und dem Gehäuse des Elektrometers verbunden, das andere Quadrantenpaar zunächst ebenso. Nach Verbindung des Gefäßes A mit dem zweiten Quadrantenpaar wird die Verbindung zwischen den Quadrantenpaaren aufgehoben: es tritt eine negative Ladung ein. Der erhaltene Ausschlag entspricht einer Aufladung zu ca. 7 Volt.

Bei Ersatz der Quecksilberoberfläche in A von 0,6 cm Durchmesser durch eine solche von 2 cm Durchmesser stieg die Aufladung bis auf 18,5 Volt.

Weitere Mitteilungen über Erscheinungen beim Zerfall des Ammoniums sollen demnächst erfolgen.

Göttingen, Institut für physikalische Chemie,
Februar 1906.

1) Für diese idiostatische Schaltung erwies es sich als zweckmäßig, den Quarzfaden im Elektrometer durch einen solchen aus Platin zu ersetzen. Bei einem feuchten Quarzfaden besteht — jedenfalls durch Ungleichheit der Aluminiumhäkchen an seinen Enden — die Möglichkeit zur Ausbildung eines galvanischen Elements, wodurch die Nadel niemals völlig frei von Ladung zu erhalten ist. Für gewöhnlich ist das belanglos. Bei der idiostatischen Schaltung aber tritt es darin zu Tage, daß der Ausschlag bei Zuführung positiver und negativer Ladung zum Quadranten nach verschiedenen Seiten und zwar nicht in gleicher Größe sich bewegt. Wird dagegen ein Metallfaden verwendet, so ist die Nadel nach Ableitung frei von Ladung und der Ausschlag geht bei Zuführung positiver oder negativer Ladung nach derselben Seite.

Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. December 1905 von E. Wiechert.

Mit 1 Tafel.

A. Bestimmungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die große Uebereinstimmung einzelner Erdbebendiagramme, die von verschiedenen Beben desselben Herdes herrühren, kann zu der Annahme führen, daß die charakteristische Form des Diagramms im Wesentlichen von dem Weg herrührt, den die Erschütterung nahm.

Schwingt eine mächtige Erdscholle aus ihrem labilen Gleichgewicht in eine neue Lage, so pflanzen sich infolge dieses einen Stoßes nach allen Richtungen hin die Erschütterungen wellenförmig fort. Das Medium, durch das die Wellen gehen, ist nun nicht homogen, sondern weist Diskontinuitäten auf, die die Wellennormale brechen. Ferner können im Wege der Wellen Erdschollen liegen, die einer Eigenperiode fähig sind, welche von der ursprünglichen Periode der Wellen verschieden ist. Hier wird ein Teil der Wellenenergie absorbiert und mit der Eigenperiode der Schollen wieder ausgestrahlt. Da vielleicht bis zu einem gewissen Grade die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Periode und Amplitude¹⁾ abhängig ist, so werden die Wellenzüge zeitlich nacheinander dahineilen. Nimmt man an, daß infolge der Erschütte-

1) S. Kusakabe Tokyo K. 2, S. 142, 1904.

rung vom Bebenherde sowohl transversale wie auch longitudinale Wellen ausgesandt werden, so müssen die longitudinalen, denen die größere Geschwindigkeit zukommt, den transversalen Wellen voraneilen. Die Oberflächenwellen selbst können durch Reflexion an Gebirgsmassen und durch andere örtliche Verhältnisse (z. B. Quertäler) in ihrer Richtung und Intensität geändert werden. Aus all diesen Gründen erhellt, daß die Erschütterungen des einen Stoßes im Erdbebenherd als eine Anzahl zeitlich auf einanderfolgender Wellenzüge mit verschiedener Periode die Erdbebenstation passieren müssen und daher dort ein Diagramm liefern werden, daß um so weiter aus einandergezogen ist, je weiter der Herd der Störung entfernt und je kräftiger die Störung selbst war, denn dann können all die angeführten Momente um so stärker in die Erscheinung treten. Es soll hiermit nun nicht behauptet werden, daß im Herde bloß ein einziger Stoß erfolgt; dort wird die Ruhe infolge der Elasticität der Scholle erst allmählig eintreten. Auch werden sich kleine Spannungen noch nachträglich ausgleichen.

Je weiter der Weg ist, den die Wellen zurückgelegt haben, je später ihr Eintreffen am Beobachtungsort ist, desto schwächer ist ihre Energie. Das Diagramm wird also ein allmähliges Abklingen der Wellen mit der Zeit zeigen.

Gewisse Zeitpunkte im Diagramm sind aber vor andern ausgezeichnet. Betrachten wir die vom Epizentrum ringförmig ausgehenden Oberflächenwellen, so ist die Abnahme der Energie — eine vollkommen elastische Kugel vorausgesetzt — eine periodische Funktion des Weges, weil sich im Gegenpunkt zum Epizentrum die Wellen sammeln ¹⁾. Dort ist ein neuer Quellpunkt, von dem aus sich die Wellen wieder ringförmig ausdehnen, um die Beobachtungsstation *St* jetzt in entgegengesetzter Richtung zu passieren, wie vorher, und sich wieder im Epizentrum zu sammeln, von wo sie dann von neuem ausströmen und nochmals die Beobachtungsstation passieren können. Die Wellen, die zum ersten Mal *St* passieren, nennen wir W_1 , beim zweiten Durchgang durch *St* in entgegengesetzter Richtung W_2 , beim dritten Durchgang in ursprünglicher Richtung W_3 .

Die Zeitpunkte, wo W_1 und W_2 die Station *St* erreichen, sind bevorzugt, indem im langsam abklingenden Diagramm neue stärkere Wellenzüge auftauchen.

1) Deshalb kann auch unter Umständen im Gegenpunkt ein Beben wahrgenommen werden, das etwa in der Mitte zwischen Herd und Gegenpunkt nicht mehr merklich ist.

Da auf dem langen Wege viel von der Energie der Wellen absorbiert wird, so wird die Welle zum zweiten Mal die Beobachtungsstation nur mit geringer Energie passieren. Immerhin kann aber, wenn noch andere Wellenzüge in gleicher Zeit eintreffen, die einen anderen Weg genommen haben, die Energie von W_2 größer sein.

Dies läßt sich tatsächlich beobachten.

Es zeigen sich am Ende sehr starker, sehr weit entfernter Beben, oft ganz schwache regelmäßige Wellenzüge, deren Amplitude sehr langsam abnimmt, zuweilen stundenlang andauernd, mitten darin findet sich ein Anschwellen der Bewegung von anderer, wenn auch meist wenig verschiedener Periode, die man als W_2 ansprechen könnte. Jedoch ist dieser Fall für Berechnungen wenig geeignet, weil sich W_2 nur unsicher auffinden, und der Beginn von W_2 nur ungenau feststellen läßt.

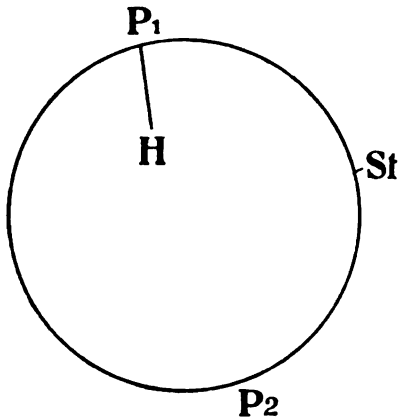
Noch schwieriger und unsicherer ist das Auffinden von W_2 , bei den ungewöhnlich starken und weit entfernten Beben, da diese 4 bis 5 Stunden den Seismographen erheblich schwanken lassen.

Die Nahbeben wiederum, die ein verhältnismäßig kurzes Diagramm geben, haben bei uns meist nicht die ausreichende Intensität, um eine Welle durch den Gegenpunkt zu senden. Außerdem treten manchmal Nachstöße im Herd auf, deren Wellen bei der geringen Herddistanz bis nach St gelangen und dort die Ruhe, die zur Beobachtung von W_2 nötig ist, stören.

Am deutlichsten tritt W_2 hervor bei weit entfernten Beben, die bei uns mittelstarke Diagramme liefern, und deren Bewegungen nach 1—1½ Stunde erlöschen. Die etwaigen Nachstöße haben hier bei der großen Herddistanz nicht die Kraft bis nach St zu gelangen. Die Energie des Hauptstoßes aber ist ausreichend, da der Unterschied des Weges von W_1 und W_2 nicht allzugroß ist. Bei einer Herddistanz von 10000 km hat W_2 den 3fachen, bei 13300 km nur den doppelten Weg von W_1 zurückzulegen. Günstig für das Hervortreten von W_2 ist eine möglichst geringe mikroseismische Tagesunruhe. Da diese eine durchschnittliche Bewegung von 8^{sec} Periode die Welle W_1 , eine solche von 18^{sec} hat, so ist für unsern Zweck wichtig, daß der Seismograph eine Periode hat, die näher an 18^{sec} liegt, weil er dann für W_2 empfindlicher ist.

Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von W_2 ,

$T_1 - T_2$ die Zeitdifferenz zwischen dem Eintreten von W_1 und W_2 in der Beobachtungsstation St ,



P_1 das Epizentrum,
 P_2 der Gegenpunkt des Epizentrums,
 r der Erdradius
 so ist

$$v = \frac{2 P_1 St}{T_1 - T_2} = \frac{2 r \pi - 2 P_1 St}{T_1 - T_2}$$

$$= \frac{40000 \text{ km} - 2 P_1 St \text{ km}}{T_1 - T_2},$$

Hat man einmal einen Mittelwert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v von W_1 gefunden, so ist es andererseits möglich, einen Rückschluß auf die Herddistanz zu machen, was wichtig ist, wenn die Vorläufer fehlen und die Herddistanz unbekannt ist, während W_1 vorhanden ist. Die Herddistanz H ergibt sich dann gleich

$$H = \frac{40000 \text{ km} - (T_1 - T_2) v \text{ km/sec}}{2}.$$

Die Genauigkeit der Bestimmungen von v ist abhängig von der Genauigkeit mit der die Herddistanz $P_1 St$ und $T_1 - T_2$ angegeben werden kann. Sind Vorläufer vorhanden, so läßt sich die Herddistanz aus dem Eintreten der beiden einleitenden Phasen und der Hauptbewegung berechnen, z. B. nach den empirischen Formeln von Láska. Der Beginn der ersten Störung ist meist leicht bis auf wenige Sekunden genau anzugeben. Bei der zweiten ist dies schwieriger, weil die beiden Störungen manchmal undentlich in einander übergehen, oft auch nicht bloß ein, sondern mehrere deutliche Einsätze vorhanden sind. Ein Fehler von 1 min entspricht hier 1000 km Fehler in der Herddistanz. Am schwierigsten ist zuweilen der Beginn des Hauptbebens zu bestimmen, denn oft sind den kurzperiodigen Wellen der zweiten Vorstörung Wellen großer Periode (20—30^{sec}) überlagert, die schon dem Hauptbeben angehören. Ferner fällt der Anfang des Hauptbebens durchaus nicht immer mit dem Maximum der Bewegung zusammen. Es ist vielmehr wahrscheinlich, daß das Maximum der Bewegung sich im Zuge der langen Wellen umsomehr zum Ende hin verschiebt, je weiter der Bebenherd entfernt ist. Eine Vergleichung von Göttinger und Upsalaer Diagrammen deutet darauf hin.

In den folgenden Tabellen ist nach der angegebenen Formel die Geschwindigkeit v für verschiedene Beben berechnet worden.

Zu den Tabellen: I merklich II auffallend III stark

P = erster Vorläufer

S = zweiter „

L = Lange Wellen

Tabelle.

| No. | Datum | Charakter | Phase | Zeiten Greenwich | Periode sec | A_s | A_H | $T_1 - T_s$ | $T_s - T_L$ | H km | v km/sec |
|------|-------------------------|-----------|-------|---|-------------|----------|-------|-----------------------------------|-----------------|-------------------------------|----------------------------|
| I. | 11. VII. 05 Fig. I | u II | P | 8 ^h 48 ^m 46 ^s | | | | | | 5750 | 3 |
| | | | S | 56 ^m 8 ^s | | | | | | | |
| | | | L | 9 ^h 6 ^m | | | | | | | |
| | | | W_1 | 9 ^h 10 ^m | 15—18 | 250 | 250 | 2 ^h 41 ^m | | | |
| | | | W_2 | 11 ^h 51 ^m | 16—18 | 5 | 4 | | | | |
| II. | 10. XII. 05 Fig. III | u II | P | 12 ^h 46 ^m 54 ^s | | | | | | $H_1 = 8600$ $H_2 = 10000$ | $v_1 = 3,45$ $v_2 = 3$ |
| | | | S | 56 ^m 19 ^s | | | | | | | |
| | | | L | 19 ^h 17 ^m | | | | | | | |
| | | | W_1 | 28 ^m | 20 | | 75 | 1 ^h 50 ^m | | | |
| | | | W_2 | 15 ^h 7 ^m | 20 | | 13 | | | | |
| III. | 8. IX. 05 Fig. II | r III | P | 1 ^h 46 ^m 32 ^s | | | | | | 1600 | $v_1 = 3,4$ $v_2 = 3,1$ |
| | | | W_1 | 1 ^h 50,7 ^m | 9—15 | 500—1000 | | 2 ^h 58 ^m ,3 | | | |
| | | | W_2 | 4 ^h 49 ^m | 18—20 | 8 | | | | | |
| | | | W_3 | 5 ^h 6 ^m | 17 | | | | 17 ^m | | |
| IV. | 4. XII. 05 | r II | P | 7 ^h 10 ^m 43 ^s | | | | | | 3500 | 4.6 |
| | | | S | 7 ^h 15 ^m 7 ^s | | | | | | | |
| | | | L_s | 19 ^m 31 ^s | | | | | | | |
| | | | L_H | 21 ^m 43 ^s | | | | | | | |
| | | | W_1 | 20 ^m | 12—18 | | 150 | 1 ^h 57 ^m | | | |
| V. | 17. XII. 05 | I u | W_2 | 9 ^h 17 ^m | 15 | | 7 | | | 11600 | |
| | | | L | 10 ^h 14 ^m | | | | | | | |
| | | | W_1 | 29 ^m | 17 | 12 | 14 | 1 ^h 33 ^m | | | |
| | | | W_2 | 12 ^h 4 ^m | 17 | 2,5 | 3 | | | | |

Die Angaben sind den Diagrammen des Göttinger 1200 kgr Pendels entnommen.

H = Herddistanz

u = Herddistanz über 5000 km

r = " 1000—5000 km.

A_e, A_r = EW und NS Komponente von A

A Amplitude der Erdbewegung gerechnet von einer Seite zur andern in μ gemessen.

Die Herddistanz ist bei I, II und IV aus den Vorläufern, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der angegebenen Formel aus H und $T_1 - T_2$ berechnet.

Zu No. 2. Die Herddistanz ist einmal aus P und S zu 8600 km dann aus P und L zu 10000 km berechnet, die beiden entsprechenden Werte von v sind 3,45 und 3,0, also um 15% verschieden.

Herr Dr. Åkerblom war so freundlich, die entsprechende Kurve aus Upsala zur Vergleichung nach Göttingen schicken zu lassen. Es ließ sich auch dort, wie näher von ihm ausgeführt ist, W_1 finden ¹⁾.

Zu No. 3. Die Herddistanz = 1600 km ist, da der Herd bekannt ist, (Kalabrien) aus der Karte entnommen.

Im kalabrischen Beben liegen die Verhältnisse zur Beobachtung der Welle W_1 insofern günstig als das Epizentrum sehr nahe liegt und das Beben sehr stark ist. Es ist im Diagramm sowohl W_1 wie W_2 zu erkennen. Die Zeitdifferenz zwischen dem Eintreten von W_1 und W_2 , nenne ich $T_1 - T_2$. Es läßt sich dann $T_1 - T_2$ aus v und H berechnen, wobei ich für v den aus $T_1 - T_2$ berechneten Wert $v_1 = 3,4$ benutze

$$T_1 - T_2 = \frac{2 P_1 St}{v} = \frac{2 H}{v} = \frac{3200}{3,4} = 941^{\circ} \\ = 15^m 41^s.$$

Andererseits wurde $T_1 - T_2$ im Diagramm gemessen und zwar

$$T_1 - T_2 = 17^m.$$

1) Will man die Zeitpunkte, wo W_1 an 2 verschiedenen Stationen auftritt, mit einander vergleichen, so ist es notwendig, die Diagramme selbst zu vergleichen; weil sichere Resultate nur zu erwarten sind, wenn sich in beiden Diagrammen charakteristische Wellen wiederfinden lassen. Die hier angegebene Zeit des ersten leisen Auftauchens von W_1 ist allein zum Vergleich mit andern Stationen nicht brauchbar; sie ist im Wesentlichen durch die Empfindlichkeit des Instrumentes und durch örtliche Verhältnisse bedingt.

Der berechnete und der gemessene Wert von $T_2 - T_1$ stimmen gut mit einander überein.

Es läßt sich auch umgekehrt aus $T_2 - T_1$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnen:

$$v_1 = \frac{2H}{T_2 - T_1} = \frac{3200 \text{ km}}{1020} = 3,1 \text{ km/sec.}$$

Diese flachen sinusförmigen Wellen W_1 und W_2 sind wohl sicher keine Nachstöße vom kalabrischen Herd, denn Nachstöße haben ein ganz anderes Aussehen. Beim Balkanbeben vom 8. zum 9. November 1905 sind z. B. solche Nachstöße vorhanden. Sie sind von viel kürzerer Periode und schärferen Einsätzen. Ferner haben sie Vorläufer, aus denen sich die Herddistanz wie für das Hauptbeben berechnet. In den Kurven aus Upsala vom 8./9. November treten dieselben Nachläufer auf, jedoch ebenso wie das Hauptbeben zeitlich später wie in Göttingen, während sie doch, gehörten sie einer Welle W_1 an, in Upsala früher eintreffen müßten als in Göttingen.

Zu No. 4. Die langen Wellen treten schon während der zweiten Vorstörung auf; die Herddistanz von 3500 ist nicht sehr genau. Der Wert für v ist bedeutend größer als bei den andern Beben; es würde der mittlere Wert $v = 3,2$ einer etwa doppelt so großen Herddistanz entsprechen. Etwa 39^m später als W_1 taucht noch eine Welle auf; für diese als W_2 würde sich $v = 3,0$ berechnen.

Zu 5. Hier fehlen die Vorläufer, während W_1 vorhanden ist. Die Herddistanz läßt sich also nach der angegebenen Formel aus T und v berechnen. Nimmt man v als bekannt $= 3,2$ an, so ergibt sich für die Herddistanz 11600 km. Der Typus des Bebens ist in der Tat der eines sehr weit entfernten.

Für die drei ersten Beben schwankt v zwischen 3 und 3,4 km/sec. Das Mittel ist 3,2 km/sec. Der Mittelwert aus allen Beobachtungen ist $v = 3,46$.

Diese Uebereinstimmung ist sehr gut. Omori hat in seiner Arbeit Werte für v angegeben, die zwischen 6,3 und 2,9 km/sec. schwanken.

B. Bestimmung der Absorption der Energie.

Die Absorption der Energie der Oberflächenwelle W_1 auf ihrem Wege d bis zu ihrer Rückkehr nach St. als W_2 läßt sich aus den Amplituden A_1 und A_2 von W_1 und W_2 sowie aus der zwischen dem Auftreten von W_1 und W_2 verflossenen Zeit $T_2 - T_1$ berechnen.

Wäre die Erde eine vollkommen elastische Kugel, und fände eine Absorption nicht statt, so müßte, — eine Ausbreitung längs der Oberfläche vorausgesetzt, — $\frac{2r\pi - 2H}{v}$ Sekunden nach dem Eintreffen von W_1 in St das Beben zum zweiten Male St passieren und zwar mit gleicher Stärke; es müßte also $A_1 = A_2$ sein. Ist nun $A_1 > A_2$, so ist dies eine Folge der Absorption.

Anders liegt der Fall, wenn man eine Welle in den Diagrammen zweier Stationen vergleicht, die ungleiche Herddistanz haben, und aus der Abnahme der Amplitude die Absorption bestimmen will; denn, abgesehen von der Absorption, breitet sich die Energie ringförmig aus, um sich im Gegenpunkt zu sammeln und sich von dort aus wieder auszubreiten u. s. w. Verfolgt man in der Vorstellung die Welle in ihrem Lauf über die Erdoberfläche, so sieht man also, wie sich die Amplitude periodisch vergrößert und verkleinert. Hierzu erst kommt die Aenderung der Amplitude durch Absorption. Ohne Absorption ist der gesamte Betrag der Energie der ringförmig sich ausbreitenden Störung auf jedem Ringe vom Epizentrum zum Gegenpunkt von derselben Größe. Durch Absorption wird dieser Betrag pro Wegeinheit in der Bewegungsrichtung um denselben Bruchteil vermindert, wenigstens in erster Annäherung.

Da die Energie sich z. B. im I. Quadranten ausbreitet, nimmt die Amplitude und damit die Geschwindigkeit der Bodenbewegung von Ort zu Ort ab. Ob hiermit eine Aenderung der Absorption verbunden ist, soll hier nicht berücksichtigt werden.

Es ist möglich, daß die Absorption eine Funktion der Deformationsgeschwindigkeit ist. Das frühzeitige Verschwinden kurzperiodiger Wellen aus den Diagrammen hat wohl zum Teil hierin seinen Grund. Bei gleicher Amplitude nämlich kommt den Wellen kurzer Periode eine größere Deformationsgeschwindigkeit und damit wohl eine größere Absorbierbarkeit zu als den Wellen langer Periode. In Fernbebendiagrammen finden sich im Zuge der Oberflächenwellen nur äußerst selten kurze Perioden.

Nennt man nun a den Absorptionskoeffizienten, J_1 und J_2 die Energie von W_1 und W_2 , so ist näherungsweise

$$\frac{J_2}{J_1} = e^{-ad},$$

$$a = \frac{1}{d} \lg \text{nat} \frac{J_1}{J_2} = \frac{2,3}{d} \lg \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2,$$

$$d = v (T_1 - T_2),$$

$$v = \frac{\lambda}{t},$$

wo λ Wellenlänge und t Periode der Erdbebenwelle bedeutet.

$$d = \lambda \frac{T_1 - T_2}{t},$$

$$a = 2,3 \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{\lg \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2}{\frac{T_1 - T_2}{t}}.$$

Da λ bisher noch nicht experimental bestimmt werden konnte, so ist der obige Ausdruck einstweilen nicht zu berechnen.

Ich nehme an, daß $v = \frac{\lambda}{t}$ eine Konstante ist, und setze

$$av = \frac{2,3}{T_1 - T_2} \lg \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2,$$

av muß dann eine für alle Beben konstante Größe sein. Der Ausdruck $\frac{2,3}{T_1 - T_2} \lg \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2$ enthält nur Größen die im Seismogramme zu messen sind.

A_1 und A_2 die in der Tabelle angegebenen Amplituden der Bodenbewegungen sind aus den Amplituden der Diagramme und aus der scheinbaren Indicatorvergrößerung \mathfrak{B} berechnet worden, wobei die Abhängigkeit der scheinbaren Indicatorvergrößerung periodischer Störungen von der Periode der Störung und von der Dämpfung berücksichtigt ist. Vergl. E. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen, Abhandl. d. kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-physik. Klasse. N. F. Bd. II, No. 2. 1903, S. 78, 105.

V = wirkliche Indicatorvergrößerung

t = Periode der Bodenbewegung

T_0 = Reducierte Eigenperiode

τ = Relaxationszeit

$\varepsilon : 1$ = Dämpfungsverhältnis

$$\mathfrak{B} = \frac{V}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{t}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{t}{T_0}\right)^2}},$$

wobei

$$\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 = \frac{0,733^2 (\lg \varepsilon)^2}{1 + 0,733^2 (\lg \varepsilon)^2},$$

wie sich aus leichter Umformung der dort angegebenen Gleichungen ergibt.

Berechne ich nun $a \cdot v$ für die fünf Beben, so erhalte ich

| I | II | III | IV | V |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $a \cdot v = 0,00080$ | $0,00058$ | $0,00108$ | $0,00088$ | $0,00056,$ |

$a \cdot v$ ist die Absorption pro Zeiteinheit; setze ich v gleich $3,2$ km/sec., so erhalte ich

| I | II | III | IV | V |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a = 0,00026$ | $0,00018$ | $0,00034$ | $0,00028$ | $0,00018$ |

a ist die Absorption pro km.

Ferner läßt sich a berechnen aus der Formel

$$a = \frac{2,3}{d} \lg \left(\frac{A_1}{A_2} \right),$$

wenn man für d den Weg einsetzt, den W_1 zurückgelegt hat bis zur Rückkehr nach St. als W_1 ,

$$d = 2(r\pi - H) \text{ km} = 2(20000 - H) \text{ km},$$

wo H die Herddistanz ist.

Da im I. Teil v aus der Herddistanz bestimmt ist

$$v = \frac{2(r\pi - H)}{T_1 - T_2},$$

so führen für unsere Betrachtung beide Formeln für d zu identischen Werten, denn

einmal ist

$$d = v(T_1 - T_2),$$

sodann

$$d = 2(r\pi - H),$$

also

$$v(T_1 - T_2) = 2(r\pi - H),$$

$$\frac{2(r\pi - H)}{T_1 - T_2} (T_1 - T_2) = 2(r\pi - H).$$

Gelingt es aber v unabhängig von der Herddistanz H zu bestim-

men z. B. durch Messung von λ oder durch Beobachtung der Eintrittszeiten derselben Oberflächenwelle an zwei verschiedenen Stationen, wobei die Fortpflanzungsrichtung bekannt sein muß, so kontrollieren sich beide Formeln für d , da d einmal aus H und das andere Mal aus $T_1 - T_2$ und der unabhängig von H bestimmten Geschwindigkeit berechnet wird. Hierzu fehlen zur Zeit noch die geeigneten Daten.

Die einzelnen Werte für den Absorptionskoeffizient bei ganz verschiedenen Beben stimmen genügend überein. Die Größenordnung von a läßt sich wohl mit Sicherheit erkennen.

Während der Zeit der Drucklegung wurde noch folgender Fall beobachtet und konnte in der Korrektur beigelegt werden. Beim Fernbeben von 1906 Febr. 27 21^h trat W_1 auf. $T_1 - T_2 = 140^m$. Aus den Vorläufern berechnet sich die Herddistanz auf etwa 6500 km. A_2 ist für $W_1 = 35^\mu$ für $W_2 = 0,7^\mu$. Die Berechnung ergibt

$$v = 3,2 \text{ km/sec.}$$

$$a \cdot v = 0,00093$$

$$a = 0,00029.$$

Vergleichung der Diagramme aus Upsala und Göttingen von Fernbeben, deren Wellen die Erde umkreist haben.

Von

F. Åkerblom.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. December 1905 von E. Wiechert.

In Fernbebenregistrierungen sind mehrfach Nachstörungen beobachtet worden, von denen angenommen wurde, daß sie die Erde über den Antipodenpunkt umkreist haben¹⁾. Leider sind sie meist sehr schwierig unter den anderen Anschwellungen des Nachbebens zu erkennen. Unter solchen Umständen scheint es von Wichtigkeit zu sein, daß die Vergleichung der Seismogramme zweier Stationen bisweilen ein gutes Mittel bietet, eine derartige Nachstörung daran zu erkennen, daß sie entgegen der Fortpflanzungsrichtung des Hauptbebens eintritt. Zwei Beispiele für diesen Fall werden im folgenden beschrieben.

Die astatischen 1200 resp. 1000 kg - Pendel nach Wiechert, die in Göttingen und Upsala aufgestellt sind, haben am 22. Januar 1905 ein sehr entferntes Beben aufgezeichnet. Die hier in Betracht kommenden Teile der Diagramme sind auf der beige-fügten Tafel lithographisch wiedergegeben. Betrachtet man sie, so wird es auffallen, daß die Seismogramme aus Upsala und Göttingen im Anfang des Hauptbebens ziemlich verschieden aussehen. Diese Erscheinung rührt hauptsächlich davon her, daß die Eigen-

1) Vgl. F. Omori Publications of the Earthquake Investigation Committee in For. Languages. No. 13, S. 119—124. Tokyo 1903. — G. Angenheister Notiz über Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. Diese Zeitschrift, Heft I. 1906.

schwingungen des Göttinger Seismographen zu der betreffenden Zeit eine viel größere Periode als diejenige des Upsala Seismographen hatten ($15^{\circ}6$ gegen $9^{\circ}0$). Dadurch sind in Göttingen die Wellen mit großen Perioden relativ stark hervorgehoben. Bei der Vergleichung der Kurven muß man natürlich auch die verschiedenen Maßstäbe für die Zeit berücksichtigen. (In Upsala 1 Min. = 15 mm, in Göttingen 1 Min. = 19 mm).

Ungefähr 8 Minuten nach dem Auftauchen des Bebens setzt in Upsala, um $3^h 7^m 35^s$, ein Einsatz, der zum zweiten Vorläufer gehört, sehr scharf ein. Derselbe Einsatz erscheint in den Göttinger Seismogrammen 31 Sek. später.

Im Anfang des Hauptbebens zeigen die Seismogramme der *N-S* Komponenten von den beiden Stationen, unter anderen Wellen, Wellen mit Perioden von 60–70 Sek. (Amplitude der Erdbewegung in Upsala ungefähr 0.4 mm, in Göttingen 0.5 mm). In dem Nachbeben kommen in Upsala nur Perioden von 12–25 Sek. vor, deren Amplituden nach $4^h 25^m$ nie größer als 0.01 sind bis zu $4^h 36^m 0$, wo eine auffallende Welle im Seismogramm der *N-S* Komponente (dagegen nicht in der *E-W* Komp.) mit einer Periode von ungefähr 67 Sek. und einer Amplitude von 0.17 mm erscheint. Diese Nachstörung erscheint in Göttingen (mit einer Periode von 60^s und einer Amplitude von 0.12 mm) um $2^m 4$ früher als in Upsala. Bei der Vergleichung der Seismogramme möchte ich den Unterschied der entsprechenden Phasen, freilich mit einiger Unsicherheit, zu $2^m 1$ schätzen.

Da der Einsatz, der zum zweiten Vorläufer gehört, später, die Nachstörung aber früher in Göttingen als in Upsala erscheint, muß man annehmen, daß sie von entgegengesetzten Richtungen gekommen sind, und daß also die Nachstörung die Erde über den Antipodenpunkt umkreist hat.

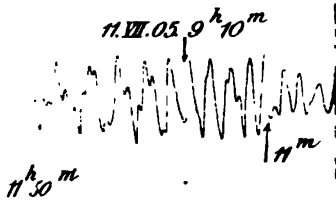
Da der Erdbebenherd noch nicht bekannt ist, ist durch diese Nachstörung keine Schätzung der Geschwindigkeit gewonnen, womit die Welle um die Erde gelaufen ist.

Es ist bemerkenswert, daß die in diesem Beispiel besprochene Nachstörung den Wellen entspricht, die die größten Perioden haben und die im Anfange des Hauptbebens vorkommen. Die von Omori bemerkten Nachstörungen entsprechen dagegen Wellen mit einer mittleren Periode, die im Hauptbeben etwas später hervortreten. —

Ein zweites Beispiel liefert das auch von Angenheister ¹⁾

1) Angenheister l. c.

erwähnte Erdbeben vom 10. Dec. 1905. Ein Einsatz des ersten Vorläufers dieses Bebens ist in Upsala um 12^h 46^m 0^s und in Göttingen 54^s später registriert. Die von Angenheister besprochene Nachstörung ist in den Göttinger Seismogrammen von 15^h 7^m bis zu 15^h 31^m zu finden. Sie zeigt zwei Maxima, ein größeres um 15^h 10^m und ein kleineres um 15^h 14^m. In der Registrierung aus Upsala ist diese Nachstörung nur von 15^h 14^m bis zu 15^h 19^m bemerkbar und somit später als die Maxima in Göttingen auftraten. Die Verhältnisse sind also analog mit denen des ersten Beispieles. Nur ist zu bemerken, daß in diesem zweiten Beispiel die Periode der Nachstörung 20 Sek. beträgt und nicht der größten sondern einer mittleren Periode des Hauptbebens entspricht.

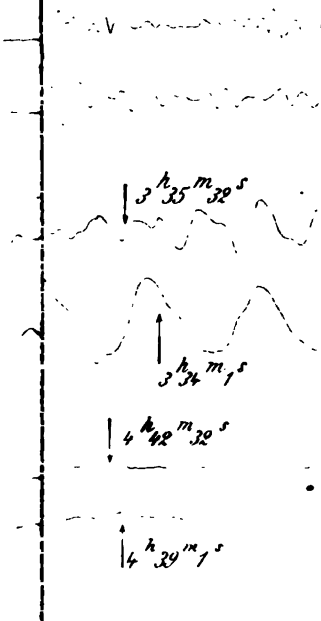


8.IX.05. ↓ 4^h 49

5^h

10.XI.05. 13^h 20^m

15^h 10.XI.05.



Phasen:

- P = undae primae = erste Vorläufer.
 S = „ secundae = zweite Vorläufer.
 L = „ longae = Hauptbeben („lange Wellen).
 M = „ maximae = größte Bewegung im Hauptbeben.
 [Verschiedene relativ größte Bewegungen werden durch besondere, M zugefügte Indices bezeichnet].
 C = coda = Nachläufer.
 F = finis = Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Art der Bewegung:

- i = impetus = Einsatz.
 e = emersio = Auftauchen.
 T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
 A = Amplitude, gerechnet von einer Seite zur anderen.
 Δg = größte Beschleunigung während einer Schwingung.
 $[\Delta g$ — nicht aber A — stellt ein Maß für die Intensität der Erderschütterung dar].
 $A_e, \Delta g_e$ = E — W Komponenten von A und Δg .
 $A_s, \Delta g_s$ = N — S „ „ „ „ „

Zeit und Maß:

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.

μ = Mikron = 1/1000 Millimeter.

Milligal = 1/1000 Gal; Gal = Centimeter-Sekunden-Einheit der Beschleunigung.

[Bei periodischen Schwingungen ist $\Delta g = \text{ca. } \frac{2A}{T^2}$, wenn Δg nach Milligal, A nach Mikron, T nach Sekunden gerechnet wird].

Bis zum Ende Dec. 1904 war das Pendel fast ungedämpft, die Luftkanäle der Luftdämpfer standen offen. Für diese Zeit habe ich die Amplitude der Erdbebenwellen in Millimeter angegeben, so wie sie auf den beruften Papierstreifen abgelesen wurden. Vom ersten Januar ab war dagegen schon eine größere Dämpfung eingeschaltet und seither habe ich aus den auf den Streifen abgelesenen Amplituden die entsprechenden Bewegungen der Erdoberfläche berechnet und in den Tabellen eingeführt. Die mikroseismische Bewegung habe ich nur für die Zeit nach dem ersten Januar angegeben.

Die beruften Papierstreifen wurden vom Uhrwerk des Appa-

rates mit einer Geschwindigkeit von 15 mm in der Minute herumgedreht. Die Kontaktuhr markierte die Zeit, für jede Minute durch Unterbrechung der Registrierung während 3 Sekunden und für jede Stunde durch eine Unterbrechung während 10 Sek. Der Uhrstand wurde wenigstens einmal, im allgemeinen zweimal wöchentlich durch Vergleichung mit einem transportablen Kronometer der Sternwarte erhalten.

Die für die Auswertung der Diagramme nötigen Konstanten des Apparates wurden nach den Anweisungen Wiecherts bestimmt¹⁾. Hierbei wurde eine Ungleichförmigkeit in der Wirkungsweise des Apparates bemerkt, die in der nächsten Zukunft beseitigt werden wird. Die reduzierten Perioden der Eigenschwingungen des Pendels ebenso wie die Indikatorlänge waren nämlich für verschiedene Azimuten verschieden. Sie erhielten ihre größten und kleinsten Werte, wenn die Ausschläge und Schwingungen in den Richtungen *SW—NE* oder *SE—NW* stattfanden. In jener Richtung waren die Indikatorlänge $J = 6400$ Meter und die reduzierte Schwingungsperiode $T_0 = 10.5$ Sek. In dieser Richtung dagegen $J = 3200$ M., $T_0 = 7.3$ Sek. Die Indikatorvergrößerung V war für alle Richtungen ungefähr 235. Die Relaxationszeit τ war, von Januar ab, für Schwingungen in allen Richtungen circa 5 Sek.

Die Vergrößerung

$$v = V: \sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \frac{T^2}{T_0^2}}$$

bei einer periodischen Bewegung mit der Periode T wurde wegen der besprochenen Ungleichförmigkeit verschieden je nach der Richtung der Bewegung. Da es doch zu umständlich gewesen wäre, jedesmal die Bewegungsrichtung zu berücksichtigen, so habe ich immer die in den Tabellen in μ angegebenen Amplituden aus den in mm abgelesenen Werten einfach durch Division mit dem arithmetischen Mittel von dem größten und dem kleinsten Werte, die T entsprechen, ermittelt.

Die Angaben über die Mikroseismische Bewegung beziehen sich immer auf die Stunde 7^h30^m—8^h30^m Vormittags.

Die Auswertung der Seismogramme habe ich nach dem Vorschlag des Herrn Professor Wiechert auf dem Geophysika-

1) E. Wiechert, l. c. S. 445 — 448. — Theorie der automatischen Seismographen. Abhandlungen d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1903, S. 78 ff.

lischen Institut in Göttingen ausgeführt. Für die große Freundlichkeit mir sein Institut in solcher Weise zu öffnen, sage ich ihm hier meinen herzlichsten Dank.

Dadurch gewann ich den großen Vortheil, die Seismogramme aus Upsala mit den entsprechenden aus Göttingen vergleichen zu können. Für den vorliegenden Bericht habe ich diese Gelegenheit in solchen, ziemlich oft vorkommenden Fällen benutzt, wo besondere Erdbebenphasen so ähnlich in Upsala und in Göttingen registriert wurden, daß man in den Registrierungen ganz genau die entsprechenden Punkte finden konnte. Durch einen solchen direkten Vergleich der Kurven bekommt man den Zeitunterschied des Auftretens derselben Phase an den beiden Stationen viel zuverlässiger, als wenn man die in veröffentlichten Berichten vorkommenden Zeitangaben für die Hauptphasen des Bebens vergleicht. Es kann nämlich vorkommen, daß in den Berichten aus verschiedenen Stationen verschiedene Phasen der Erdbewegung für den Anfang einer Hauptphase gehalten wurden. Aber auch abgesehen von dieser Möglichkeit, wird oft der Anfang einer Hauptphase ein wenig willkürlich angegeben. Außerdem ist man bei einem direkten Vergleich der Kurven nicht zu den Einsätzen der Hauptphasen beschränkt. Alle hier unten in den Kolumnen der Bemerkungen eingeführten Angaben über den Zeitunterschied zwischen dem Auftreten in Upsala und Göttingen von derselben Phase, wurden durch solche direkten Vergleichen erhalten.

Erdbebenregistrierungen Okt. — Dec. 1904.

| Nr. | Datum 1904 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rio- den T | Amplituden der Schreib- stifte | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|---|--|-------------------------------|---|------------------|---|
| | | | | | | Δ_H mm | Δ_V mm | |
| 1 | Okt. 8 | IIu | i L M C F | 18 ^a 58 ^m 32 ^s 19 18.8 24 50 | 8' 20 12 | 1.0 2 | 1.0 4 | |
| 2 | " 9 | IIIr | iP S iL M C F | 13 55 42 58 40 14 0 21 0.4 15 5 | 6 1 28 5 16 12 | 7 6 8 44 | 37 | |
| 3 | " 10 | I(u) | e M ₁ M ₂ C F | 17 49.5 50.2 50.9 18 0 | 20 13 8 | 1.5 4.2 | 1.1 2.3 | |
| 4 | " 22 | I(u) | e M _H M _V F | 18 18 20.1 21.3 30 | 12 12 | 0.3 | 0.2 | |
| 5 | " 23 | III d | iP iL | 10 28 7 28.9 29 0 ¹⁾ | 0.7 —1.5 7 7 | 10 4 11 | 2.1 2.2 9 | Erdbeben gefühlt in den drei Skandinavischen Ländern. |

1) Die beiden Schreibarme wurden losgeschleudert. Der zu der E—W Comp. gehörige hatte doch unmittelbar vorher einen Ausschlag von 75 mm nach der einen Seite der Ruhelage gezeichnet.

| Nr. | Datum 1904 | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden der Schreib- stifte | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|-----------|--|--|-------------------------------|---|--------------------------|-------------------|
| | | | | | | A_H mm | A_N mm | |
| 6 | Okt. 28 | Iu | eP iS M M _H ¹ M _H ² F | 14 ^h 9 ^m 13 ^s 15 36 45 49 54.7 15 10 | 7—11 30 30 22 | 1.2 0.3 0.5 1.2 | 0.8 0.7 0.4 0.4 | Geführt auf Java. |
| 7 | Nov. 6 | Iu | e M F | 4 50 5 5 5 15 | 13—16 15 | 0.9 2 | 1.1 | |
| 8 | " 9 | IIr | e(P) (S) (L) M _H M _H C F | 3 39 38 45 59 47.2 52.7 52.8 54.0 4 10 | 10 6 8 10 10 8 | 0.8 3.8 3 4.2 | 0.4 1.0 6 2 | |
| 9 | " 22 | Iu | e (L) M _H M _H C F | 1 42 2 8.4 13.4 17.2 50 | 18 20 23 20 18 | 0.3 1.0 1.0 | 1.0 | |
| 10 | " 27 | Iu | e M F | 7 41 55 8 15 | 16 | 0.2 | 0.3 | |
| 11 | " 30 | Iu | e M | 15 10 14.5 | 20 20 | 0.4 | 0.4 | |
| 12 | Dec. 2 | Iu | i(S) (L) M _H C F | 2 43 22 58.7 3 11 30 | 20 16 | 1.2 | 0.8 | |
| 13 | " 11 | Iu | e M F | 9 49 58 10 10 | 20 | 0.7 | 0.5 | |
| 14 | " 11 | Iu | (S) ¹⁾ (L) M ₁ | 17 35 25 18 0 5 | 40 | 0.5 | 0.2 | |

1) In Göttingen 70°
früher

| Nr. | Datum 1904 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rio- den T | Amplituden der Schreib- stifte | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|--|---|---------------------------------|---|----------------------------|-----------------------------|
| | | | | | | A _H mm | A _N mm | |
| | Dec. 11 | | M ₂ C F | 18 ^h 14 ^m 35 | 25 18 | 0.8 | 0.5 | |
| 15 | " 16 | I(r) | e M F | 7 27 28.6 35 | 9 | 4.7 | 1.3 | |
| 16 | " 19 | Iu | e M ₁ M ₂ C F | 18 50 19 5 18.5 50 | 45 24 20 | 0.5 | 0.8 1.5 | |
| 17 | " 20 | IIu | iP iS ¹⁾ i L M _H M _N C F | 5 57 6 6 7 49 13 48 24 25.5 26.4 8 20 | 12 8 32 25 36 18 | 9.5 6 8 | 12.2 3.7 4 | 1) In Göttingen 18' früher. |
| 18 | " 21 | Iu | e M F | 2 0 27.5 40 | 20 | 0.4 | 0.3 | |
| 19 | " 22 | Iu | eM | 6 52 | 20 | 0.2 | 0.2 | |
| 20 | " 27 | Iu | iP iS (L) F | 22 56 12 23 4 8 12.3 19.0 30 | 4 1 4 16 (24) | 0.4 0.4 | 0.4 1.1 0.4 (0.2) | |
| 21 | " 28 | I(u) | eM F | 6 27 35 | 14 | 0.4 | | |

Erdbebenregistrierungen Januar—Mai 1905.

| Nr. | Datum 1905 | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | Beschleunigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|-----------|--|--|--------------------------------|--------------------|-------------------|-----------------------------|----------------------------|--|
| | | | | | | A _z | A _{z'} | Δ _z | Δ _{z'} | |
| 1 | Jan. 9 | Iu | e F | 6 ^h 30 ^m 37 45 | s 16 | μ 11 | μ 20 | 0.09 | 0.16 | Die Zeitangaben sind nur ungefähr angegeben, weil die Zeitmarkierung einige Stunden versagt hat. 1) In Göttingen 66' später |
| 2 | " 13 | II u | S ¹⁾ L M ₁ M ₂ C F | 13 49 54 14 19 25 23.5 28 55 | 30 24 18 | 50 60 | 50 150 | 0.1 0.2 | 0.1 0.5 | |
| 3 | " 13 | Iu | e M _z M _{z'} C F | 19 12 14 20 35 | 20 20 16 | 12 6 | 6 16 | 0.06 0.03 | 0.03 0.08 | |
| 4 | " 19 | Iu | e M F | 22 52 23 4 10 | 98 | 24 | 32 | 0.03 | 0.04 | |
| 5 | " 20 | IIr | iP ²⁾ iS ²⁾ L ²⁾ M _z M _{z'} C F | 2 37 13 41 2 43 52 45.8 47.8 3 25 | 1.4 5—6 8 8 8 8 | 2 9 100 | 1 7 6 | 0.1 0.3 2.5 | 1 0.4 0.2 3 | Zerstörendes Beben in Thessalien. 2) In Göttingen P 68' früher S 124 " L 196 " |
| 6 | " 20 | Iu | e M F | 18 29 43 19 | 80 | 40 | 30 | 0.09 | 0.07 | |
| 7 | " 22 | IIu | eP i iS ³⁾ | 2 59 57 3 0 56 7 35 | 14 8 2—4 12 | 13 8 2 67 | 9 3 2 30 | 0.13 0.25 0.4 0.9 | 0.09 0.09 0.4 0.4 | 3) In Göttingen 31' später. |

| Nr. | Datum 1906 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rio- den T | Ampli- tuden | | Beschleu- nigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|---|--|--|-----------------------------|------------------------------------|--|----------------------------|---|
| | | | | | | A _n | A _n | A _g | A _g | |
| | Jan. 22 | | (L) | 3 ^h 25 ^m . 28 M ₁ 32 M ₂ 40.7 M ₃ 45 C F 4 36.0 5 20 | s 60 40 28 22 12-25 (67) ¹⁾ | μ — 120 340 210 | μ 400 360 — 235 170 | — 0.2 0.15 0.9 0.9 (0.08) | 0.45 — 1.0 | 1) Diese Welle wurde in Göttingen ungefähr 2 ^m .1 früher registriert, sie scheint entgegen der Fortpflanzungsrichtung des Hauptbebens und über den Antipodenpunkt gekommen sein. — s. F. Åkerblom, Vergleichung der Diagramme aus Upsala und Göttingen von Fernbeben, deren Wellen die Erde umkreist haben. Diese Zeitschrift Heft I. 1906. |
| 8 | " 29 | Iu | e M F | 12 45.7 51 55 | 30 16 | 22 | 22 | 0.2 | 0.2 | |
| 9 | Febr. 1 | Iu | e M F | 22 48 5 56.2 23 5 | 16 | 4 | 8 | 0.08 | 0.06 | |
| 10 | " 2 | Iu | e M F | 21 44 55 22 5 | 20 | 12 | 6 | 0.06 | 0.08 | |
| 11 | " 7 | Iu | M _n M _n | 22 48 ²⁾ 50 ²⁾ | 18 18 | 20 | 11 | 0.1 | 0.07 | |
| 12 | " 13 | Iu | e(L) M ₁ M ₂ C F | 6 6 0 32.1 39.4 7 40 | 28 28 20 20 | 17 — ³⁾ 20 | 17 34 30 | 0.04 0.04 0.10 | 0.04 0.09 0.15 | 3) Die Registrierung der E-W-Comp. ist an dieser Stelle zerstört. |
| 13 | " 14 | Iu | P iS ⁴⁾ i ₂ (L) M _n M _n F | 8 57 36 9 6 34 8.1 18 40 19.6 28.6 12 0 | 5 1 15 6 16 10 80 20 20 | 2 6 20 15 | 5 8 22 20 | 0.16 0.3 0.16 0.3 | 0.4 0.07 0.17 0.4 | 4) In Göttingen 91 ⁴ später. |
| 14 | " 17 | Iu | P S L | 11 51 47 12 0 22 1 18 13 | 1 2 8 10 10 40 | 1 2 2.6 10 | 2 1 1.3 | 2 1 0.08 | 0.04 | |

| Nr. | Datum 1905 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rioden T | Ampli- tuden | | Beschleu- nigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|---|--|--------------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------------|---------------------|---|
| | | | | | | A _h | A _v | A _h | A _v | |
| | Febr. 17 | | M ₁ M ₂ C F | 21 ^h 14 ^m .8 ^s 18.5 13 30 | ^s 40 15 12 | ^μ 90 110 | ^μ 180 100 | 0.1 1.0 | 0.2 0.9 | |
| 15 | " 18 | Iu | e M F | 15 20.8 27.3 40 | 20 | 8 | 8 | 0.04 | 0.04 | |
| 16 | " 19 | Iu | e M F | 5 0 48 7 5 | 30 | 110 | 125 | 0.24 | 0.28 | |
| 17 | " 25 | Ir | eP S L,M F | 2 11 29 13.6 14 42 30 | 4 9 14 | 2 2 14 | 4 2 6 | 0.25 0.14 | 0.5 0.05 0.06 | |
| 18 | " 25 | Ir | eP (L) M F | 2 44 37 47.2 48 55 | 3-4 10 10 | 1 2 | 3 1 | 0.2 0.04 | 0.5 0.02 | |
| 19 | " 26 | Iu | e M F | 3 37 41 55 | 20 20 | 10 | 12 | 0.05 | 0.06 | |
| 20 | " 27 | Iu | P ¹⁾ iS ²⁾ (L) M C F | 17 44 2 18 6 0 29.6 38.8 19 40 | 5 15 28 30 20 | 1 14 19 | 3 — 48 | 0.08 0.12 0.04 | 0.24 — 0.1 | 1) In Göttingen 44' später. 2) In Göttingen 95' später. Herd ungefähr 1600 km entfernt von Apia. (Nach den Berichten des Samoa-Observatoriums in Apia). |
| 21 | März 4 | Iu | e M C F | 16 28.4 59 17 13 | 25 18 16 | 6 19 | 26 26 | 0.02 0.12 | 0.08 0.16 | |
| 22 | " 4 | Iu | e M C F | 19 0 45 20 20 | 16 18 16 | 11 | 13 | 0.07 | 0.08 | |
| 23 | " 4 | Iu | eP i ³⁾ iS ⁴⁾ | 23 37 0 42 39 46 34 | 5-6 6 20 | 1 3 24 | 1 3 24 | 0.07 0.2 0.1 | 0.07 0.2 0.1 | 3) In Göttingen 28' später (ungefähr). 4) In Göttingen 62' später (ungefähr). |

| Nr. | Datum 1905 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rioden T | Ampli- tuden | | Beschleunigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|--|---|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| | | | | | | A _u | A _h | Δ _u | Δ _h | |
| | März 5 | | M C F | 0 ^h 27 ^m .2 ^s 2 10 | ^s 16 16 | ^μ 36 | ^μ 36 | 0.3 | 0.3 | |
| 24 | " 14 | Ir | e(S) L M ₁ M ₂ C F | 11 0 5 37 6.0 9.0 20 | 5 8 14-16 14-16 10 | 1 9 18 | 4 2 16 9 | 0.08 0.02 0.04 | 0.3 0.06 0.04 0.02 | In Irkeschtam (Fergana) gefühlt. |
| 25 | " 15 | Ir | e M _u M _h F | 18 16 36 20.3 23.0 35 | 8-10 12 12 | 2 2 6 | 2 11 2 | 0.03 0.08 0.08 | 0.05 0.15 0.03 | |
| 26 | " 15 | I(u) | e M F | 19 39 42.5 20 0 | 16 | 4 | 5 | 0.03 | 0.04 | |
| 27 | " 16 | I(u) | e M F | 14 32 39 40 | 16 16 | 1 | 1 | 0.01 | 0.01 | |
| 28 | " 17 | Ir | e M F | 2 11 9 11 30 12.2 15 | 1.5 6 | 0.8 | 1.4 | 0.04 | 0.08 | |
| 29 | " 17 | Iu | e M ₁ M ₂ C F | 22 31 34 37.5 23 0 | 27 20 16 | 16 16 | — 6 | 0.04 0.08 | 0.08 | |
| 30 | " 19 | Iu | eP i(S) M ₁ (L) M ₂ C F | 0 17.5 20.0 20 48 21.0 42.4 57.5 1 11.0 3 10 | 10 12 20 35 20 18 | 3.4 26 44 95 52 | 3.6 32 36 68 60 | 0.07 0.4 0.2 0.2 0.3 | 0.07 0.4 0.2 0.1 0.3 | Herd ungefähr 3000km entfernt von Apia. (Nach den Berichten des Samoa-Observatoriums in Apia). |
| 31 | " 22 | Iu | iP ¹⁾ | 3 49 49 | 4-5 1.5 | 2 1 | 5 2 | 0.2 0.9 | 0.5 1.8 | 1) In Göttingen 46 ^h später. |

| Nr. | Datum 1905 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- rioden T | Ampli- tuden | | Beschleunigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|---|--|--|---|---------------------------------|--|--------------------------|--|
| | | | | | | A _n | A _{n'} | Δ _n | Δ _{n'} | |
| | März 22 | | S | 8 ^h 58 ^m 42 ^s | 5 12 24 30 30 24 16 | μ 5 14 30 58 130 | μ — 14 32 67 165 | 0.4 0.2 0.1 0.1 0.1 0.5 | 0.2 0.1 0.1 0.6 | |
| | | | L | 4 11 40 13.5 17.3 | 30 30 24 16 | | | | | |
| | | | M C F | 6 40 | | | | | | |
| 32 | " 22 | Iu | e M F | 11 50 59 12 5 | 16 | 5 | 4 | 0.04 | 0.03 | |
| 33 | April 3 | Iu | eM F | 8 16.0 8 20 | 14 | 4 | 4 | 0.04 | 0.04 | |
| 34 | " 3 | Ir | e M F | 16 12.6 14.7 20 | 10 | 1.4 | 1.4 | 0.03 | 0.03 | |
| 35 | " 4 | IIIu | P ¹⁾ i iS ²⁾ (L) M ₁ M ₂ C F | 0 58 22 1 0 31 5 19 12.6 17.4 20.2 4 5 | 1.5 5 5 7 15 9 9 16 | 5 35 90 80 600 ³⁾ 620 ⁴⁾ | 1 30 60 60 540 | 4 3 7 8 15 15 | 1 2 5 2 13 | 1) In Göttingen 28 ^o später. 2) In Göttingen 57 ^o später. 3) Die Schreibfeder der N.S-Comp. wurde in die- sem Augenblick abge- worfen und die betref- fende Komponente ist nachher nicht registriert worden. |
| 36 | " 4 | Ir | e L M _n M _{n'} C F | 10 35.5 36.4 36.5 38.0 50 | 10 10 10 10 8 | 5 3 | 3 4 | 0.1 0.06 | 0.06 0.08 | 4) In diesem Augen- blick wurde auch die Schreibfeder der E.W- Comp. aus ihrem Lager geworfen, blieb aber am Schreibarm, sitzen und schrieb weiter. |
| 37 | " 4 | Ir | e M M _{n'} F | 11 11.5 12.0 13.5 15 | 10 10 | 1.1 0.7 | 0.7 1.4 | 0.02 0.01 | 0.01 0.03 | |
| 38 | " 10 | Iu | e M F | 12 46 52.5 13 0 | 14 | 3 | 3 | 0.03 | 0.03 | |
| 39 | " 19 | Iu | eP | 12 50.7 | 4 | 0.5 | 0.7 | 0.06 | 0.09 | |

| Nr. | Datum 1905 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- ri- oden T | Ampli- tuden | | Beschleu- nigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|-------------------|---|-------------------------|-----------------|----------------|----------------------------------|----------------|---|
| | | | | | | A _s | A _N | Δ _s | Δ _N | |
| | April 19 | | | | | | | | | |
| | | | i | 12 ^h 54 ^m 41 ^s | 1.5-2 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.3 | |
| | | | (S) | 13 12.7 | 4 | 4 | 4 | 0.5 | 0.5 | |
| | | | M ₁ | 47 | (12) | 2 | 1 | (0.09) | (0.01) | |
| | | | M ₂ | 50 | 26 | 6 | 6 | 0.02 | 0.02 | |
| | | | C | | 20 | 5 | 4 | 0.02 | 0.02 | |
| | | | F | 14 40 | 20 | | | | | |
| 40 | " 24 | Iu | eM | 8 54 | 20 | — | 2 | | 0.01 | |
| | | | F | 9 0 | | | | | | |
| 41 | " 25 | Iu | eP | 9 48 6 | 1.5-2 | — | 0.4 | | 0.2 | |
| | | | i ¹⁾ | 46 29 | 5 | 2 | 7 | 0.2 | 0.6 | 1) In Göttingen 26 ^h später. |
| | | | (L) | 10 37.7 | 10 | (0.7) | 0.7 | 0.01 | 0.01 | |
| | | | M | 40.6 | 24 | 12 | 12 | 0.04 | 0.04 | |
| | | | C | | (12) | | | | | |
| | | | F | 11 0 | | | | | | |
| 42 | " 25 | Ir | e | 14 12.5 | 4-6 | 0.9 | 0.6 | 0.07 | 0.05 | |
| | | | M | 15 | 9 | 0.9 | 0.9 | 0.02 | 0.02 | |
| | | | F | 17 | | | | | | |
| 43 | " 26 | Iu | e | 5 50 | (28) | — | 10 | | 0.03 | |
| | | | C | 6 0.4 | 16 | — | 5 | | 0.04 | |
| | | | | | 16 | | | | | |
| 44 | " 26 | Iu | eP | 22 1 27 | 5-6 | 0.9 | 0.6 | 0.05 | 0.03 | |
| | | | | 7 31 | 8 | 1.0 | 0.5 | 0.03 | 0.02 | |
| | | | (S) ²⁾ | 9.0 | 10 | — | 4 | | 0.08 | |
| | | | i | 10.6 | 14 | 9 | 4 | 0.09 | 0.04 | 2) In Göttingen 2 ^h 10 ^m früher. |
| | | | (L) | 16.5 | 14 | 5 | 8 | 0.05 | 0.08 | |
| | | | M ₁ | 28.2 | 30 | | | | | |
| | | | M ₂ | 29.5 | 30 | 14 | 48 | 0.03 | 0.1 | |
| | | | C | 39.7 | 26 | 40 | 22 | 0.12 | 0.06 | |
| | | | F | 23 20 | 18 | | | | | |
| 45 | " 29 | Ir | e(S) | 1 53 37 | 6 | 0.5 | — | 0.03 | | |
| | | | L | 54 38 | 8 | 1.0 | 0.5 | 0.03 | 0.02 | Erdbeben gefühlt in der West-Schweiz und Südost-Frankreich. |
| | | | iM ₁ | 55 53 | (16) | 6 | 4 | 0.3 | 0.2 | |
| | | | M ₂ | 56.5 | 6 | 5 | 3 | 0.2 | 0.1 | |
| | | | C | | 7 | | | | | |
| | | | F | 2 20 | | | | | | |
| 46 | " 30 | IIr | P | 16 14 24 | 1.5 2 | 0.4 2 | 0.4 2 | 0.4 1 | 0.4 1 | |

| Nr. | Datum 1905 | Cha- rak- ter | Pha- sen | Zeiten (Greenwich) | Pe- ri- oden T | Ampli- tuden | | Beschleu- nigung. Milligal | | Bemerkungen. |
|-----|---------------|---------------------|--|---|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--|
| | | | | | | A _W | A _N | Δ _{W,N} | Δ _{W,N} | |
| | Mai 18 | | C F | 16 ^h 30 ^m | ^s 16-18 | μ | μ | | | |
| 54 | „ 20 | Ir | P S (L) ¹⁾ M ₁ M ₂ C F | 10 11 24 15.7 20.7 23.2 24.2 35 | 2 4 4-5 18 14 10 | 1.6 2.3 6 8 | 1.2 2.6 6 7 | 0.8 0.2 0.04 0.08 | 0.6 0.2 0.04 0.07 | 1) In Göttingen un- gefähr 1 ^m früher. |
| 55 | „ 23 | Iu | e M C F | 6 34 7 23 8 25 | 16 23 18 | 5 8 | 4 8 | 0.04 0.03 | 0.03 0.03 | |
| 56 | „ 25 | Iu | e M F | 4 24 39 5 0 | 20 20 | 4 | — | 0.02 | | |
| 57 | „ 27 | I(v) | eP (L) M C F | 19 48.0 48 48 50.1 56 | 5 1 16 6-8 5 | 1.2 1.2 4 3 | 0.6 0.2 2 1 | 0.1 2.4 0.03 0.1 | 0.05 0.4 0.02 0.04 | |
| 58 | „ 31 | Iu | P iS L M ₁ M ₂ M ₃ C F | 18 35 58 46 3 19 6.4 9.5 11.9 14.2 55 | 5 2 8 23 16 16 14 12 | 0.9 7 11 23 18 | 0.5 2 25 12 25 | 0.07 0.2 0.1 0.2 0.2 | 0.04 0.06 0.2 0.1 0.3 | |

Mikroseismische Bewegung 8^a a. m. Jan.—Mai 1905.

| Datum | Januar | | Februar | | März | | April | | Mai | | Datum |
|-------|--------|----------------|---------|----------------|------|----------------|-------|----------------|-----|----------------|-------|
| | T | A _N | T | A _N | T | A _N | T | A _N | T | A _N | |
| | s | μ | s | μ | s | μ | s | μ | s | μ | |
| 1 | 4-6 | 1 | 5 | 2 | 5-6 | 1 | 4-5 | 1 | 4-5 | < 1 | 1 |
| 2 | 5-6 | 3 | 4 | 1 | 5 | 1 | 4-5 | < 1 | 4-5 | 1 | 2 |
| 3 | 5-6 | 5 | 4-5 | 1 | 4-5 | 1 | 4 | 1 | 4-5 | 1 | 3 |
| 4 | 6 | 6 | 5 | 2 | 4-5 | 1 | | | 5 | < 1 | 4 |
| 5 | 6 | 2 | 4 | 1 | | < 1 | 4 | 2 | | < 1 | 5 |
| 6 | 5 | 1 | 6 | 2 | 4-5 | < 1 | 5 | < 1 | | < 1 | 6 |
| 7 | 5-6 | 1 | 5-6 | 3 | 4-6 | 1 | 4-6 | 1 | 4-6 | 1 | 7 |
| 8 | 5-7 | 3 | 5 | 2 | 4-8 | 1 | 5 | 1 | 5-6 | < 1 | 8 |
| 9 | 6-7 | 3 | 5 | 2 | 8 | 1 | 5 | 1 | | < 1 | 9 |
| 10 | | | 6 | 3 | 6-7 | 1 | 5 | 1 | 4-5 | 1 | 10 |
| 11 | 6 | 3 | 6 | 3 | 4-8 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 11 |
| 12 | 5-6 | 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 4-5 | 1 | 4-5 | 1 | 12 |
| 13 | 5-6 | 2 | 5-6 | 1 | 4-5 | 3 | 5 | < 1 | 5-6 | 1 | 13 |
| 14 | 5 | 1 | 5 | 3 | 4-8 | 1 | 5 | < 1 | | < 1 | 14 |
| 15 | 6-8 | 2 | 4-5 | 1 | 6 | 1 | 5 | < 1 | | < 1 | 15 |
| 16 | 7 | 1 | 5 | 1 | 4-6 | 1 | 5 | < 1 | | < 1 | 16 |
| 17 | 7 | 2 | 5-6 | 2 | 5 | 1 | | < 1 | | < 1 | 17 |
| 18 | 7 | 1 | 7 | 2 | 4-5 | 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 18 |
| 19 | 5-6 | 1 | 5-6 | 3 | 4-5 | < 1 | | < 1 | | < 1 | 19 |
| 20 | 6 | 1 | 5-7 | 3-5 | 6 | < 1 | | < 1 | 4-5 | 1 | 20 |
| 21 | 5-6 | 1 | 6 | 2 | 5-8 | < 1 | | < 1 | 4 | < 1 | 21 |
| 22 | 5-6 | 1 | 5 | 2 | 5 | 1 | 4-6 | 1 | | < 1 | 22 |
| 23 | 5-6 | 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 5 | < 1 | | < 1 | 23 |
| 24 | 5-7 | 1 | 4-5 | 1 | 5-6 | 1 | 4 | < 1 | | < 1 | 24 |
| 25 | 6 | 1 | 5 | < 1 | 5-6 | < 1 | 4-6 | 1 | | < 1 | 25 |
| 26 | 6 | 2 | 5-6 | 1 | 5-7 | < 1 | | < 1 | | < 1 | 26 |
| 27 | 6 | 3 | 4-8 | 1 | 6 | < 1 | | < 1 | | < 1 | 27 |
| 28 | 5-6 | 2 | 5 | 2 | 4-5 | < 1 | | < 1 | | < 1 | 28 |
| 29 | 7-8 | 3-7 | | | 4-6 | < 1 | | < 1 | | < 1 | 29 |
| 30 | 6-7 | 3-8 | | | 4-5 | < 1 | 4 | < 1 | | < 1 | 30 |
| 31 | 6 | 2 | | | 4-5 | < 1 | | | | < 1 | 31 |

Ultramikroskopische Beobachtungen.

Zweite Mitteilung:

Zur Charakterisierung anorganischer Colloide.

(Gemeinschaftlich mit W. Geibel).

Von

Wilhelm Biltz.

**(Mitteilung aus dem chemischen Laboratorium der Bergakademie
Clausthal).**

Vorgelegt in der Sitzung vom 12. 5. 1906 von Herrn Wallach.

Zu ultramikroskopischen Beobachtungen hat man sich aus naheliegenden Gründen bisher vorzugsweise teilchenreicher Lösungen, besonders der Metallösungen bedient, während den Pseudolösungen anderer anorganischer Stoffe verhältnismäßig weniger Beachtung geschenkt worden ist. Neuerdings haben nun gerade teilchenarme, an der Grenze der Auflösbarkeit stehende oder unauflösbare Colloide ein größeres Interesse gewonnen, seitdem Zsigmondy¹⁾ an dem Beispiel der colloidalen Goldlösungen gezeigt hat, daß man durch besondere Kunstgriffe dieses durch Vielseitigkeit und Reichtum des ultramikroskopischen Bildes bekannte Hydrosol in nahezu optisch leerer Form gewinnen kann und den Schluß daran geknüpft hat, daß die Zerteilung des Goldes hierbei bis zu nahezu molekularen Dimensionen fortgeschritten sei. Es ist dies eine Frage von principieller Bedeutung: wenn man es nämlich in der Hand hat, einen und denselben Stoff in mikroskopischer Suspension, in ultramikroskopischer Verteilung und in optisch leerer Lösung zu erhalten, so wäre, wenn diese letzten wirklich einer molekularen Durchmischung von Lösungsmittel und Gelöstem

1) Zur Erkenntnis der Colloide, Jena. 1905.

entsprechen, ersichtlich die übliche Auffassung unzureichend, nach welcher Pseudolösungen nichts anderes als sehr feine, heterogene Gemische sind; denn Suspensionen von Partikeln molekularer Größe sind offenbar mit den wahren Lösungen identisch. Die Besonderheiten solcher pseudogelösten Stoffe gegenüber den wirklich gelösten müßten demnach auf andere Ursachen, als die Teilchengröße zurückzuführen sein.

Um weiteres Material zur Behandlung dieser Frage beizubringen, scheint demnach die Veröffentlichung einiger bereits früher in Angriff genommener und im Sommer 1905 im wesentlichen abgeschlossener Versuche am Platze, die den Zweck haben, die vorliegende Erfahrung über die ultramikroskopische Auflösbarkeit von Pseudolösungen durch Prüfung möglichst verschiedenartiger, anorganischer Stoffe, zu ergänzen und zu zeigen, in welcher Weise ihr ultramikroskopisches Bild z. T. in systematischer Weise von der Bereitungsweise abhängig gemacht werden kann. An dritter Stelle ist in Beziehung auf die in der ersten Mitteilung¹⁾ behandelte ultramikroskopisch discontinuierliche Abscheidung elementaren Schwefels und Selens eine unzweifelhaft kontinuierliche Bildung eines colloidal suspendierten Stoffes beschrieben.

Das zur Untersuchung verwendete Ultramikroskop von Siedentopf und Zsigmondy war das gleiche, wie das bei den früheren Arbeiten²⁾ benutzte, und mir von der optischen Werkstätte C. Zeiß, Jena, noch weiterhin in dankenswertester Weise zur Verfügung gestellt. Die Tiefe des beleuchteten Teiles der Lösungen wurde zur Erzeugung eines allseitig scharfen Bildes geringer, als früher, und zwar zu $10\text{--}12\mu$ gewählt, so daß also bei einer Breite des Bildes von 27μ ein Querschnitt von ca. $300\mu^2$ erhellt wurde. Da das im Okular des Beobachtungsmikroskopes angebrachte Netz von 18 (3:6 angeordneten) Quadraten einer Oberfläche von $18 \cdot (9\mu)^2$ im Objekte entspricht, so bedeckte das Quadratnetz demnach einen beleuchteten Raum von $11 \cdot 18 \cdot 81\mu^3$, also rund $16000\mu^3$, das einzelne Quadrat einen solchen von rund $890\mu^3$. Die Angabe der Teilchenzahl beziehen sich bei teilchenreichen Lösungen auf je ein Quadrat, bei ärmeren auf das Quadratnetz und bei ziemlich leeren Flüssigkeiten auf das ganze Gesichtsfeld, das etwa fünfmal größer als das Quadratnetz ist. Zur Taxirung der Stärke eines aus nicht einzeln zu unterscheidenden

1) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math. phys. Kl. 1904. Heft 4, 300.

2) I. c. und W. Biltz u. Z. Gatin-Gruzewska C. R. 139, 507 [1904]; Pfügers Arch. 105, 115 [1904].

Teilchen bestehenden Lichtkegels erwies sich in Ermangelung einer genauen Meßmethode immerhin als nützlich, zu prüfen, ob seine Helligkeit ausreichte, um die sich dunkel von ihm abhebende Quadratnetzteilung wahrzunehmen. Bei den Beobachtungen legten wir unser Augenmerk auf die Bestimmung der Zahl der Teilchen, ihrer Bewegung, ihrer Farbe und ihrer Helligkeit, ferner auf die Ermittlung der relativen Anzahl der Teilchen verschiedener Farbe und Helligkeit, auf das Auftreten eines Lichtkegels und auf das Altern der untersuchten Lösungen. Die Prüfung auf die Stärke der Polarisation des von den Teilchen abgelenkten Lichtes mit Hilfe eines auf das Okular aufgesetzten Analysators lehrte im allgemeinen nicht viel charakteristisches über die betreffende Lösung.

Die Beschaffung genügend reinen Wassers machte in dem Clausthaller Laboratorium weniger große Schwierigkeiten, als früher. In der Regel erwies sich das im Destillirapparate für analytische Zwecke bereitete Wasser unmittelbar als brauchbar.

Von Siedentopf und Zsigmondy ist vorgeschlagen worden, die jenseits der mikroskopischen Wahrnehmbarkeit ultramikroskopisch zu erkennenden Teilchen „Submikronen“, die selbst ultramikroskopisch nicht zu unterscheidenden Teilchen „Amikronen“ zu nennen¹⁾: von dieser Bezeichnungsweise wird auch im folgenden Gebrauch gemacht.

I.

Von anorganischen Colloiden sind bisher von Zsigmondy außer den nach seiner Vorschrift hergestellten Goldlösungen von Metallhydrosolen die Gold-, Platin-, Palladium- und Silberlösung nach Bredig, das colloidale Silber nach Carey Lea und das Hydrosol des Quecksilbers nach Lottermoser untersucht worden; ferner wurde Jodsilberhydrosol und colloidales Eisenoxyd, sowie Suspensionen von Jod, Baryumsulfat und Chlorsilber geprüft²⁾. Abgesehen vom colloidalen Eisenoxyd hatte sich überall die Anwesenheit zahlreicher Submikronen gezeigt.

Hieran schließen sich die folgenden neu untersuchten Colloide:

Aluminiumoxyd. Eine nach Graham bereitete, in Bezug auf Al_2O_3 0.038% Lösung war makroskopisch wasserklar. Ultramikroskopisch erschienen ein sehr schwacher Kegel und im Gesichtsfelde etwa 10 in fast völliger Ruhe befindliche Teilchen. Die

1) Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Colloide, Jena 1905, 87.

2) Zsigmondy, ebenda S. 146.

Quadratteilung war nicht sichtbar. In einer Verdünnung 1:10 konnte der Kegel nur andeutungsweise und nur selten einige Teilchen erkannt werden.

Chromoxyd. Die durch Dialyse von Chromnitrat hergestellte ¹⁾, 0,058% Oxyd enthaltende, klare, hellgrüne Lösung zeigte keinen Lichtkegel und im ganzen 10—12 kleine, schwach leuchtende und schwach bewegte Submikronen, also eine in Anbetracht der Stärke der Lösung ebenfalls nur ganz unwesentliche Menge.

Zirkonoxyd. Die nach der Nitratmethode erhaltene, farblose und nur äußerst schwach getrübbte, stark concentrirte (0.781%) Lösung lieferte ein fast völlig dunkles Bild mit ca. 12—15 fast bewegungslosen Teilchen. Ein 1:4 verdünnte Lösung war völlig dunkel.

Kieselsäure, nach Graham aus Wasserglaslösung dargestellt, war in einer Concentration von 0.536% der Zirkonoxyd-lösung fast völlig gleich.

Eisenoxyd. Ein nach der Nitratmethode dargestelltes frisches, nahezu klares Präparat von 0.073% Fe_2O_3 zeigte ebenso, wie eine mehrere Monate alte Lösung in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Zsigmondy einen starken Lichtkegel, der an der Grenze der Auflösbarkeit zu liegen schien, in Verdünnung aber nicht deutliche Einzelteilchen erkennen ließ.

Ein makroskopisch im auffallenden Lichte trüb erscheinendes Präparat von 0.242% zeigte einen intensiv gelbroten Lichtkegel mit unzählbaren, sehr kleinen, schwach bewegten Teilchen; bis zu einer Verdünnung von 1:320 herunter verlor sich der Lichtkegel mehr und mehr, während die Zahl der Teilchen immer noch unbestimmbar groß blieb.

Vanadinpentoxyd ²⁾. Die dunkelbraunrote, völlig klare, äußerlich dem Eisenoxydhydrosol ähnliche Lösung war auch ultramikroskopisch nicht von diesem verschieden. Die concentrirte Lösung enthielt auf intensiv gelbrotem Grunde unzählbare, äußerst feine Submikronen von anfänglich schwacher Bewegung, die nach einiger Zeit völlig aufhörte. Bei einer Verdünnung 1:320 blieben die Teilchen noch unzählbar und der Lichtkegel machte keinen völlig homogenen Eindruck mehr; auch dieses Colloid steht somit an der Grenze der Auflösbarkeit.

1) W. Biltz Ber. 35, 4431 [1902].

2) Ueber die Darstellung vgl. W. Biltz Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math. phys. Kl. 1905, Heft 1, 51.

Wolframblau¹⁾. Das aus einer 5% Lösung von Metawolframsäure durch Reduktion gewonnene tiefhimmelblaue Hydrosol war in frisch bereitetem Zustande nahezu optisch leer. Von einem Lichtkegel war nur eine Andeutung, von Teilchen waren ca. 8 im Gesichtsfelde erkennbar. Ein monatealtes Präparat zeigte einen sehr schwachen Kegel und unzählbare, äußerst feine, schwach bewegte Submikronen von so geringer Lichtstärke, daß das Quadratnetz nicht sichtbar wurde. Bei einer Verdünnung 1:64 waren weder Teilchen noch Kegel mehr erkennbar.

Molybdänblau. Eine durch Auflösen des festen Stoffes²⁾ hergestellte 0.1% Lösung von Molydänblau war teilweise optisch auflösbar. Eine 0.05% Lösung ließ einen deutlichen Lichtkegel erkennen — das Quadratnetz war sichtbar — und innerhalb eines Quadrates 2—3 schwach bewegte Submikronen.

Berliner Blau konnte in ultramikroskopisch leerer Lösung erhalten werden, wenn man im Laufe einer Stunde eine Lösung von 0.8 gr. Kaliumferrocyanid (doppelte berechnete Menge) in 200 ccm Wasser tropfenweise zu einer mittelst einer Turbine durchrührten Lösung von 0.4 gr krystallisiertem Eisenchlorid in 500 ccm Wasser fließen ließ. Die tiefblaue und makroskopisch völlig klare Lösung ließ im Ultramikroskope weder einen Kegel noch Teilchen erkennen. Erst nach Zusatz von Elektrolyt zeigten sich äußerst zahlreiche rote, aber sehr lichtschwache und kaum bewegte Submikronen; solche Lösungen sedimentierten indessen in kurzer Zeit, während eine nicht ausgesalzene monatelang haltbar war.

Eine dialysierte Lösung von Berliner Blau zeigte ebenfalls einen, wenn auch schwachen Lichtkegel mit unzähligen, äußerst feinen Submikronen. Demnach wächst in diesem Beispiel die Größe der Teilchen, sowohl bei Entziehung, wie bei Zugabe von Elektrolyt, wodurch ein Analogon zu den Beobachtungen geschaffen wird, nach denen die Beständigkeit gewisser Hydrosole, wie Kieselsäure und Eiweißkörper³⁾, an die Anwesenheit eines Elektrolyt-optimums geknüpft ist.

Nach den vorliegenden Beobachtungen bestehen demnach im Gegensatz zu den Metalllösungen die anorganischen, colloidal ge-

1) Ueber die Darstellung vgl. Scheibler, J. pr. Chem. 83, 313 [1861], W. Biltz Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math. phys. Kl. 1904 Heft 1, 1.

2) Ueber die Darstellung vgl. W. Biltz. Ebenda 1905, Heft 1, 87.

3) Jordis, Vers. d. Deutschen Bunsen-Ges. 1904; Z. f. Elektrochem. 10, 309 W. Biltz, Z. f. Elektrochem. 10, 937 [1904].

lösten Oxyde, unter denen sich typische und klassische Hydrosole, wie das der Kieselsäure und des Aluminiumoxyds befinden, im wesentlichen aus Amikronen; denn die erkennbaren Teilchen stehen an Zahl zu der Concentration der untersuchten Lösungen in meist ganz untergeordnetem Verhältnisse. Einige dieser Lösungen sind je nach der Reinheit und dem Alter optisch leer, oder ultramikroskopisch auflösbar.

II.

Zur Prüfung der Abhängkeit der ultramikroskopischen Beschaffenheit von der Bereitungsweise wurden Lösungen von Gold, Antimonsulfid und Arsensulfid herangezogen.

Zur Darstellung colloidalen Goldlösungen kann man bekanntlich entweder das Metall nach Bredig elektrisch zerstäuben oder Goldsalze in Lösung reduciren. Als Reduktionsmittel ist von Zsigmondy zuerst Formaldehyd in schwach alkalischer Lösung benutzt worden; später hat derselbe Autor die bereits von Faraday angewandte Reduktion mit Phosphor ausgearbeitet¹⁾. Die gewonnenen Lösungen zeigen sehr weitgehende Unterschiede²⁾: die mit Phosphor bereitete Lösung (Au P₁₈ der Tabelle auf Seite 104/105) war nahezu optisch leer, die mit Formaldehyd reducirten und die Bredig'schen Hydrosole zeigen das bekannte teilchenreiche, bunte und bewegte Bild; hieraus wurde geschlossen, dass jene Lösungen sich bereits beträchtlich an Homogenität der einer krystalloiden Lösung nähern, ohne dabei die wesentlichsten Merkmale einer typischen colloidalen Lösung eingebüßt zu haben³⁾. Es zeigte sich, daß unter den übrigen für die Reduktion von Goldsalzen vorgeschlagenen Reagentien: Kohlenoxyd, Natriumhydrosulfid und Acetylen, das letzte von Whitney und Blake⁴⁾ benutzte Mittel ebenfalls dunkle Lösungen liefert, daß die anderen aber nur unerheblich von der nach der ursprünglichen Zsigmondy'schen Anweisung bereiteten Goldlösung abweichen.

Als sehr gutes, durch die Erfahrungen der präparativen Colloidchemie nahegelegtes Mittel, die Zahl der sichtbaren Teilchen zu vermindern, erwies sich das Arbeiten in starker Verdünnung, wodurch die Vereinigung der bei der Entstehung der pseudogelösten Stoffe zunächst gebildeten Moleküle beeinträchtigt

1) Zur Erkenntnis der Colloide, Jena 1905, 100.

2) Ebenda S. 101 ff.

3) Ebenda S. 143.

4) Journ. Amer. Chem. Soc. 26, 1339 [1904].

und die anfängliche, ideal feine Verteilung weitgehend konserviert wurde. Antimonsulfidlösungen sind z. B. um so homogener, in je geringerer Concentration sie hergestellt sind, wie ein Vergleich mit solchen Lösungen zeigte, die, zunächst concentrirt bereitet, durch nachfolgende Verdünnung mit Wasser auf den gleichen Gehalt an Antimonsulfid gebracht wurden.

Goldhydrosole. Fügt man im Anschlusse an Whitney und Blake 2.5 ccm einer 0.6 % ätherischen Lösung bei 70—80°¹⁾ möglichst gut getrockneten Goldchlorids zu 120 ccm reinen, durch einen Silberkühler destillierten Wassers, das mit Aether geschüttelt und durch Acetylen gesättigt ist, so erhält man eine dunkelrote, im auffallenden und durchfallenden Lichte völlig klare Lösung. Durch Einleiten von Acetylen wird die Reduktion beendet. In einer Verdünnung 1:4 zeigt eine solche Lösung einen schwachen Lichtkegel und etwa 4 Teilchen im Gesichtsfeld; in einer Verdünnung 1:10 fehlt beides fast völlig. Benützt man zur Darstellung gewöhnliches destilliertes Wasser, so erhält man ein helles Bild mit äußerst zahlreichen, indessen im Gegensatze zu den anderen Goldlösungen gelb erscheinenden Submikronen²⁾.

Eine mit Natriumhydrosulfit nach Brunck³⁾ reducierte Goldlösung unterschied sich garnicht von der mit Formaldehyd erhaltenen.

Von Donau⁴⁾ ist neuerdings die Reduktion von Gold mittelst Kohlenoxyd vorgeschlagen worden. Leitet man in eine 0.013 % Goldchloridlösung einen langsamen Strom dieses Gases, so entsteht eine anfänglich violett, dann rotviolett und später dunkelrot gefärbte, im durchfallenden Lichte klare, im auffallenden Lichte schwach getrübt Goldlösung, die ultramikroskopisch ganz den

1) Bei den von den Autoren angegebenen Temperaturen 160—170° ließ sich das Goldchlorid nicht ohne Zersetzung trocknen.

2) Die Aehnlichkeit der mit Phosphor und mit Acetylen reducierten Goldlösungen legte die Vermutung nahe, daß auch bei dieser Darstellung lediglich der dem rohen Acetylen beigemengte Phosphorwasserstoff reducierend wirke, daß also im Grunde diese Entstehung der Goldlösung mit jener Darstellung identisch sei. Besondere Versuche mit einem von Phosphorwasserstoff nach Göttig, Ber. 32, 1879 [1899] oder nach Lunge und Cedercreutz, Z. f. angew. Chem. 1897, 651 bzw. Rossel und Landriset ebenda 1901, 77 befreiten Gase zeigte indessen, daß der Hauptsache nach dem Acetylen selbst die reducierende Wirkung zuzuschreiben ist. Mit Wasserstoff stark verdünnter Phosphorwasserstoff lieferte, wie zu erwarten war, allerdings auch Submikronenarme Goldlösungen.

3) Ann. 327, 245 [1902]; vgl. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. 1904 Heft 1, 1.

4) W. M. 26, 525 [1905].

eben genannten gleicht und sich höchstens durch ihren Gehalt an verhältnißmäßig viel roten und wenig blauen Teilchen auszeichnet. Setzt man die Reduction mit Kohlenoxyd noch weiter fort, so wird die Lösung schließlich violett und reicher an Submikronen.

Der Gehalt der Lösungen wurde durch Analyse der dialysierten Flüssigkeiten kontrolliert; er war, wenn auch durch verschieden starke Reduktion der anfänglich gleich starken Lösungen einige Verluste an Gold entstanden waren, im wesentlichen so wenig verschieden, daß der unmittelbare Vergleich der 1:10 verdünnten Proben erlaubt ist:

Tabelle 1.

| Gold- lösung nach | Gehalt | Farbe | Ultramikroskopischer Befund in Verd. 1:10 | | | |
|-------------------------|--|-----------|---|----------|--|---|
| | | | Teilchen pro \square | Bewegung | Farbe in der Reihenfolge d. Häufigkeit | Lichtkegel |
| Zsig- mondy | { aus einer 0.013 % Lösung von Au Cl ₃ H. 2 H ₂ O hergestellt. Nach Ana- lyse der dialysierten Lösungen 0.0042 bis 0.0077 % | hochrot | 2—3 | lebhaft | gelb, grün, rot | { nicht vor- handen bzw. bei der Zahl der Submi- kronen nicht er- kennbar |
| Donau | | dunkelrot | 2—4 | lebhaft | rot, gelb, grün, blau | |
| Brunck | | tiefrot | 2—4 | lebhaft | gelb, grün, rot | |
| Whitney u. Blake | | dunkelrot | ca. 0.03 | schwach | gelblich | äußerst schwach |

Von Gutbier¹⁾ ist als Reduktionsmittel Hydrazin verwendet worden. Arbeitet man in den von diesem Autor angegebenen Concentrationen, so erhält man Lösungen mit vornehmlich roten und gelben, sehr großen und zahlreichen Teilchen. In stärkerer Verdünnung erhielten wir je nach ihrer Alkalität rote oder blaue Lösungen. Zu je 120 ccm Wasser und 2.5 ccm 0.6 % Goldchloridlösung fügten wir tropfenweise 2 ccm einer Lösung von 1 ccm 50 % Hydrazin in 2000 ccm Wasser. Ohne Zusatz von Alkali, also in ganz schwach saurer Lösung entstehen, wenn auch nicht stets mit Sicherheit, rote Hydrosole. Wurde vorher mit ca 0.3 ccm einer 10 % Sodalösung eben neutralisiert, wie man auch an dem Umschlag der Farbe der verdünnten Goldchloridlösung von schwach hellgelb in farblos gut erkennt, so entstehen rotviolette, mit

1) Z. f. anorg. Chem. 31, 449 [1902].

1 ccm Sodalösung blauviolette und mit 2.5 ccm Sodalösung tiefblauviolette Lösungen. Alle vier Arten zeigten in einer Verdünnung 1:5 ultramikroskopisch dasselbe Bild: pro Quadrat 2—4, ganz überwiegend gelb und rot erscheinende Submikronen in lebhafter Bewegung; wodurch sich die Unabhängigkeit von Farbe und Teilchengröße aufs neue bestätigt¹⁾.

Dialysiert man diese Goldlösungen unter häufigem Wasserwechsel, so läßt sich die rote oder blaue Farbe längere Zeit und sogar beim Eindampfen erhalten; aus 100 ccm roter Lösung blieb ein roter, selbst nach dem Glühen rotstichig erscheinender Rückstand von 0.0039 gr; aus der blauen Lösung ein entsprechend bläulich gefärbter Rest von 0.0035 gr.

Antimonsulfid. Durch Eintropfen von 200 ccm einer Brechweinsteinlösung in 200 ccm Schwefelwasserstoffwasser bildet sich, wenn ein Schwefelwasserstoffstrom die Lösung dauernd in Bewegung hält, ein bis zu einem Gehalte von 0.25 % Sb_2S_3 (= 2 gr Brechweinstein) klares Hydrosol von Antimonsulfid, das undialysiert ultramikroskopisch außer einem intensiv gefärbten Lichtkegel äußerst zahlreiche und ca 10—20 gut erkennbare Teilchen pro Quadratnetz erkennen läßt. Die Homogenität der Lösung hängt nun von der Verdünnung ab, in welcher die Umsetzung mit Schwefelwasserstoff vorgenommen wird. Wir bereiteten 5 Stammlösungen von verschieden starkem Gehalte und verdünnten diese derart, daß immer in Bezug auf Sb_2S_3 gleich konzentrierte Lösungen entstanden. Es zeigte sich besonders in starker Verdünnung ein deutlicher Unterschied: die aus den verdünnten Stammlösungen bereiteten Verdünnungen waren viel ärmer an sichtbaren Teilchen, als die aus konzentrierten Ausgangslösungen hergestellten; es erscheint dies um so plausibler, als offenbar die Chance für die Polymerisierung der entstehenden Moleküle mit steigender Concentration wächst. In der ersten Spalte der Tabelle 2 sind die Buchstabenbezeichnungen und die Concentrationen der Lösungen an Sb_2S_3 angegeben, in der zweiten der ultramikroskopische Befund der Stammlösung, in den folgenden die Beobachtungen mit fortschreitender Verdünnung; gleich konzentrierte Lösungen stehen untereinander. Besonders drastische Unterschiede ergaben sich von den 0.063 % Lösungen an.

(Siehe Tabelle 2 Seite 150.)

Bei Versuchen über die Veränderungen von Antimosulfidlösungen mit der Zeit, das „Altern“, boten die Stammlösungen

1) Vgl. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Colloide, Jena, 1905, 111.

Tabelle 2.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--|---|---|---|---|--|---|---------------------------------------|--|---|
| Bezeichnung der Stammlösung u. Conc. an Sh_2S_3 | Stammlösung | 0.025 % | 0.0125 % | 0.0063 % | 0.0032 % | 0.0016 % | 0.0008 % | 0.0004 % | 0.0002 % |
| ^a 0.0063 % | vgl. 4 | — | — | 0—0.2 TL pro □ Kegel auß. schwach. Qu- dratnetz sel- ten sichtbar | TL, wie 4; Ge- sichtsfeld sonst fast dunkel | Gesichtsfeld dunkel; im ganzen 2—6 TL. | Wie 6; von Zeit zu Zeit ein TL. | — | — |
| ^b 0.025 % | vgl. 2 | 0.15—0.3 TL. pro □; außer- dem unzähl- bare auß. feine. Kegel stark | TL. besser sichtbar als bei 2, weil Kegel an Lichtstärke abnehmend | 0.2—0.6 TL. pro □ Kegel schwach aber unzweifelhaft vorhanden | — | Wie a 6 | — | — | — |
| ^c 0.050 % | Wie b 2 | — | — | 0.1 TL. pro □ Kegel schwach | Kegel noch deutlich zu erkennen | Gesichtsfeld fast dunkel | Wie a 6 | Wie a 6 | — |
| ^d 0.10 % | 0.5 1 TL. pro □ Größe der TL. verschied. Kegel sehr stark | — | — | 0.2—0.5 TL. pro □ Kegel schwach | Kegel noch deutlich zu erkennen | Kegel sehr schwach | Gesichtsfeld dunkel; 2—6 TL. | Wie a 7 | Gesichtsfeld dunkel; äußert selten ein TL. |
| ^e 0.25 % | ca. 0.5—1 TL. pro □ sichtbar. Kegel sehr hell, intensiv gelbrod | Kegel etwas unverändert. licht- schwach; son- st unver- ändert | Teilchenzahl unverändert. Kegel stärker als bei b 3 | 0—1 größere TL. pro □; un- zählbare auß. kleine; Kegel stark | ca. 0.2 größere TL. pro □. Kegel etwas schwächer als e 4 | Bild etwas dunkler als e 5 | Kegel schwach | Gesichtsfeld fast dunkel; selten 1-2 TL. | Gesichtsfeld dunkel; selten ein Teilchen |

nach 13 Tagen das gleiche Bild; die Lösungen von 0.0063 % hatten an Teilchenzahl durchweg etwas zugenommen. Sehr merklich waren schon nach 6 Tagen die Veränderungen in Lösungen mit 0.0002 % Sb_2S_3 und zwar um so stärker, je höher die Concentration der Stammlösungen gewesen war.

Tabelle 3.

| Nummer der Lösung | frisch | Nach 6 Tagen | |
|-------------------------|------------------------|------------------------------|--|
| | | Teilchen pro Gesichtsfeld | Kegel |
| 9a | dunkel | 4—6 | nicht vorhanden |
| 9b | " | 8—10 | äußerst schwach |
| 9c | " | 1—4 | nicht vorhanden |
| 9d | selten ein Teilchen | 5—8 | äußerst schwach |
| 9e | | > 130 | deutlich; an der Grenze der Auflösbarkeit |

Arsensulfid. Linder und Picton¹⁾ hatten bereits vor längerer Zeit z. T. im Anschlusse an Arbeiten von Schulze²⁾ vier verschiedene Modifikationen des colloidalen Arsensulfids dargestellt, deren grösste mikroskopisch auflösbar war, deren feinste sich unverändert durch Thon filtrieren ließ. Im Anschlusse an ihre Vorschriften bereiteten wir uns 4 Lösungen:

α. 500 ccm einer Lösung von 2 gr Arsentrioxyd und 4 gr Weinstein wurden mit Schwefelwasserstoff gesättigt. Die Lösung war auch bei starker Verdünnung noch getrübt und mußte vor der optischen Untersuchung (durch Papier) filtriert werden.

β. 2 gr Arsentrioxyd, 100 ccm Kalilauge und 400 ccm Wasser wurden mit Schwefelwasserstoff behandelt und das Präparat durch Dialyse von Alkali möglichst befreit. Da hierbei viel Arsensulfid als Sulfosalz verloren ging, mußte der Gehalt des gereinigten Hydrosols analytisch bestimmt werden; er betrug 0.0924 %; vier Fünftel waren also durch Dialyse entfernt worden. Die Lösung erschien im auffallenden Lichte getrübt.

γ. Eine Lösung von 2 gr Arsentrioxyd in 500 ccm Wasser wurde mit Schwefelwasserstoff gesättigt; sie war ebenfalls, wenn auch nicht so stark, wie α getrübt und wurde vor dem Gebrauch filtriert.

1) Journ. Chem. Soc. 61, 137 [1891].

2) J. pr. Chem. [2] 25, 431 [1882].

δ. Eine Lösung von 0.1 gr Arsentrioxyd in 500 ccm Wasser wurde mit Schwefelwasserstoff gesättigt und zwar, um eine etwaige Schwefelabscheidung durch Oxydation zu verhüten, einige Male unter der Vorsicht, daß die Luft zunächst mit Wasserstoff oder Kohlendioxyd verdrängt wurde, ohne daß dadurch ein wesentlich anderes Resultat zu erzielen war.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 (S. Seite 13) enthalten:

Ein Zusatz von Weinstein oder die Darstellung durch Dialyse einer Sulfosalzlösung beeinflusste demnach im Gegensatze zu den Erfahrungen von Linder und Picton die Constitution der Lösung kaum; dagegen sinkt auch hier die Auflösbarkeit stark mit der Verdünnung der Stammlösung.

Selen. Mit Selen ließ sich der Vergleich nicht durchführen, weil beim Sättigen auch nur einigermaßen concentrirter Lösungen von Selendioxyd mit schwefliger Säure Abscheidung von flockigem Selen eintritt und bei der Reduktion verdünnterer Lösungen überhaupt keine auf Bildung einer colloidalen Lösung deutende Rotfärbung erfolgt; offenbar bildet sich selbst bei langem Durchleiten von Schwefeldioxyd nur eine krystalloide Lösung, wie sie bereits von W. Biltz und W. Gahl vor der Abscheidung sichtbarer Selenteilchen auch in concentrirteren Lösungen bemerkt wurde.

Dagegen ließ sich sehr gut die von H. Rose¹⁾ entdeckte katalytische Beschleunigung der Selenabscheidung durch Salzsäure ultramikroskopisch demonstrieren. Eine 0.05 % Selendioxydlösung war nach 3 stündigem Einleiten von Schwefeldioxyd farblos und optisch leer; eine ebensolche, mit 10 ccm Salzsäure versetzte Lösung war nach der Einwirkung des Reduktionsmittels gelblich, zeigte im Gesichtsfeld 20—30 äußerst feine Submikronen und sedimentierte nach 15 Stunden rotes Selen.

Es kann zweifelhaft erscheinen, ob die im ersten Teile beschriebenen amikroskopischen Lösungen der Oxyde wirklich Teilchen von molekularer Größe enthalten; denn man könnte, wie Zsigmondy²⁾ hervorhob, in Anbetracht des geringeren Unterschiedes der Brechungsexponenten und der Dispersion dieser pseudogelösten Stoffe und des Mediums leicht größere Teilchen übersehen, als in Metalllösungen sichtbar werden. Beweisender wirkt

1) Z. f. analyt. Chem. 1, 93 [1862].

1) Zur Erkenntnis der Colloide, Jena, 1905, 123.

Tabelle 4.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--|--|---|---|---|---|-------------------------|---|--|
| Bezeichnung der Stammlösung und Conc. an As_2S_3 | Stammlösung | 0.1 % | 0.05 % | 0.025 % | 0.0125 % | 0.0063 % | 0.0032 % | 0.0016 % |
| α 0.5 % | 1—3 größere Tl. pro □ ¹⁾ ; unzählige kleinere. Äußerst lebhaft Bewegung. Kegel äußerst stark. | — | 6—8 äußerst kleine Tl. pro □; Bewegung sehr stark. Kegel stark. | Wie α 3 | Kegel allmählich schwächer werdend. Teilchen immer noch sehr zahlreich. | | | |
| β 0.5 % | — | > 10 äußerst kleine Tl. pro □; 2—3 etw. größere; Kegel stark. | — | Wie β 2 | Kegel schwächer werdend, Teilchen sehr zahlreich. | | 2—4 Tl. pr. □ Lichtkegel an der Grenze der Auflösbarkeit. | Schwacher Kegel. Tl. sehr lichtschwach. |
| γ 0.5 % | Wie α 1 | — | Wie α 3; Kegel etwas schwächer. | Wie α 4; Kegel etwas schwächer. | Wie α 5—8 | | | |
| δ 0.025 % | Vgl. 4. | — | — | 7—9 Tl. im Gesichtsfeld. Kegel an der Grenze d. Auflösbarkeit ²⁾ . | 3—5 Tl. im Gesichtsfeld | 3—4 Tl. im Gesichtsfeld | 3 Tl. im Gesichtsfeld | 3 äußerst kleine Tl. Kegel äußerst lichtschwach. |
| | | | | | Kegel an der Grenze der Auflösbarkeit und an Stärke abnehmend. | | | |

1) Die Farbe der Teilchen erschien hellgelb und durchaus gleichmäßig.

2) Bisweilen wurden in dieser Verdünnung auch teilchenreichere Lösungen erhalten.

die Thatsache, daß Gold nach zwei Methoden in nahezu optisch leerer Lösung hat erhalten werden können und, wie mir scheint, besonders überzeugend die Möglichkeit bei Antimon- und Arsensulfid ganz stetig durch weitergehende Verdünnung die Teilchengröße zu verkleinern; denn es läßt sich zunächst nicht übersehen, warum, auch wenn die optisch leere Lösung einer molekularen Zerteilung noch nicht entsprechen sollte, eine solche nicht durch Bildung der pseudogelösten Stoffe in immer größerer Verdünnung erzielt werden könnte, eine Vermutung, die der Prüfung durch das Experiment allerdings noch nicht zugänglich ist. Daß diese homogenen Colloide nicht etwa übersättigte krystalloide Lösungen vorstellen, beweist ihre Farbe und ein Vergleich mit den ganz andersartigen, sich plötzlich entmischenden übersättigten Selenlösungen. Die nächste Aufgabe zur weiteren Aufklärung der homogen gelösten Colloide würde offenbar darin bestehen, sie durch Entziehung von Lösungsmittel in so hoher Concentration zu bereiten, daß eine erfolgreiche Prüfung der osmotischen Eigenschaften möglich wird.

III.

Glycerinhaltige Ceroammoniumnitratlösungen bleiben, wie A. Müller¹⁾ fand, nach Zusatz von Ammoniak klar und scheiden erst nach Zusatz von Wasser je nach dem Grade der Verdünnung mehr oder weniger schnell Ceroxydhydrat ab. Diese Abscheidung verläuft makroskopisch völlig kontinuierlich. 4 gr Ceroammoniumnitrat werden in 2.5 ccm Wasser gelöst und 10 ccm Glycerin und 2.5 ccm Ammoniak zugefügt: es entsteht eine hellgelbe Lösung, die mit der Zeit nachdunkelt. Die folgenden Tabellen enthalten den Grad der zur Abscheidung des Ceroxyds gewählten Verdünnung, das makroskopische Aussehen der Lösung unmittelbar nach der Verdünnung, den Befund im „Lichtstrahl“ d. h. bei seitlicher Beleuchtung der Lösung im Strahl der Bogenlampe des Ultramikroskopes in einem sonst verdunkelten Zimmer und das ultramikroskopische Bild nach der vom Augenblicke der Mischung an gerechneten Zeit. Mischen und Einfüllen der Lösung nahm nur wenige Sekunden in Anspruch.

1) Z. f. anorg. Chem. 48, 320 [1905].

Tabelle 5.

Verdünnung 1:2; makroskopisch klar; Lichtstrahl: schwacher Kegel.

| Zeit in Min. | Beobachtung |
|--------------|---|
| 0 | Einige Teilchen verschiedener Größe. Lichtkegel sehr schwach. Strömung. |
| 8 | ca. 10 Teilchen. Kegel deutlicher. |
| 11 | Teilchen ziemlich zahlreich, aber unscharf und von Interferenzringen umgeben. Kegel immer noch schwach. |
| 14 | Bild unverändert. |
| 13 | " " |
| 23 | Die in das Gesichtsfeld gelangenden Teilchen sind ziemlich zahlreich aber ungleichmäßig zu Nestern und Klumpen vereinigt und dann hellleuchtend. An andern Stellen sind sehr zahlreiche Einzelteilchen, ca. 2—3 pro □, erkennbar. |
| 32 | Die Nester werden häufiger, die Teilchen sehr zahlreich. Lichtkegel deutlich. Ungleichmäßiges Bild. |
| 39 | 3—5 weiße bis gelbliche, selten rötliche Teilchen pro □. Außerdem größere Teilchen und Teilchenaggregate. Lichtkegel deutlich. Ungleichmäßiges Bild. |

Tabelle 6.

Verdünnung 1:3; makroskopisch klar; Lichtstrahl: schwacher Kegel.

| Zeit in Min. | Beobachtung |
|--------------|---|
| 0 | Einzelne verschieden große Submikronen. Strömung. |
| 2 | Bis 15 Teilchen im Gesichtsfeld. Lichtkegel äußerst schwach. Quadratnetz eben sichtbar. |
| 3 | 7—8 Teilchen. Kegel deutlich. |
| 4 | 1—3 größere, mehrere kleine Teilchen. Kegel sehr deutlich, wodurch die Erkennung der Teilchen erschwert wird. |
| 5 | Heller Kegel an der Grenze der Auflösbarkeit. |
| 7 | Ebenso. |
| 9 | Äußerst heller Kegel; zeitweilig stellenweise zu äußerst kleinen, schwach bewegten Teilchen auflösbar. |

Beim Verdünnen einer weiteren Probe der 9 Minuten alten Lösung auf das 20—30 fache konnte keine weitere Auflösbarkeit erzielt werden.

Tabelle 7.

Verdünnung 1:5; makroskopisch klar; Lichtstrahl: sehr schwacher Kegel.

| Zeit in Min. | Beobachtung |
|--------------|--|
| 0 | Schwacher Kegel; Quadratnetz eben sichtbar. |
| 1 | Deutlicher Kegel. Einzelteilchen fehlen. Nur äußerst selten durch Strömung ein deutliches Teilchen. |
| 2 | Kegel immer stärker werdend. |
| 3 | Lichtkegel sehr deutlich. |
| 10—15 | Sehr heller Kegel. Bei ganz scharfer Einstellung werden stellenweise Inhomogenitäten sichtbar, die vielleicht bei Sonnenbeleuchtung auflösbar wären. |

Bei weiterer Verdünnung der 10 Min. alten Lösung erhielt man stets einen unauflösbaren Lichtkegel.

Aus den Resultaten des Abschnittes III ist folgendes hervorzuheben:

1. Auch die ultramikroskopische Beobachtung ergibt, daß verdünnte glycerinhaltige Lösungen von Ceroxyd sich schneller, als concentrirte zersetzen.

2. Die Abscheidung des Ceroxydhydrates erfolgt stets durchaus continuierlich.

3. Auf die Art der Ausscheidung ist die Concentration von Einfluß: Aus verdünnten Lösungen scheidet sich das Oxyd in Form von Amikronen ab. Aus concentrirten Lösungen wird wenigstens ein Teil in Submikronen erhalten. Infolge der Zähigkeit des Mediums ist aber eine solche Lösung ungleichmäßig zusammengesetzt. Die mangelhafte Diffusion hat die örtliche Ausbildung größerer Aggregate zur Folge.

Der Einfluß der Verdünnung auf die Feinheit des Colloids correspondiert mit den Ergebnissen des Abschnittes II.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

(Vierte Mitteilung).

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. März 1906.

In der Einleitung meiner ersten Mitteilung habe ich eine neue Methode zur Behandlung der Integralgleichungen in Aussicht gestellt; dieselbe beruht auf einer Theorie der quadratischen Formen mit unendlichvielen Variabeln, die ich in der gegenwärtigen Mitteilung entwickeln werde.

Die systematische Behandlung der quadratischen Formen mit unendlichvielen Variabeln ist auch an sich von großer Wichtigkeit und erscheint mir als eine wesentliche Ergänzung der bekannten Theorie der quadratischen Formen mit endlicher Variabelnzahl. Die Anwendungen der Theorie der quadratischen Formen mit unendlichvielen Variabeln sind nicht auf die Integralgleichungen beschränkt: es wird sich nicht minder eine Berührung dieser Theorie mit der schönen Theorie der Kettenbrüche von Stieltjes¹⁾ darbieten, wie andererseits mit der Frage nach der Auflösung von Systemen unendlichvieler linearen Gleichungen, deren Untersuchung Hill, Poincaré, H. v. Koch und Andere erfolgreich in Angriff genommen haben. Auch zu den Untersuchungen Minkowskis über Volumen und Oberfläche findet in methodischer Hinsicht nahe Beziehung statt. Vor allem aber eröffnet die Theorie der quadratischen Formen mit unendlichvielen Variabeln

1) Recherches sur les fractions continues, Ann. de Toulouse VIII (1894).

einen neuen Zugang zu den allgemeinsten Entwicklungen willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen nach Fourierscher Art, wie am Schlusse von XI in dieser Mitteilung angedeutet werden wird.

In einer fünften Mitteilung will ich zeigen, wie außerordentlich einfach nicht nur alle in meiner ersten Mitteilung gewonnenen Resultate über Integralgleichungen zweiter Art nunmehr bewiesen und wesentlich erweitert werden können, sondern auch wie durch die Methode der quadratischen Formen mit unendlichvielen Variabeln die Uebertragung dieser Resultate auf Integralgleichungen erster Art und auf gewisse Integralgleichungen einer neuen „dritten“ Art gelingt und wie nach der neuen Methode auch solche Integralgleichungen, deren Kern höhere Singularitäten aufweist, einer erfolgreichen Behandlung zugänglich sind.

XI.

Theorie der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form mit unendlichvielen Variabeln.

Es seien

$$k_{pq} = k_{qp},$$

wo jeder der beiden Indices p, q die Reihe aller ganzen Zahlen $1, 2, \dots$ durchläuft, beliebig gegebene reelle Konstante, dann stellt

$$K(x) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} k_{pq} x_p x_q$$

eine *quadratische Form* mit den unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, \dots dar; die Konstanten k_{pq} heißen die Koeffizienten dieser quadratischen Form. Ein Ausdruck

$$A(x, y) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} a_{pq} x_p y_q$$

mit irgend welchen Koeffizienten a_{pq} heißt ein *bilinearer Ausdruck* oder eine *bilineare Form* der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$. Der Ausdruck

$$K(x, y) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} k_{pq} x_p y_q$$

heißt die zu $K(x)$ gehörige Bilinearform der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$.

Lassen wir die Indices p, q nur die Werte $1, \dots, n$ durchlaufen, wo n eine endliche Zahl bedeutet, so entspringen die

Formen mit der endlichen Variabelnzahl n , wie folgt:

$$K_n(x) = \sum_{(p,q=1,\dots,n)} k_{pq} x_p x_q,$$

$$K_n(x, y) = \sum_{(p,q=1,\dots,n)} k_{pq} x_p y_q.$$

Diese Formen $K_n(x)$, $K_n(x, y)$ mögen die *Abschnitte* der Form $K(x)$ bez. $K(x, y)$ heißen und auch, mitunter ohne den Index n ausdrücklich hinzuzusetzen, mit $[K]$ bezeichnet werden.

Wenn irgend ein bilinearer Ausdruck mit endlicher Variabelnzahl

$$A_n(x, y) = \sum_{(p,q=1,\dots,n)} a_{pq} x_p y_q$$

vorgelegt ist, so heiße die Summe aller Koeffizienten der Glieder $x_p y_q$ die *Faltung* des Ausdruckes $A_n(x, y)$ und werde mit $A_n(.,.)$ bezeichnet; es ist also

$$A(.,.) = \sum_{(p=1,\dots,n)} a_{pp}$$

und insbesondere

$$K_n(.,.) = k_{11} + \dots + k_{nn}.$$

Außer den allgemeinen quadratischen Formen K, K_n ziehen wir noch die besonderen quadratischen Formen

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots$$

$$(x, x)_n = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

und die besonderen Bilinearformen

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots$$

$$(x, y)_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

in Betracht.

Die Diskriminante der Form

$$(x, x)_n - \lambda K_n(x)$$

d. h. die Determinante

$$(1) \quad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}$$

ist bekanntlich eine ganze rationale Funktion n ten Grades in λ mit lauter reellen Nullstellen; dieselben mögen mit

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$$

bezeichnet werden und die *Eigenwerte* der Form K_n heißen; die Gesamtheit dieser n Eigenwerte heiße das *Spektrum* der Form K_n . Wenn ein reeller Wert λ so beschaffen ist, daß in ihm oder in beliebiger Nähe desselben noch für unendlichviele n Eigenwerte von K_n liegen, so heiße dieser Wert λ ein *Verdichtungswert* von K . Wenn die absolut größten Beträge der Eigenwerte von K_n mit wachsendem n absolut über alle Grenzen wachsen, so soll der Wert $\lambda = \infty$ ebenfalls als Verdichtungswert der Form K gerechnet werden.

Wir bilden nun aus (1) durch Ränderung die Determinante

$$D_n(\lambda; x, y) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11}, & \dots, & -\lambda k_{1n}, & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1}, & \dots, & 1 - \lambda k_{nn}, & x_n \\ y_1, & \dots, & y_n, & 0 \end{vmatrix}$$

und nennen den Quotienten

$$K_n(\lambda; x, y) = -\frac{D_n(\lambda; x, y)}{D_n(\lambda)}$$

bez.

$$K_n(\lambda, x) = K_n(\lambda, x, x)$$

die *Resolvente der quadratischen Form* K_n ; die Koeffizienten von x_1, \dots, x_n in $K_n(\lambda; x, y)$ geben, wenn λ kein Eigenwert ist, die Lösung der linearen Gleichungen

$$x_p - \lambda(k_{p1}x_1 + \dots + k_{pn}x_n) = y_p, \quad (p = 1, \dots, n);$$

wir drücken dies durch die Identität aus:

$$K_n(\lambda; x, y) - \lambda K_n(x, \cdot) K_n(\lambda; \cdot, y) = (x, y).$$

Es ist offenbar

$$(2) \quad K_n(\lambda; x, y) = (x, y)_n + \lambda K_n(x, y) + \lambda^2 K_n K_n(x, y) + \lambda^3 K_n K_n K_n(x, y) + \dots,$$

wo $K_n K_n, K_n K_n K_n, \dots$ die aus K_n durch fortgesetzte Faltungen entstehenden Formen

$$\begin{aligned} K_n K_n(x, y) &= K_n(x, \cdot) K_n(\cdot, y) = \sum_{(p, q, r=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rq} x_p y_q, \\ K_n K_n K_n(x, y) &= K_n(x, \cdot) K_n K_n(\cdot, y) = \sum_{(p, q, r, s=1, \dots, n)} k_{pr} k_{rq} k_{sq} x_p y_s, \\ &\dots \end{aligned}$$

bedeuten. Für die Resolvente K_n gilt die Partialbruchdarstellung

$$(3) \quad K_n(\lambda; x, y) = \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^{(n)}}} + \dots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^{(n)}}},$$

wo $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ gewisse lineare Formen der Variablen mit reellen Koeffizienten bedeuten. Insbesondere gelten mithin die Formeln:

$$(4) \quad \begin{aligned} (x, y)_n &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y) + \dots + L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y), \\ K_n(x, y) &= \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{\lambda_n^{(n)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, x)_n &= x_1^2 + \dots + x_n^2 = (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + (L_n^{(n)}(x))^2, \\ K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)}}, \\ (5) \quad K_n K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^2}, \\ K_n K_n K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Aus (4) folgen die Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$:

$$\begin{aligned} L_p^{(n)}(.) L_q^{(n)}(.) &= 0, \quad (p \neq q), \\ L_p^{(n)}(.) L_p^{(n)}(.) &= 1, \end{aligned}$$

wo $L_p(.) L_q(.)$ die Faltung der Bilinearform $L_p^{(n)}(x) L_q^{(n)}(y)$ bedeutet, und alsdann wiederum ergibt sich durch Faltung

$$\begin{aligned} K_n(.,.) &= \sum_{(p=1, \dots, n)} k_{pp} = \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^{(n)}}, \\ (6) \quad K_n K_n(.,.) &= \sum_{(p, r=1, \dots, n)} k_{pp} k_{rr} = \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \dots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^2}, \\ K_n K_n K_n(.,.) &= \sum_{(p, r, s=1, \dots, n)} k_{pp} k_{rr} k_{ss} = \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \dots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Unsere erste wichtige Aufgabe besteht darin, den Begriff der Resolvente der Form K_n auf die Form K zu übertragen und zu der Partialbruchdarstellung (3) das Analogon für die Form K mit unendlichvielen Variablen aufzusuchen.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns eines allgemeinen Satzes aus dem Gebiete der stetigen (gleichmäßigen) Konvergenz,

den ich in einer spezielleren Gestalt bereits in meinen Untersuchungen über das Dirichletsche Prinzip¹⁾ angewandt habe.

Hilfssatz 1. Es sei J ein ganz im Endlichen gelegenes Intervall für die Variable s , ferner

$$(7) \quad f_1(s), f_2(s), f_3(s), \dots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen der Variablen s , die in J stetig sind, deren Werte absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und deren Differenzenquotienten sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, so daß für alle s, t in J stets

$$\left| \frac{f_h(s) - f_h(t)}{s - t} \right| \leq E$$

gilt, wo E eine endliche von h und von der Wahl der Argumente s, t unabhängige Größe bedeutet:

Alsdann lassen sich aus eben dieser Reihe von Funktionen (7) unendlichviele Funktionen

$$f_1^*(s), f_2^*(s), f_3^*(s), \dots$$

auswählen derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden beliebigen Punkt in J gegen einen endlichen Grenzwert und zwar stetig (mithin auch gleichmäßig) konvergirt, woraus ersichtlich ist, daß der Limes

$$\lim_{p=\infty} f_p^*(s)$$

eine in J stetige Funktion von s darstellt.

Zum Beweise bestimmen wir auf die Art, wie es in § 5 meiner genannten Abhandlung über das Dirichletsche Prinzip geschehen ist, aus der Reihe (7) eine Reihe von Funktionen $f_1^*(s), f_2^*(s), \dots$ derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden Punkt einer in J überall dichten abzählbaren Punktmenge P^* gegen einen endlichen Grenzwert konvergirt; die so ausgewählten Funktionen sind, wie wir nun zeigen wollen, von der im Hilfssatze verlangten Art.

In der Tat bezeichnen wir mit s_1, s_2, \dots irgend eine unendliche Reihe von Punkten aus J , die gegen einen bestimmten Punkt s konvergirt. Bedeutet dann ε irgend eine beliebig kleine positive Größe, so bestimmen wir zunächst einen Punkt s^* der Punktmenge

1) Math. Ann. Bd. 59, 1904.

P^* derart, daß

$$(8) \quad |s^* - s| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

wird; wegen der Konvergenz der Wertreihe

$$f_1^*(s^*), f_2^*(s^*), \dots$$

läßt sich alsdann gewiß eine Zahl N finden, so daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(9) \quad |f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird; wegen der Konvergenz der Punktreihe s_1, s_2, \dots kann diese ganze Zahl N zugleich auch so groß gewählt werden, daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|s - s_p| < \frac{\varepsilon}{8E}, \quad |s - s_q| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

ausfällt. Mit Hilfe von (8) folgt hieraus für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(10) \quad |s^* - s_p| < \frac{\varepsilon}{4E}, \quad |s^* - s_q| < \frac{\varepsilon}{4E}.$$

Andererseits ist nun wegen der Voraussetzung unseres Hilfsatzes

$$\left| \frac{f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)}{s^* - s_p} \right| < E, \quad \left| \frac{f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)}{s^* - s_q} \right| < E$$

und folglich mit Hilfe von (10)

$$|f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Addieren wir diese Gleichungen zu (9), so folgt für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| + |f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)| + |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon$$

und umsomehr

$$|f_p^*(s_p) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon.$$

Da ε eine beliebig kleine Größe war, so folgt hieraus, daß die Wertreihe

$$f_1^*(s_1), f_2^*(s_2), \dots$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, d. h. die Funktionenreihe

$$f_1^*(s), f_2^*(s), \dots$$

konvergiert stetig an jeder Stelle s des Intervalles J , womit der Hilfssatz vollständig erwiesen ist.

Wir kehren zur Theorie der quadratischen Formen zurück und zwar nehmen wir im Folgenden zunächst an, es $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert von K , d. h. es sei K eine solche Form, dass die sämtlichen Eigenwerte von K_n für alle n in dem endlichen Intervalle J liegen. Wir definieren sodann gewisse zu K_n gehörige Funktionen der Variablen λ , wie folgt: es werde allgemein

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} \kappa_p^{(n)}(\lambda) &= 0 && \text{für } \lambda \leq \lambda_p^{(n)} \\ \kappa_p^{(n)}(\lambda) &= (L_p^{(n)}(x))^2 (\lambda - \lambda_p^{(n)}) && \text{für } \lambda > \lambda_p^{(n)} \end{aligned} \right\} p = 1, \dots, n$$

und

$$\kappa^{(n)}(\lambda) = \kappa_1^{(n)}(\lambda) + \dots + \kappa_n^{(n)}(\lambda)$$

gesetzt; dann sind $\kappa_p^{(n)}$ und folglich auch $\kappa^{(n)}$ stetige Funktionen von λ , die nirgends negativ ausfallen und bei wachsendem Argument λ und festgehaltenem n niemals abnehmen; die Differenzenquotienten dieser Funktionen, d. h. die Ausdrücke

$$\frac{\kappa_p^{(n)}(\lambda) - \kappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu},$$

$$\frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu}$$

sind, wie wir ebenfalls sofort sehen, nirgends negativ und nehmen, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt und das andere wächst, niemals ab, und zwar gelten die Gleichungen

$$\frac{\kappa_p^{(n)}(\lambda) - \kappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_p (L_p^{(n)}(x))^2$$

und folglich

$$\frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_1 (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + \pi_n (L_n^{(n)}(x))^2,$$

wo π_1, \dots, π_n zwischen 0 und 1 liegende von λ, μ abhängige Größen bedeuten. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Ungleichung

$$\left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq (L_1^{(n)}(x))^2 + \dots + (L_n^{(n)}(x))^2$$

oder wegen (5)

$$(12) \quad \left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Endlich bemerken wir noch, daß auf jeder Strecke, die keinen der Eigenwerte $\lambda_r^{(n)}$ von K_n enthält, die Funktionen $\kappa_r^{(n)}(\lambda)$ und folglich auch die $\kappa^{(n)}(\lambda)$ lineare Funktionen von λ sind. Für alle außerhalb auf der negativen Seite von J gelegenen λ ist $\kappa^{(n)}(\lambda)$ identisch Null; daher ist mit Rücksicht auf (12) stets:

$$\kappa^{(n)}(\lambda) \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2) J,$$

wo J die Länge des Intervalles J bezeichnet. Auf der positiven Seite außerhalb von J ist

$$\kappa^{(n)}(\lambda) = \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2) + C(x),$$

wo $C(x)$ eine von λ unabhängige Form bedeutet. In Bezug auf die Variablen x_1, \dots, x_n ist $\kappa^{(n)}$ eine quadratische Form.

Es seien nunmehr unendlichviele Variable x_1, x_2, \dots vorgelegt; wir ziehen dann diejenigen speziellen Wertsysteme derselben in Betracht, die entstehen, wenn wir irgend eine dieser Variablen = 1 und alle übrigen = 0 oder wenn wir irgend zwei dieser Variablen = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und alle übrigen = 0 setzen. Wir denken

uns alle diese speziellen Wertsysteme der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots in bestimmter Weise in eine Reihe geordnet und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge als erstes, zweites, drittes u. s. f. spezielles Wertsystem der unendlich vielen Variablen x_1, x_2, \dots . Für alle diese speziellen Wertsysteme gilt wegen (12) die Ungleichung

$$(13) \quad \left| \frac{\kappa^{(n)}(\lambda) - \kappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq 1.$$

Wir betrachten nun die Formenreihe

$$(14) \quad \kappa^{(1)}(\lambda), \kappa^{(2)}(\lambda), \kappa^{(3)}(\lambda), \dots$$

und wenden, indem wir darin für die Variablen x_1, x_2, \dots das erste spezielle Wertsystem eingesetzt denken, unsern Hilfssatz 1 an; wir sehen, daß dann im Intervalle J für λ die Werte der Formenreihe (14) sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze liegen müssen und wegen (13) auch die weitere Voraussetzung unseres Hilfssatzes erfüllt ist. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich daher aus (14) gewiß eine unendliche Reihe von Formen

$$(15) \quad \kappa^{(1')}(\lambda), \kappa^{(2')}(\lambda), \kappa^{(3')}(\lambda), \dots$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variablen x_1, x_2, \dots das erste spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ in dem Intervalle J gleichmäßig konvergiert.

Sodann wenden wir unsern Hilfssatz auf die Formenreihe (15) an. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich aus jener Formenreihe gewiß eine unendliche Reihe

$$(16) \quad \kappa^{(1'')}(\lambda), \kappa^{(2'')}(\lambda), \kappa^{(3'')}(\lambda), \dots$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variabeln x_1, x_2, \dots das zweite spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert. Indem wir ferner unsern Hilfssatz auf die Funktionenreihe (16) anwenden, gelangen wir durch Auswahl zu einer Funktionenreihe

$$\kappa^{(1''')}(\lambda), \kappa^{(2''')}(\lambda), \kappa^{(3''')}(\lambda), \dots,$$

die nach Einsetzung des dritten speziellen Wertsystems gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert.

Endlich betrachten wir, indem wir uns das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt denken, die Formenreihe

$$(17) \quad \kappa^{(1'')}(\lambda), \kappa^{(2'')}(\lambda), \kappa^{(3'')}(\lambda), \dots;$$

dieselbe konvergiert gleichmäßig, sowohl wenn wir darin für die Variabeln x_1, x_2, \dots das erste als auch wenn wir das zweite als auch wenn wir das dritte spezielle Wertsystem u. s. f. einsetzen. Da sich aber allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ einer quadratischen Form linear aus den Werten zusammensetzen läßt, die die quadratische Form für $x_p, x_q = 1, 0$ bez. $0, 1$, bez., $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ annimmt,

während man alle übrigen Variabeln gleich 0 setzt, so folgt, daß auch allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ in der Formenreihe (17) gegen eine gewisse in λ stetige Funktion $\kappa_{pq}(\lambda)$ konvergiert. Wir setzen

$$\kappa(\lambda) = \sum_{p, q=1, 2, \dots} \kappa_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

so daß $\kappa(\lambda)$ eine quadratische Form der unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, \dots bedeutet, deren Koeffizienten stetige Funktionen von λ sind. Diese Funktionen von λ sind zunächst nur innerhalb J definiert; da wir aber statt J ein beliebig großes J enthaltendes Intervall wählen dürfen, so ist damit die Definition jener Funktionen für alle endlichen Werte von λ gegeben.

Die Werte irgend eines Abschnittes einer quadratischen Form mit unendlichvielen Variablen sind als lineare Kombinationen derjenigen Werte darstellbar, die die quadratische Form für unsere speziellen Wertsysteme annimmt. Daraus folgt, daß, wenn

wir in den Formen der Formenreihe (17) $x_1, \dots x_n$ beliebig lassen, die übrigen Variablen x_{n+1}, x_{n+2}, \dots sämtlich $= 0$ setzen, d. h. von jeder Form in (17) denselben Abschnitt nehmen, diese aus den Abschnitten gebildete Reihe gewiß ebenfalls gleichmäßig konvergiert und zwar gegen denjenigen Wert, den der betreffende Abschnitt von $\kappa(\lambda)$ annimmt. Wenn wir noch

$$1^* = m_1, 2^{**} = m_2, 3^{***} = m_3, \dots$$

setzen, so gilt also die Gleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\kappa^{(m_n)}(\lambda)] = [\kappa(\lambda)].$$

Der Kürze und Uebersicht halber wollen wir im Folgenden bei einer Gleichung oder einer Ungleichung die eckigen Klammern fortlassen, d. h. nach dieser Festsetzung ist eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Formen mit unendlichvielen Variablen stets so zu verstehen, daß dieselbe identisch für alle Variablen gilt, wenn man in der Formel auf beiden Seiten die gleichen Abschnitte der Formen nimmt; so lautet die letzte Gleichung

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa^{(m_n)}(\lambda) = \kappa(\lambda).$$

Zugleich bemerken wir, daß die oben genannten Eigenschaften der Funktionen $\kappa^{(n)}(\lambda)$ als Funktion von λ sich sofort auf einen beliebigen Abschnitt $[\kappa(\lambda)]$ der Form $\kappa(\lambda)$ übertragen, wenn wir diesen als Funktion von λ betrachten. Wir erkennen so, daß die Funktion $[\kappa(\lambda)]$ ebenfalls nirgends negativ ausfällt und bei wachsendem Argument λ niemals abnimmt, ferner, daß der Differenzenquotient dieser Funktion d. h. der Ausdruck

$$\frac{[\kappa(\lambda)] - [\kappa(\mu)]}{\lambda - \mu}$$

wiederum nirgends negativ wird, und, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt, während das andere wächst, niemals abnimmt. Wegen (12) folgt für jenen Differenzenquotient die Ungleichung

$$(19) \quad \frac{\kappa(\lambda) - \kappa(\mu)}{\lambda - \mu} \leq (x, x).$$

Innerhalb eines Intervalles, das keinen Verdichtungswert der Form K enthält, wird $[\kappa(\lambda)]$ eine lineare Funktion von λ . Außerhalb J

ist auf der negativen Seite $[\kappa(\lambda)]$ identisch Null, auf der positiven Seite gleich $\lambda [(x, x)] + C(x)$.

Wir denken uns nun in der Form $\kappa(\lambda)$ das erste spezielle Wertsystem eingesetzt und bezeichnen die so entstehende Funktion von λ mit $\kappa(\lambda)_1$. Nach den obigen Ausführungen wird, wenn wir λ festhalten und μ einen λ übersteigenden Wert beilegen, der Differenzenquotient von $\kappa(\lambda)_1$, sobald μ gegen λ hin abnimmt, gewiß nicht wachsen und mithin, wenn μ nach λ fällt, einem Grenzwert zustreben, d. h. $\kappa(\lambda)_1$ besitzt gewiß für jedes λ einen vorderen Differentialquotienten; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1$. In derselben Weise wird gezeigt, daß $\kappa(\lambda)_1$ für jedes λ einen hinteren Differentialquotienten besitzt; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$.

Aus den oben genannten Tatsachen über die Differenzenquotienten von $\kappa(\lambda)_1$ folgt zugleich, daß sowohl $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1$, wie $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$ Funktionen von λ sind, die nirgends negativ ausfallen, mit wachsendem Argument λ nicht abnehmen und für welche überdies stets

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1 &\leq \mathfrak{f}^{(+)}(\mu)_1 \text{ für } \lambda \leq \mu \\ \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1 &\leq \mathfrak{f}^{(-)}(\mu)_1 \text{ für } \lambda < \mu \end{aligned}$$

ausfällt.

Da ferner wegen (13) die Differentialquotienten $\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1$, $\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1$ den Wert 1 nicht überschreiten können, so gilt dasselbe umsomehr für die Differenz vom vorderen und hinteren Differentialquotient an der nämlichen Stelle λ und wir ersehen hieraus, daß, wenn m irgend eine ganze Zahl bedeutet, höchstens m Stellen λ vorhanden sind, für welche

$$\mathfrak{f}^{(+)}(\lambda)_1 - \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)_1 \geq \frac{1}{m}$$

gilt. Wegen dieser Tatsache ist die Menge derjenigen Werte λ , für welche vorderer und hinterer Differentialquotient von einander verschieden ausfallen, notwendig abzählbar.

Nunmehr denken wir uns in $\kappa(\lambda)$ das zweite spezielle Wertsystem eingesetzt, verfahren mit der so entstehenden Funktion $\kappa(\lambda)_2$, wie vorhin mit $\kappa(\lambda)_1$ geschehen ist, und suchen diejenige Menge von Stellen λ , für welche der vordere und hintere Differentialquotient von einander verschieden ausfallen. Die Menge dieser Stellen λ ist gewiß wiederum abzählbar. Mit Benutzung des dritten speziellen Wertsystems erhalten wir entsprechend eine abzählbare Menge von Stellen λ u. s. f. Die Gesamtheit aller solchen

Stellen ist wiederum abzählbar; sie mögen *die Eigenwerte* der Form K heißen und mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bezeichnet werden. Die Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und ihre Verdichtungsstellen sind gewiß Verdichtungswerte der Form K , da ja $\kappa(\lambda)_1, \kappa(\lambda)_2, \dots$ außerhalb der Verdichtungswerte lineare Funktionen von λ sind und folglich die vorderen und hinteren Differentialquotienten daselbst einander gleich ausfallen. Die Gesamtheit der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ werde *das Punktspektrum oder das diskontinuierliche Spektrum* der Form K genannt.

Da die Koeffizienten einer quadratischen Form sich linear aus den Werten zusammensetzen lassen, die die quadratische Form für die Reihe der speziellen Wertsysteme der Variablen annimmt, so schließen wir, daß die sämtlichen Koeffizienten κ_{pq} der Form $\kappa(\lambda)$ ebenfalls sowohl vordere wie hintere Differentialquotienten besitzen und daß dieselben für jede Stelle mit Ausnahme der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ einander gleich sind; die vorderen und hinteren Differentialquotienten von κ_{pq} mögen mit $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)}$ bez. $\mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedene Stelle λ stimmen diese beiden Differentialquotienten mit einander überein; wir setzen daselbst

$$\mathfrak{k}_{pq} = \mathfrak{k}_{pq}^{(+)} = \mathfrak{k}_{pq}^{(-)};$$

die quadratischen Formen mit den Koeffizienten $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)}$, $\mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ mögen mit $\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)$ bez. $\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedene Stelle setzen wir

$$\mathfrak{k}(\lambda) = \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda) = \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda).$$

Wir bilden nun allgemein für die Stelle λ_n die Differenz $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)} - \mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ und nehmen diese Differenz als Koeffizient von $x_p x_q$; die so entstehende quadratische Form mit unendlich vielen Variablen, deren Koeffizienten jedenfalls nicht sämtlich verschwinden, werde *die zum Eigenwert λ_n gehörige quadratische Eigenform* von K genannt und mit E_n bezeichnet. Offenbar ist für jeden Eigenwert λ_p

$$(21) \quad \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_p) - \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_p) = E_p$$

und da auch zu (20) analog

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda) &\leq \mathfrak{k}^{(+)}(\mu) \text{ für } \lambda \leq \mu \\ \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda) &\leq \mathfrak{k}^{(-)}(\mu) \text{ für } \lambda < \mu \end{aligned}$$

gelten muß, so fällt gewiß

$$(23) \quad E_p \geq 0$$

aus. Andererseits folgt aus (19), wenn wir für μ einen λ übersteigenden Wert wählen und diesen gegen λ konvergieren lassen

$$(24) \quad \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda) \leq (x, x).$$

Wir betrachten nunmehr irgend m nach zunehmender Größe geordnete Eigenwerte der Form K , etwa

$$\lambda_{p_1}, \dots, \lambda_{p_m}$$

und die diesen zugehörigen Eigenformen

$$E_{p_1}, \dots, E_{p_m}.$$

Wegen (21) haben wir

$$(25) \quad \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda_{p_h}) - \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda_{p_h}) = E_{p_h} \quad (h = 1, 2, \dots, m)$$

und wegen (22)

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda_{p_1}) - \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda_{p_1}) &\geq 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda_{p_m}) - \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda_{p_{m-1}}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Addition von (25) und (26) ergibt

$$(27) \quad \mathfrak{f}^{(+)}(\lambda_{p_m}) - \mathfrak{f}^{(-)}(\lambda_{p_1}) \geq E_{p_1} + \dots + E_{p_m}$$

und diese Ungleichung lehrt, da $[\mathfrak{f}^{(-)}(\lambda)]$ nirgends negativ ist, wegen (24) die weitere Ungleichung

$$(28) \quad E_{p_1} + \dots + E_{p_m} \leq (x, x).$$

Aus (23) und (28) erkennen wir, daß die über alle Indizes p erstreckte Summe $\sum [E_p]$ konvergiert und zwar gegen eine quadratische Form der n Variabeln x_1, \dots, x_n , die $\leq x_1^2 + \dots + x_n^2$ ausfällt, d. h. es ist

$$\sum_{(p)} E_p \leq (x, x).$$

Wir definieren jetzt folgende Formen der unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, \dots :

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= \sum_{(\lambda_p < \lambda)} E_p, \\ \eta(\lambda) &= \sum_{(\lambda_p < \lambda)} E_p (\lambda - \lambda_p), \end{aligned}$$

wo die Summen rechter Hand über alle diejenigen Indizes p zu erstrecken sind, für die $\lambda_p < \lambda$ ausfällt. Die Koeffizienten von

$\eta(\lambda)$ sind stetige Funktionen von λ . Die Abschnitte $[e(\lambda)]$, $[\eta(\lambda)]$ dieser Formen sind Funktionen von λ , die, wie sich ohne Schwierigkeit mit Benutzung von (23) und der Konvergenz von $\sum_{\mathfrak{p}} [E_p]$ ergibt, folgende Eigenschaften besitzen:

$[e(\lambda)]$ ist nirgends negativ und nimmt mit wachsendem λ niemals ab; außerhalb J ist $[e(\lambda)]$ auf der negativen Seite Null, auf der positiven gleich $\sum_{\mathfrak{p}} [E_p]$.

$[e(\lambda)]$ ist an allen Stellen stetig, die nicht Eigenwerte sind; für den Eigenwert λ_p besitzt $[e(\lambda)]$ einen endlichen Sprung und zwar ist bei positivem gegen Null abnehmendem τ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e(\lambda_p - \tau) = e(\lambda_p)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e(\lambda_p + \tau) = e(\lambda_p) + E_p.$$

$[\eta(\lambda)]$ hat sowohl einen vorderen, wie einen hinteren Differentialquotient; dieselben stimmen an allen Stellen, die nicht Eigenwerte sind, mit einander überein und haben den Wert $[e(\lambda)]$; für den Eigenwert λ_p ist der hintere Differentialquotient $= [e(\lambda_p)]$, der vordere $= [e(\lambda_p)] + [E_p]$, so daß der Ueberschuß des vorderen Differentialquotienten über den hinteren $[E_p]$ beträgt.

Aus (27) folgt, wenn $\lambda', \lambda'' > \lambda'$ keine Eigenwerte sind:

$$\mathfrak{f}(\lambda'') - \mathfrak{f}(\lambda') \geq \sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p;$$

nun ist

$$\sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p = e(\lambda'') - e(\lambda')$$

und folglich auch

$$(29) \quad \mathfrak{f}(\lambda'') - \mathfrak{f}(\lambda') \geq e(\lambda'') - e(\lambda').$$

Ist eine der Größen λ', λ'' ein Eigenwert, bez. sind beide Eigenwerte von K , so folgt ebenso statt (29) eine entsprechende Ungleichung. Setzen wir nun

$$\varphi(\lambda) = \kappa(\lambda) - \eta(\lambda),$$

so besitzt mit Rücksicht auf (21) die Funktion $[\varphi(\lambda)]$ vordere und hintere Differentialquotienten, die für jede Stelle λ miteinander übereinstimmen, und dieser Differentialquotient ist überdies, wie aus (29) bez. aus der entsprechenden Ungleichung folgt; eine mit wachsendem Argument nicht abnehmende Funktion von λ ; daher stellt dieser Differentialquotient eine Funktion dar, die in λ stetig

ist. Setzen wir also

$$(30) \quad \sigma(\lambda) = \sum \sigma_{\mu} x_{\mu} x_{\mu} = \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda} = \mathfrak{f}(\lambda) - \epsilon(\lambda),$$

so ist jeder Abschnitt der Form $\sigma(\lambda)$ eine stetige, nicht negative, mit wachsendem λ nicht abnehmende Funktion von λ . Die Form $\sigma(\lambda)$ der unendlichvielen Variablen, deren Koeffizienten σ_{μ} stetige Funktionen von λ sind, heiße die *Spektralform* von K .

Wegen (24) gilt die Ungleichung

$$(31) \quad \sigma(\lambda) + \epsilon(\lambda) \leq (x, x).$$

Die Formen $\mathfrak{f}(\lambda)$, $\epsilon(\lambda)$, $\sigma(\lambda)$ werden für alle außerhalb auf der negativen Seite von J liegenden Werte λ identisch gleich Null; auf der positiven Seite gehen sie in bestimmte Formen über, die wir bez. mit $\mathfrak{f}(+\infty)$, $\epsilon(+\infty)$, $\sigma(+\infty)$ bezeichnen wollen. Wegen (30) haben wir

$$(32) \quad \sigma(+\infty) = \mathfrak{f}(+\infty) - \epsilon(+\infty).$$

Da $[\kappa(\lambda)]$ rechts von J in $\lambda[(x, x)] + C(x)$ übergeht, so haben wir

$$(33) \quad \mathfrak{f}(+\infty) = (x, x)$$

und wie früher bemerkt ist

$$\epsilon(+\infty) = \sum_p E_p.$$

Wir wählen jetzt solche reellen Werte λ aus, in deren beliebiger Nähe noch Punkte λ' existieren, für die nicht identisch in allen Variablen x_1, x_2, \dots

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda')$$

ausfällt. Die Menge s aller solchen Punkte λ ist perfekt (abgeschlossen und in sich dicht); sie heiße *das Streckenspektrum* oder *das kontinuierliche Spektrum* der Form K . Außerhalb der Verdichtungswerte von K sind die Koeffizienten von $\kappa(\lambda)$ sämtlich linear in λ , diejenigen von $\epsilon(\lambda)$ konstant und folglich werden auch die Koeffizienten von $\sigma(\lambda)$ konstant d. h. das Streckenspektrum liegt gewiß innerhalb der Verdichtungswerte der Form K . Das Punktspektrum nebst den Hufungstellen der Eigenwerte und das Streckenspektrum zusammengenommen heiße das *Spektrum* der Form K .

Setzen wir nun

$$\sigma(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) = \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

so erhalten wir aus (32), (33)

$$(x, x) = e(+\infty) + \int_{(a)} d\sigma(\lambda)$$

oder

$$(34) \quad (x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(a)} d\sigma(\lambda),$$

wo die Summe über alle p zu erstrecken ist.

Wir kehren nunmehr zu der quadratischen Form K_n mit endlicher Variabelnzahl n zurück. Bedeutet λ eine komplexe Größe oder eine von sämtlichen Eigenwerten $\lambda_p^{(n)}$ der Form K_n verschiedene reelle Größe, so erhalten wir aus der Definition (11) der Funktion $\kappa_p^{(n)}$ sofort die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_p^{(n)}(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = (L_p^{(n)}(x))^2 \int_{\lambda_p^{(n)}}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda_p^{(n)}}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = \frac{1}{2} \frac{(L_p^{(n)}(x))^2}{\lambda_p^{(n)} - \lambda};$$

die Integration ist hier reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\kappa_p^{(n)}(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch für komplexe μ definiert ist. Durch Summation über $p = 1, \dots, n$ finden wir

$$(35) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa^{(n)}(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda} \right\},$$

wobei die Integration wie vorhin auszuführen ist. Andererseits ist, wie aus (3) und (5) folgt

$$(36) \quad \frac{K_n(\lambda, x) - (x, x)_n}{\lambda} = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \dots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda}.$$

Wenn wir in (35), (36) für n die besonderen Zahlen m_1, m_2, \dots einsetzen und auf beiden Seiten einen bestimmten Abschnitt nehmen, ferner unter λ irgend eine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe verstehen, die nicht zum Spektrum der Form K gehört, so erhalten wir wegen (18) durch Grenzübergang die Formel

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[K_{m_n}(\lambda, x)] - [(x, x)_{m_n}]}{\lambda} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\kappa(\mu)]}{(\mu - \lambda)^2} d\mu;$$

die Integration ist hier wiederum reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\kappa(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch

für komplexe μ definiert ist. Infolgedessen stellt das Integral rechter Hand eine Funktion von λ dar, die für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen reellen λ regulär analytischen Charakter in Bezug auf λ besitzt.

Wir setzen

$$(38) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu$$

und nennen diesen Ausdruck *die Resolvente der Form K*; jeder Koeffizient oder Abschnitt derselben ist ebenfalls für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen endlichen reellen Werte von λ regulär analytisch und man sieht auch, daß derselbe für $\lambda = \infty$ regulär analytisch ist.

Die oben gefundene Gleichung (37) geht über in

$$\sum_{n=\infty} L K_{m_n}(\lambda, x) = K(\lambda, x).$$

Aus der Definition der Form $\eta(\lambda)$ entnehmen wir die Gleichung

$$(39) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = \sum_{(p)} E_p \int_{\lambda_p}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda_p}{(\mu - \lambda)^2} d\mu = \frac{1}{2} \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda},$$

wobei unter λ irgend eine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe zu verstehen ist, die nicht zum Spektrum der Form K gehört und die Integration nach μ im Falle eines reellen λ mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ -Ebene ausgeführt werden soll.

Wegen

$$\varrho(\lambda) = \kappa(\lambda) - \eta(\lambda),$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

Aus (38), (39) ergibt sich

$$(40) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \lambda \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (34)

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Diese Formel ist das gesuchte Analogon zu der Partialbruchdarstellung (3) der Resolvente $K_n(\lambda, x)$ der Form K_n mit der endlichen Variabelnzahl n .

Wir fassen die gefundenen Resultate in folgender Weise zusammen:

Satz I. Die Resolvente einer quadratischen Form K , für welche $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert ist, ist eine quadratische Form mit unendlichvielen Variablen

$$K(\lambda, x) = \sum_{p, q} K_{pq} x_p x_q,$$

deren Koeffizienten für alle außerhalb des Spektrums der Form K gelegenen Argumente λ regulär analytische Funktionen dieses Argumentes sind.

Ist m_1, m_2, \dots eine gewisse Reihe ins Unendliche zunehmender ganzer Zahlen, so gilt für jeden Abschnitt der Resolvente die Gleichung

$$(41) \quad \sum_{n=\infty} K_{m_n}(\lambda, x) = K(\lambda, x),$$

wo K_{m_n} die Resolvente der Form K_{m_n} bedeutet.

Die Resolvente K gestattet folgende Darstellung (für jeden Abschnitt)

$$(42) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}};$$

dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K , d. h. über alle Eigenwerte von K zu erstrecken; E_p bezeichnet allgemein die zu λ_p gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine Form, deren Abschnitte für keinen Wert der Variablen x_1, x_2, \dots negativ sind. Das Integral ist über das Streckenspektrum von K zu erstrecken. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine Form, deren Koeffizienten stetige Funktionen in λ , und deren Abschnitte bei wachsendem Argument λ innerhalb des Streckenspektrums s nicht abnehmende nicht sämtlich konstante Funktionen von λ , in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber sämtlich konstant sind.

Endlich gilt die Gleichung (für jeden Abschnitt)

$$(43) \quad (x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda).$$

Wenn die sämtlichen Abschnitte einer quadratischen oder einer bilinearen Form mit unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ absolut genommen unterhalb einer von der Wahl des Abschnittes unabhängigen endlichen Grenze liegen, sobald man die Variablen den Bedingungen

$$(44) \quad (x, x) \leq 1, \quad (y, y) \leq 1$$

unterwirft, so heiße die quadratische bez. bilineare Form eine *beschränkte Form*.

Die zu einer beschränkten quadratischen Form gehörige bilineare Form ist ebenfalls eine beschränkte Form.

Beispielsweise sind wegen (23) und (28) die Eigenformen E , stets beschränkte Formen und da nach (31) die Ungleichung

$$\sigma(\lambda) + \epsilon(\lambda) \leq (x, x)$$

gilt, so sind auch die Spektralform $\sigma(\lambda)$, ebenso wie die Formen $\mathfrak{f}(\lambda)$ und $\epsilon(\lambda)$ beschränkte Formen. Endlich ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von $K(x)$ liegenden Wert bedeutet, die Resolvente $K(\lambda, x)$ und zwar sowohl der Summen- wie der Integralbestandteil von $K(\lambda, x)$ für sich eine beschränkte Form.

Die Begriffe „Abschnitt“ und „beschränkt“ können offenbar in gleichem Sinne auch für *lineare Formen* mit unendlichvielen Variablen angewandt werden. Eine lineare Form

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots$$

ist dann und nur dann eine beschränkte Form, wenn die Summe der Quadrate ihrer Koeffizienten

$$l_1^2 + l_2^2 + \dots$$

endlich bleibt.

Die Richtigkeit hiervon erkennt man leicht mit Hilfe der beiden folgenden Tatsachen:

I. Wenn u_1, u_2, \dots und v_1, v_2, \dots irgend welche Größen sind, so gilt stets die Ungleichung

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v).$$

II. Wenn u_1, u_2, \dots irgend welche Größen sind, ferner M eine endliche positive Zahl bedeutet und überdies für alle der Bedingung (44) genügenden Werte x_1, x_2, \dots die Ungleichung

$$(u, x) \leq M$$

stattfindet, so ist stets

$$(u, u) \leq M^2.$$

Fortan ziehen wir durchweg nur solche Wertsysteme der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ u. s. f. in Betracht, die der Bedingung (44) genügen. Ist a_1, a_2, \dots ein solches Wertsystem, so existiert, wenn $L(x)$ eine beschränkte lineare Form ist, gewiß der Limes des n^{ten} Abschnittes $[L(a)]_n$ derselben für $n = \infty$; wir setzen

$$L(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} [L(a)]_n;$$

somit haben wir erkannt, daß eine beschränkte Linearform der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots für alle in Betracht kommenden Wertsysteme dieser Variablen einen bestimmten endlichen Wert annimmt und demnach eine *Funktion* der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots darstellt.

Es heiße allgemein eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots an der Stelle a_1, a_2, \dots *stetig*, wenn der Wert von $F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \dots)$ gegen den Wert von $F(a_1, a_2, \dots)$ konvergiert, sobald die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ nach Null abnimmt, d. h. wenn

$$\lim_{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots = 0)} F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(a_1, a_2, \dots).$$

wird.

Wir sehen sofort, daß die beschränkte Linearform $L(x)$ eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen darstellt.

Die entsprechenden Sätze gelten auch für eine beschränkte Bilinearform. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir mit $A(x, y)$ eine beschränkte Bilinearform und mit a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots besondere Wertsysteme der unendlichvielen Variablen, sodann setzen wir

$$x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, x_{n+1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \dots$$

$$x'_1 = 0, \dots, x'_n = 0, x'_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\alpha_{nm}}, x'_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{\alpha_{nm}}, \dots, x'_m = \frac{a_m}{\alpha_{nm}}, x'_{m+1} = 0, x'_{m+2} = 0, \dots$$

$$y_1 = b_1, \dots, y_n = b_n, y_{n+1} = 0, \quad y_{n+2} = 0, \dots$$

$$y'_1 = 0, \dots, y'_n = 0, y'_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\beta_{nm}}, y'_{n+2} = \frac{b_{n+2}}{\beta_{nm}}, \dots, y'_m = \frac{b_m}{\beta_{nm}}, y'_{m+1} = 0, y'_{m+2} = 0, \dots$$

$$\alpha_{nm} = \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 + \dots + b_m^2},$$

worin n und $m > n$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Nun ist, wenn wir mit $[A]_n, [A]_m$ die betreffenden Abschnitte von A bezeichnen,

$$\begin{aligned}
[A(a, b)]_n &= A(x + \alpha_{nm} x', y + \beta_{nm} y'), \\
&= A(x, y) + \alpha_{nm} A(x', y) + \beta_{nm} A(x, y') + \alpha_{nm} \beta_{nm} A(x', y'), \\
&= [A(a, b)]_n + \alpha_{nm} A(x', y) + \beta_{nm} A(x, y') + \alpha_{nm} \beta_{nm} A(x', y').
\end{aligned}$$

Da $A(x', y)$, $A(x, y')$, $A(x', y')$ absolut unterhalb einer von n, m unabhängigen Grenze bleiben und überdies α_{nm}, β_{nm} mit wachsenden n, m verschwinden, so folgt, daß $[A(a, b)]_n$ mit wachsendem n gegen einen Grenzwert konvergieren muß; derselbe werde kurz mit $A(a, b)$ bezeichnet. In analoger Weise folgt, daß die durch $A(x, y)$ dargestellte Funktion der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots stetig ist.

Insbesondere schließen wir, daß auch eine beschränkte, quadratische Form unendlichvieler Veränderlichen x_1, x_2, \dots stets eine stetige Funktion derselben darstellt.

Wir entnehmen aus den eben bewiesenen Sätzen noch folgende Tatsache: Wenn auf beiden Seiten einer Formel eine endliche Anzahl quadratischer oder bilinearer beschränkter Formen von unendlichvielen Variablen stehen und die durch die Formel dargestellte Gleichung oder Ungleichung für alle Abschnitte beider Seiten gültig ist, so ist sie überhaupt für alle Wertsysteme der unendlichvielen Variablen gültig — wobei stets nur solche Wertsysteme dieser Variablen gemeint sind, die den Bedingungen (44) genügen.

Wenn wir in der beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ die Variablen y_1, y_2, \dots sämtlich Null setzen mit alleiniger Ausnahme der einen Variablen y_r , der wir den Wert 1 erteilen, so entsteht eine beschränkte Linearform der Variablen x_1, x_2, \dots ; dieselbe werde mit $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_r}$ bezeichnet.

Da $A(x, y)$ beschränkt ist, so folgt auch, daß

$$y_1 \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1} + \dots + y_n \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_n}$$

absolut unter einer endlichen von n und m unabhängigen Grenze liegt und mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache II liegt mithin auch

$$\left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_n} \right)^2$$

unterhalb einer von n und m unabhängigen Grenze. Nehmen wir nun zuerst $n = \infty$ und dann $m = \infty$, so erkennen wir, daß die

Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2}\right)^2 + \dots$$

gegen eine endliche Größe konvergiert. Ist nun $B(x, y)$ ebenfalls eine beschränkte Bilinearform, so bleibt auch die Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2}\right)^2 + \dots$$

unterhalb einer endlichen Grenze und folglich muß mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache I auch die unendliche Reihe

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1} + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2} + \dots$$

absolut konvergieren; dieselbe stellt dann notwendig wiederum eine Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ dar, die wir mit

$$A(x, \cdot) B(\cdot, y)$$

bezeichnen und die *Faltung* der Bilinearformen A, B nennen.

Die Faltung ist gewiß eine beschränkte Bilinearform und zwar erkennen wir mit Rücksicht auf die oben angeführten Tatsachen I und II aus der vorangehenden Betrachtung die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hilfssatz 2. Wenn M, N zwei positive Konstante bedeuten, so daß für alle x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots

$$|A(x, y)| \leq M, \quad |B(x, y)| \leq N$$

ausfällt, so genügt die Faltung notwendig der Ungleichung

$$|A(x, \cdot) B(\cdot, y)| \leq MN.$$

Zugleich stellen wir folgende Hilfssätze auf, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet.

Hilfssatz 3. Für jeden Abschnitt der Faltung zweier beschränkter Bilinearformen A, B gilt

$$[A(x, \cdot) B(\cdot, y)]_n = \lim_{m \rightarrow \infty} [A_m(x, \cdot) B_m(\cdot, y)]_n,$$

wo rechts unter dem Limes der m^{te} Abschnitt der Faltung der n^{ten} Abschnitte von A, B steht. Der Wert der Faltung ist demnach:

$$A(x, \cdot) B(\cdot, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [A_m(x, \cdot) B_m(\cdot, y)]_n.$$

Es folgt daraus insbesondere:

$$A(x, \cdot)(\cdot, y) = A(x, y),$$

d. h. jede Bilinearform reproduziert sich durch Faltung mit (x, y) ; wir können daher auch den Wert der Bilinearform darstellen als:

$$A(x, y) = y_1 \frac{\partial A}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial A}{\partial y_2} + \dots = x_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + \dots$$

Hilfssatz 4. Wenn A, B, C, \dots beschränkte Bilinearformen sind und mit denselben wiederholt der Prozeß der Faltung ausgeführt wird, so ist das Resultat von der Reihenfolge der einzelnen Faltungen unabhängig; es ist beispielsweise

$$(A(x, \cdot) B(\cdot, \cdot)) C(\cdot, y) = A(x, \cdot) (B(\cdot, \cdot) C(\cdot, y)).$$

Wir entwickeln nunmehr die einfachsten Begriffe und Tatsachen über orthogonale Transformationen unendlichvieler Variabler. Bedeuten

$$o_{pq} \quad (p, q = 1, 2, \dots)$$

irgend welche unendlichviele den Relationen

$$\begin{aligned} \sum_{(q=1,2,\dots)} o_{pq}^2 &= 1, \\ \sum_{(r=1,2,\dots)} o_{pr} o_{qr} &= 0, \quad (p \neq q) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{(p=1,2,\dots)} o_{pq}^2 &= 1, \\ \sum_{(r=1,2,\dots)} o_{rp} o_{rq} &= 0, \quad (p \neq q) \end{aligned}$$

genügende Konstanten, so definieren die Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= o_{11} x'_1 + o_{12} x'_2 + \dots, \\ x_2 &= o_{21} x'_1 + o_{22} x'_2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (45)$$

und

$$\begin{aligned} x'_1 &= o_{11} x_1 + o_{21} x_2 + \dots, \\ x'_2 &= o_{12} x_1 + o_{22} x_2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

je eine orthogonale Transformation; die letztere Transformation ist die Umkehrung der ersteren. Die Ausdrücke rechter Hand sind beschränkte Linearformen der unendlichvielen Variablen x'_1, x'_2, \dots bez. x_1, x_2, \dots .

Die Bilinearform

$$O(x, x') = \sum o_{pq} x_p x'_q$$

heiße die zur orthogonalen Transformation (45) zugehörige Bilinearform; dieselbe ist, wie man leicht aus der oben angeführten Tat-

sache I erkennt, gewiß eine beschränkte Form. Es gilt nach Hilfssatz 3 die Formel

$$(46) \quad O(x, \cdot) O(y, \cdot) = (x, y);$$

insbesondere wird:

$$\sum_{(p)} (o_{p1} x'_1 + o_{p2} x'_2 + \dots)^2 = (x', x'),$$

$$\sum_{(p)} (o_{1p} x_1 + o_{2p} x_2 + \dots)^2 = (x, x).$$

Wenn wir auf irgend eine beschränkte Linearform $L(x)$ die orthogonale Transformation (45) anwenden, so entsteht die Linearform

$$L'(x') = L(\cdot) O(\cdot, x');$$

mithin entsteht, wenn wir beide Variablenreihen irgend einer beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ jener Transformation unterwerfen die Bilinearform

$$A'(x', y') = A(\cdot, \cdot) O(\cdot, x') O(\cdot, y').$$

Sind $A(x, y)$, $B(x, y)$ irgend zwei beschränkte Bilinearformen, setzen wir ferner

$$C(x, y) = A(x, \cdot) B(\cdot, y)$$

und berechnen die orthogonaltransformierten Formen

$$A'(x', y') = A(\cdot, \cdot) O(\cdot, x') O(\cdot, y'),$$

$$B'(x', y') = B(\cdot, \cdot) O(\cdot, x') O(\cdot, y'),$$

$$C'(x', y') = C(\cdot, \cdot) O(\cdot, x') O(\cdot, y'),$$

so finden wir als Faltung der transformierten Formen

$$A'(x, o) B'(o, y) = A(\cdot, \cdot) O(\cdot, x) O(\cdot, o) B(o, \cdot) O(o, \cdot) O(o, y)$$

und mit Benutzung des Hilfssatzes 3 und 4 und der Formel (46)

$$\begin{aligned} A'(x, o) B'(o, y) &= A(\cdot, o) B(o, \cdot) O(\cdot, x) O(o, y) \\ &= C(\cdot, \cdot) O(\cdot, x) O(o, y) \end{aligned}$$

und mithin

$$(47) \quad A'(x, \cdot) B'(\cdot, y) = C'(x, y);$$

d. h. die Faltung zweier Bilinearformen ist eine Kovariante gegenüber einer orthogonalen Transformation.

Wenn die Summe der Koeffizienten von x, y , einer Bilinearform $A(x, y)$ konvergiert, so bezeichnen wir diese Summe allgemein mit $A(\cdot, \cdot)$.

Wir erwähnen hier noch folgende ebenfalls leicht zu beweisende Tatsache:

Hilfssatz 5. Wenn

$$Q(x) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} c_{pq} x_p x_q$$

eine quadratische Form von solcher Art ist, daß

$$Q(\cdot, \cdot) Q(\cdot, \cdot) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} c_{pq}^2$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, so stellt derselbe eine Invariante gegenüber einer orthogonalen Transformation von $Q(x)$ dar; d. h. jener Grenzwert stimmt mit

$$Q'(\cdot, \cdot) Q'(\cdot, \cdot) = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} c_{pq}'^2$$

überein, wobei

$$Q'(x') = \sum_{(p,q=1,2,\dots)} c_{pq}' x_p' x_q'$$

die durch orthogonale Transformation aus $Q(x)$ hervorgehende quadratische Form bedeutet.

Wir kehren nunmehr zu der oben entwickelten Theorie der quadratischen Form $K(x)$ zurück und nehmen an, daß diese quadratische Form $K(x)$ eine beschränkte Form sei.

Bedeutet wiederum

$$K_n(x) = [K(x)]_n$$

den n^{ten} Abschnitt von $K(x)$, so ist der größte Wert, den $K_n(x)$ absolut genommen annimmt, gleich $\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}$, wenn $\lambda_1^{(n)}$ den absolut kleinsten der n Eigenwerte von $K_n(x)$ bezeichnet. Da $K(x)$ eine beschränkte Form sein soll, so giebt es eine positive Konstante M , so daß für alle Werte n und jedes Variabelnsystem

$$|K_n(x)| \leq M$$

ausfällt und mithin gilt auch

$$\left| \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} \right| \leq M$$

oder

$$|\lambda_1^{(n)}| \geq \frac{1}{M},$$

d. h. die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K_n(x)$ bleiben sämtlich oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe und es gehört somit $\lambda = 0$ gewiß nicht zum Spektrum von $K(x)$. Nehmen wir umgekehrt von einer quadratischen Form $K(x)$ an,

daß $\lambda = 0$ nicht zu ihrem Spektrum gehöre, so müssen sämtliche Eigenwerte $\lambda_n^{(\omega)}$ ihrer Abschnitte $K_n(x)$ von einem gewissen n an absolut genommen oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Grenze m bleiben und hieraus wiederum folgt, daß die Maxima $\frac{1}{|\lambda_n^{(\omega)}|}$ der absolut genommenen Abschnitte $K_n(x)$ unterhalb der Grenze $\frac{1}{m}$ bleiben müssen, d. h. die Form $K(x)$ ist notwendig eine beschränkte.

Die vorhin gemachte und im Folgenden stets beibehaltene Annahme, daß $K(x)$ eine beschränkte Form sei, ist also damit völlig äquivalent, daß $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum von $K(x)$ gehöre, während die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K(x)$ sehr wohl über alle Grenzen wachsen dürfen.

Wir bestimmen nun eine Größe α so klein, daß auch $\lambda = \alpha$ nicht dem Spektrum von $K(x)$ angehört. Da dann die Nullstellen der Discriminanten der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda K(x)$$

sich an der Stelle $\lambda = \alpha$ nicht häufen, so werden diejenigen der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda \{(x, x) - \alpha K(x)\}$$

absolut genommen nicht über alle Grenzen wachsen, d. h. die quadratische Form

$$K^*(x) = (x, x) - \alpha K(x)$$

hat $\lambda = \infty$ nicht zum Verdichtungswert; dieselbe ist zugleich auch beschränkt. Bezeichnen wir mit $K_n(\lambda; x, y)$ die Resolvente von $K_n(x)$ und mit $K_n^*(\lambda; x, y)$ diejenige von $K_n^*(x)$, so finden wir unmittelbar aus der Definition der Resolvente die Gleichung:

$$(48) \quad K_n(\lambda; x, y) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\alpha}} K_n^*\left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}; x, y\right).$$

Wenden wir nun unseren Satz I auf die Form $K^*(x)$ an und bezeichnen die Eigenwerte, Eigenformen, ferner das Streckenspektrum und die Spektralform von $K^*(x)$ bez. mit

$$\lambda^*, \lambda_1^*, \dots, E_1^*, E_2^*, \dots, s^*, \sigma^*,$$

so ergibt sich für alle außerhalb des Spektrums von K^* liegenden Werte von λ^* die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung

$$(49) \quad \sum_{h=\infty}^L K_{m_h}^*(\lambda^*, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p^*}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_p^*}} + \int_{(\sigma^*)} \frac{d\sigma^*(\mu^*)}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}}.$$

und ebenso

$$(x, x) = \sum_{(p)} E_p^* + \int_{(s^*)} d\sigma^*(\lambda^*).$$

Setzen wir in (49)

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}, \quad \lambda_r^* = \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \alpha}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu - \alpha}$$

ein, wobei

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_r^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}},$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

wird und bezeichnen mit s die Menge der Punkte μ , die der Menge s^* der Punkte μ^* entspricht, so ergibt sich mit Rücksicht auf (48) die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_{m_\lambda}(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}};$$

dabei sind dann λ_r als die Eigenwerte, $E_r = E_r^*$ als die zugehörigen Eigenformen, s als das Streckenspektrum, $\sigma(\mu) = \sigma^*(\mu^*)$ als die Spektralform der Form $K(x)$ zu bezeichnen und es ist $\lambda = \infty$ als Eigenwert und E_∞ als zugehörige Eigenfunktion von $K(x)$ mitzurechnen, falls $\lambda^* = 1$ Eigenwert von $K^*(x)$ war. Aus der obigen Formel für (x, x) wird

$$(50) \quad (x, x) = \sum_{(p, \infty)} E_r + \int_{(s)} d\sigma(\lambda).$$

Die beiden letzten Formeln stimmen mit (42), (43) überein, wenn $K(x)$ $\lambda = \infty$ nicht zum Verdichtungswert hat; in der Tat folgt dann aus der Definition von $K^*(x)$, daß $\lambda^* = 1$ nicht Verdichtungswert und daher auch nicht Eigenwert von K^* ist; demnach ist $\lambda = \infty$ gewiß nicht Eigenwert von $K(x)$.

Bleibt $K(x, y)$ für alle Variablen x absolut unterhalb der endlichen Grenze M , so entnehmen wir aus (2) und Hilfssatz 2, daß auch für alle m

$$K_m(\lambda; x, y) = (x, y)_m + \lambda K_m(x, y) + \lambda^2 K_m K_m(x, y) + \dots$$

$$+ \lambda^m K_m K_m \dots K_m(x, y) + \frac{\Phi_m(\lambda M)^{m+1}}{1 - \lambda M},$$

wo

$$n < m, |\lambda| < \frac{1}{M}, -1 < \vartheta_n < +1$$

ist. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 erhalten wir dann, wenn wir für x, y solche feste Werte nehmen, die von einem endlichen Index an sämtlich verschwinden, für $m = m_h$ in der Grenze $h = \infty$ die Formel

$$(51) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots \\ + \lambda^n K K \dots K(x, y) + \frac{\vartheta_n (\lambda M)^{n+1}}{1 - \lambda M}$$

und hieraus für $n = \infty$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots$$

Die so gewonnene Formel sowie die Tatsache, daß jeder Abschnitt der Resolvente außerhalb des Spektrums regulär analytisch in λ ist, zeigt, daß die Resolvente

$$K(\lambda; x, y) = \lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y)$$

der Form $K(x, y)$ eindeutig durch $K(x)$ bestimmt ist, und hieraus wiederum folgt, indem wir auf den Beweis für die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow \infty} K_{m_h}(\lambda; x, y)$$

zurückgreifen, daß auch allgemein der Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(\lambda; x, y)$$

existiert und dem obigen Grenzwert gleich sein muß. Die letzten Formeln gelten stets für jeden Abschnitt der in Betracht kommenden Formen.

Aus (51) schließen wir, daß die Differenz

$$(52) \quad K(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots + \lambda^n K K \dots K(x, y)\}$$

eine Form ist, bei welcher der absolute Betrag jedes Abschnittes für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ unterhalb der Größe

$$\frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

bleibt. Durch Faltung jenes Ausdruckes (52) mit $K(x, y)$ ergibt sich dann nach Hilfssatz 2, daß der Ausdruck

$$(53) \quad K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) - \{K(x, y) + \lambda K K(x, y) + \lambda^2 K K K(x, y) + \dots + \lambda^n K K K \dots K(x, y)\}$$

absolut genommen im gleichen Sinne die Größe

$$M \frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

nicht überschreitet. Setzen wir in (52) die Zahl $n+1$ an Stelle von n und subtrahieren dann davon das λ -fache des Ausdruckes (53), so entsteht der Ausdruck

$$K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) - (x, y)$$

und dieser Ausdruck bleibt demnach absolut genommen unterhalb der Größe

$$\frac{2|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}.$$

Da nun diese Größe für $n = \infty$ gegen Null konvergiert, so ist damit die Gültigkeit der Gleichung

$$(54) \quad K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) = (x, y)$$

für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ und für jeden Abschnitt und einer oben gemachten Bemerkung (S. 178) zufolge daher auch für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen bewiesen.

Wir sind vorhin zu der Gleichung

$$(55) \quad K(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 K K(x, y) + \dots$$

gelangt und haben die Gültigkeit derselben für jeden Abschnitt und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ erkannt. Aus diesem Umstande wiederum schließen wir, daß für beliebige Werte der Variablen jeder Abschnitt von

$$(56) \quad K(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \dots + \lambda^n K K \dots K(x, y)\}$$

absolut kleiner als

$$(57) \quad \frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

ausfällt und daher muß einer oben (S. 178) gemachten Bemerkung zufolge auch jener Ausdruck (56) selbst für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen absolut kleiner oder gleich der Größe (57) bleiben. Hieraus folgt, indem wir n ins Unendliche zunehmen lassen, daß die Gleichung (55) für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ gültig ist.

Die Gleichung

$$\kappa(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

ist — ebenso wie (50) — vorhin nur in dem Sinne als gültig erkannt worden, daß man darin auf beiden Seiten die nämlichen Abschnitte genommen denkt; wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichung für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen gilt — vorausgesetzt, daß λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet.

Es sei a_1, a_2, \dots ein bestimmtes Wertsystem der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots ; dann bezeichne

$$E_p(a), [E_p(a)]_n, [E_p(a)]_m$$

den Wert, den E_p bez. der n^{te} und m^{te} Abschnitt von E_p für jenes bestimmte Wertsystem annimmt. Wegen (50) liegt

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} [E_p(a)]_n$$

unterhalb einer von n und P unabhängigen endlichen Grenze; wir setzen

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \dots)} [E_p(a)]_n = \varepsilon(n, P)$$

wo $\varepsilon(n, P)$ eine Größe ist, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert. Da bei festem λ die Größen

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} \right|$$

sämtlich eine endliche obere Grenze G haben, so ist, wenn

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \dots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \eta(n, P)$$

gesetzt wird, die Größe $\eta(n, P)$ ebenfalls eine solche, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert.

Da andererseits

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}}$$

eine beschränkte Form ist und zwar derart, daß die absoluten Beträge ihrer Werte sämtlich unterhalb der von P unabhängigen Grenze G bleiben, so folgt aus unseren früheren Betrachtungen

(S. 178), daß

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{[E_r(a)]_m}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} - \sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{[E_r(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} = (G) \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2},$$

($m > n$)

wird, worin (G) eine zwischen endlichen von n, m, P unabhängigen Grenzen gelegene Größe bedeutet.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{(p=1, \dots, P)} \frac{[E_r(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{[E_r(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} + (G) \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_m^2} + \eta(n, P)$$

und wenn wir hierin zuerst $m = \infty$, alsdann $P = \infty$ und zuletzt $n = \infty$ werden lassen, so erhalten wir

$$\sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{E_r(a)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}} = \lim_{n=\infty} \sum_{(p=1, 2, \dots)} \frac{[E_r(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}}.$$

Andererseits wenden wir dieselbe oben (S. 178) zum Beweise der Konvergenz von $A(a, b)$ dargelegte Schlußweise auf die Bilinearform $\sigma(\lambda; x, y)$ an. Da mit Rücksicht auf (31)

$$[\sigma(\mu; x, y)] \leq 1$$

folgt und mithin für alle Werte von μ bei beliebigen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots

$$\sigma(\mu; x, y) \leq 1$$

sein muß, so folgt durch jene Schlußweise zugleich in Bezug auf alle μ die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $[\sigma(\mu; x, y)]_n$ gegen $\sigma(\mu; x, y)$; mithin stellt die Bilinearform $\sigma(\mu; x, y)$ für jedes Wertsystem der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots eine stetige Funktion in μ dar und hieraus wiederum folgt

$$\int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \lim_{n=\infty} \left[\int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right]_n.$$

Mit den beiden letzteren Limesgleichungen ist unsere Behauptung erwiesen, d. h. die Gültigkeit der Partialbruchdarstellung von $K(\lambda; x)$ auf beliebige Werte der unendlichvielen Variablen erweitert.

Die soeben als allgemeingültig erwiesene Partialbruchdarstellung von $K(\lambda; x)$ läßt zugleich erkennen, daß der Wert der Resolvente

$K(\lambda, x)$ für jedes beliebige System der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion ist.

Setzen wir in $K(\lambda; x, y)$ allgemein an Stelle von x , den Ausdruck $\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}$, so entsteht die Faltung:

$$K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y)$$

und daher stellt auch diese für jedes Wertsystem der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion dar.

Aus diesen Tatsachen folgern wir die Gültigkeit der Gleichung (54) nicht nur für beliebige Wertsysteme der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots , sondern auch für alle außerhalb des Spektrums liegenden Werte von λ .

Wir fassen die wichtigsten der gewonnenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Satz II. Es sei $K(x)$ eine quadratische beschränkte Form der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots . Die Resolvente $K(\lambda, x)$ von $K(x)$ ist eine eindeutig bestimmte quadratische Form eben dieser Variablen x_1, x_2, \dots

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p, q)} K_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

deren Koeffizienten $K_{pq}(\lambda)$ für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ regulär analytische Funktionen sind.

Die Resolvente $K(\lambda, x)$ ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet, eine beschränkte Form; sie stellt für jedes beliebige Wertsystem der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots eine analytische Funktion von λ dar.

Die Resolvente $K(\lambda, x)$ gestattet für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots und für genügend kleine Werte von λ die Potenzreihenentwicklung

$$(59) \quad K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda K(x) + \lambda^2 K K(x) + \dots$$

und ferner gilt ebenfalls für beliebige Werte der unendlichvielen Variablen und überhaupt für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ die Partialbruchdarstellung

$$(60) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K , d. h. über alle Eigenwerte eventuell mit Einschluß des Eigenwertes ∞ zu

erstrecken; E_r bezeichnet allgemein die zu λ_r gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine beschränkte Form, die für kein Wertsystem der Variablen x_1, x_2, \dots negativ ausfällt. Das Integral ist über das Streckenspektrum von K zu erstrecken. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine beschränkte Form der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots , und zwar stellt sie für jedes Wertsystem derselben in Bezug auf λ eine Funktion dar, die stetig ist und bei wachsendem λ innerhalb des Streckenspektrums s — von besonderen Werten der x_1, x_2, \dots abgesehen — wächst, in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber konstant bleibt.

Insbesondere gelten die Gleichungen

$$(61) \quad (x, x) = \sum_{(p, \infty)} E_r + \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

$$(62) \quad K(x) = \sum_{(p)} \frac{E_r}{\lambda_r} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu}.$$

Die Resolvente $K(\lambda, x)$ ist mit $K(x)$ durch die Relation

$$(63) \quad K(\lambda; x, y) - \lambda K(x, \cdot) K(\lambda; \cdot, y) = (x, y)$$

verknüpft, die für alle außerhalb des Spektrums von K liegenden Werte von λ gültig ist.

Setzen wir

$$K(\lambda; x, y) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gewisse lineare Funktionen von y_1, y_2, \dots mit konvergenter Quadratsumme sind, so folgt aus (63) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von x_r :

$$\alpha_r - \lambda \sum_{(q)} k_{rq} \alpha_q = y_r, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

d. h. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ lösen diese inhomogenen aus der quadratischen Form $(x, x) - \lambda K(x)$ (wo λ außerhalb des Spektrums liegt) entspringenden unendlichvielen Gleichungen, wenn y_1, y_2, \dots irgend welche Größen mit konvergenter Quadratsumme sind; sie sind die einzige Lösung mit konvergenter Quadratsumme.

Wir wollen nunmehr das Verhalten der Resolvente $K(\lambda, x)$ für einen innerhalb des Spektrums von K liegenden Wert von λ untersuchen.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$\lambda = \nu + i\nu',$$

wo ν, ν' reelle Zahlen bedeuten, und fragen, ob das Produkt

$$(\nu - \lambda) \left\{ \sum_{(p)} \frac{E_r}{\lambda_r - \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\}$$

für $\nu' = 0$ einem Grenzwerte zustrebt.

Es sei zunächst ν eine Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$, aber nicht gleich einem Eigenwerte von $K(x)$; dann setzen wir

$$\sum_{(p)} E_p = E_1 + \dots + E_m + R_m$$

und bezeichnen mit ν_m denjenigen unter den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, der dem Werte ν am nächsten liegt. Nehmen wir nunmehr m so groß, daß gerade noch

$$\nu' \leq (\nu - \nu_m)^2,$$

ist, so wird

$$\text{für } p \leq m \quad \left| \frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq \left| \frac{\nu'}{\lambda_p - \nu} \right| \leq \frac{\nu'}{|\nu_m - \nu|} \leq \sqrt{\nu'}$$

$$\text{und für } p \geq m \text{ gewiß } \left| \frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq 1$$

und daher auch

$$\left| (\nu - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right| \leq \sqrt{\nu'} (E_1 + \dots + E_m) + R_m \leq \sqrt{\nu'} + R_m$$

Da nun für $\nu' = 0$ notwendig m über alle Grenzen wächst und daher R_m gegen Null konvergiert, so folgt

$$(64) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} \left\{ (\nu - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right\} = 0.$$

Die letztere Grenzgleichung gilt gewiß auch, wenn ν weder Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$ noch selbst gleich einem Eigenwert ist.

Aus diesen Tatsachen entnehmen wir andererseits, daß wenn ν dem Eigenwerte λ_p gleich ist, stets notwendig

$$(65) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} \left\{ (\lambda_p - \lambda) \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} \right\} = E_p$$

ausfällt.

Es sei jetzt ν ein Punkt des Streckenspektrums s und μ' eine reelle Zahl $> \nu$. Nehmen wir alsdann

$$\nu' = (\nu - \mu')^2,$$

so erhalten wir durch eine ähnliche Abschätzung des bis μ' erstreckten Integrales

$$(66) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} \left\{ (\nu - \lambda) \int_{\sigma(\nu)}^{\sigma(+\infty)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\} = 0.$$

Ebenso folgt auch

$$(67) \quad \lim_{\nu' \rightarrow 0} \left\{ (\nu - \lambda) \int_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(\nu)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\} = 0.$$

Wegen

$$K(\lambda, x) = (x, x) + \lambda \left\{ \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \int_{(0)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda} \right\}$$

folgt aus (64), (65), (66), (67), daß

$$(68) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu' \rightarrow 0} (\nu - \lambda) K(\lambda, x) &= 0, \\ \text{bez.} &= \lambda_p E_p, \end{aligned}$$

ist, je nachdem ν keiner der Eigenwerte von $K(x)$ ist bez. dem Eigenwert λ , gleich wird.

Als Ergänzung hierzu tritt, wenn

$$\lambda = i\nu'$$

gesetzt wird, die Grenzgleichung

$$(69) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu' \rightarrow \infty} K(\lambda, x) &= 0, \\ \text{bez.} &= E_\infty, \end{aligned}$$

je nach dem $\lambda = \infty$ kein Eigenwert ist oder als solcher gerechnet werden muß. Um dies einzusehen, dienen die analogen Ueberlegungen wie vorhin: man nehme bei der Untersuchung der Summe m so groß, daß gerade noch $\nu' > \nu_m^2$, wenn ν_m den absolut größten der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ bedeutet, und bei der Untersuchung des Integrals $\nu' = \mu^n$.

Bedeutet μ irgend einen außerhalb des Spektrums von K liegenden Wert, so folgt aus (63) durch Faltung mit $K(\mu; x, y)$

$$\lambda K(\cdot, \cdot) K(\lambda; \cdot, x) K(\mu, \cdot, y) = K(\lambda; \cdot, x) K(\mu; \cdot, y) - K(\mu; x, y).$$

Aus dieser Formel und derjenigen, welche aus ihr durch gleichzeitige Vertauschung von $\lambda; x_1, x_2, \dots$ mit $\mu; y_1, y_2, \dots$ entsteht, finden wir die Formel

$$(70) \quad (\lambda - \mu) K(\lambda; x, \cdot) K(\mu; y, \cdot) = \lambda K(\lambda; x, y) - \mu K(\mu; x, y).$$

Bedenken wir nun, daß die Faltung

$$K(\lambda; x, \cdot) K(\mu; y, \cdot)$$

denjenigen Ausdruck bedeutet, der entsteht, wenn wir in $K(\lambda; x, y)$ an Stelle der Variablen y_1, y_2, \dots bez. die Werte

$$\frac{\partial K(\mu; x, y)}{\partial y_1}, \frac{\partial K(\mu; x, y)}{\partial y_2}, \dots$$

eintragen, so erkennen wir aus (68), daß bei festgehaltenem μ und

für $\lambda = \lambda_p + i\nu'$ die Limesgleichung

$$(71) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_p} (\lambda_p - \lambda) K(\lambda; x, \cdot) K(\mu; y, \cdot) = \lambda_p E_p(x, \cdot) K(\mu; y, \cdot)$$

gelten muß. Da andererseits ebenfalls mit Rücksicht auf (68) in gleichem Sinne

$$(72) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_p} (\lambda_p - \lambda) \{ \lambda K(\lambda; x, y) - \mu K(\mu; x, y) \} = \lambda_p^2 E_p(x, y)$$

wird, so folgt aus (71), (72) wegen (70), wenn wir noch λ statt μ schreiben:

$$(73) \quad E_p(x, \cdot) K(\lambda; y, \cdot) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} E_p(x, y).$$

Setzen wir in dieser Gleichung wiederum $\lambda = \lambda_p + i\nu'$, so folgt aus derselben durch Multiplikation mit $\lambda_p - \lambda$ und Anwendung von (68) die Formel

$$(74) \quad E_p(x, \cdot) E_p(\cdot, y) = E_p(x, y).$$

Nehmen wir jedoch zuvor in (73) an Stelle von p den von p verschiedenen Index q und verfahren dann in gleicher Weise, so folgt

$$(75) \quad E_p(x, \cdot) E_q(\cdot, y) = 0, \quad (p \neq q).$$

Mit Benutzung von (69) erkennen wir in gleicher Weise, daß die Formeln (74), (75) auch gültig sind, wenn statt E_p die ev. zu $\lambda = \infty$ gehörige Eigenform E_∞ gesetzt wird.

Setzt man den Wert von $K(\lambda; x, y)$ aus (60) in (73) ein, so folgt aus (74), (75), daß identisch in λ die Gleichung

$$(76) \quad E_p(x, \cdot) \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma(\mu; \cdot, y)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 0$$

erfüllt ist; dieselbe Gleichung gilt auch eventuell für die Eigenform E_∞ .

In der nachfolgenden Betrachtung verstehen wir allgemein unter einer *Einzelform* eine solche beschränkte quadratische Form E , deren Punktspektrum im Endlichen nur aus dem einen Punkte 1 besteht und die kein Streckenspektrum besitzt. Wenden wir unsere Darstellung (62) auf die Einzelform E an, so folgt, daß E selbst die zum Eigenwert 1 gehörige Eigenform ist und mithin wegen (74) der Relation

$$(77) \quad E(x, \cdot) E(\cdot, y) = E(x, y)$$

genügen muß. Umgekehrt, wenn eine beschränkte quadratische Form E der Relation (77) genügt, so erhalten wir für ihre Resolvente bei Anwendung der Formel (59) den Ausdruck

$$(x, x) + \lambda E + \lambda^2 E + \dots = (x, x) - E + \frac{E}{1 - \lambda}$$

und hieraus erkennen wir mit Rücksicht auf (68), (69), daß E nur den einen endlichen Eigenwert 1 besitzt, und sodann folgt auch das Nichtvorhandensein eines Streckenspektrums; d. h. E ist eine Einzelform.

Wenn

$$\begin{aligned} L_1(x) &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots, \\ L_2(x) &= l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

irgendwelche Linearformen in endlicher oder unendlicher Zahl bedeuten, deren Koeffizienten den Relationen

$$\begin{aligned} L_r(\cdot) L_r(\cdot) &= \sum_{(r)} l_{rr}^2 = 1, \\ L_r(\cdot) L_s(\cdot) &= \sum_{(r)} l_{rs} l_{sr} = 0 \end{aligned}$$

genügen, so heiße jenes Formensystem ein *System orthogonaler Linearformen oder kurz ein orthogonales System*.

Der enge Zusammenhang des so definierten Begriffes mit dem Begriff der Einzelform wird erkennbar durch den folgenden Satz:

Jede Einzelform ist als Summe von Quadraten der Linearformen eines orthogonalen Systems darstellbar und umgekehrt stellt die Summe der Quadrate der Linearformen eines orthogonalen Systems stets eine Einzelform dar.

Zum Beweise der ersten Aussage bedenken wir, daß die Einzelform E , da sie selbst ihre Eigenform ist, notwendig definit ausfällt; wenn daher die Variable x_1 in E überhaupt vorkommt, so ist gewiß der Koeffizient von x_1^2 in E — derselbe werde mit e_{11} bezeichnet — positiv. Setzen wir

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \frac{\partial E(x, y)}{\partial y_1}$$

so erhalten wir wegen (77)

$$\begin{aligned} L_1(\cdot) E(x, \cdot) &= L_1(x), \\ L_1(\cdot) L_1(\cdot) &= 1. \end{aligned}$$

Bilden wir daher

$$(78) \quad E_1(x) = E(x) - L_1^2(x),$$

so ergibt sich

$$(79) \quad \begin{aligned} L_1(.) E_1(x, .) &= 0 \\ E_1(x, .) E_1(. , y) &= E_1(x, y), \end{aligned}$$

d. h. E_1 ist ebenfalls eine Einzelform; da E_1 als solche eine definite Form ist und wegen (78) der Koeffizient von x_1^2 in E_1 den Wert Null hat, so kommt die Variable x_1 in E_1 überhaupt nicht vor.

Wenden wir das nämliche Verfahren statt auf E nunmehr auf E_1 an, so gelangen wir zu einer Linearform L_2 und der Einzelform

$$E_2(x) = E_1(x) - L_2^2(x) = E(x) - L_1^2(x) - L_2^2(x),$$

die die Variablen x_1, x_2 nicht enthält; zugleich folgt aus (79)

$$L_1(.) L_2(.) = 0.$$

Schließlich ergibt sich der Ausdruck

$$E(x) - L_1^2(x) - L_2^2(x) - \dots$$

als eine definite beschränkte Form, die keine der Variablen x_1, x_2, \dots enthält und daher identisch Null ist d. h. es ist

$$E(x) = L_1^2(x) + L_2^2(x) + \dots$$

Um die umgekehrte Aussage des Satzes zu beweisen, bilden wir zunächst aus den ersten m Linearformen L_1, \dots, L_m des vorgelegten orthogonalen Systems den in x_1, x_2, \dots linearen Ausdruck

$$M(x) = (x, y) - L_1(x) L_1(y) - \dots - L_m(x) L_m(y).$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten von $M(x)$

$$M(.) M(.) = (y, y) - L_1^2(y) - \dots - L_m^2(y)$$

wird, so folgt, daß hier auch die rechte Seite positiv ausfällt; mithin stellt auch die endliche bez. unendlich fortgesetzte Formenreihe

$$L_1^2(y) + L_2^2(y) + \dots$$

eine beschränkte Form dar und wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen L_1, L_2, \dots folgt sodann, daß diese Form die Relation (77) erfüllt.

Die Einzelform (x, x) und nur diese besitzt auch $\lambda = \infty$ nicht als Eigenwert.

Wir wenden nun die vorstehenden Ergebnisse auf die Eigenformen der quadratischen Form $K(x)$ an. Indem wir die sämtlichen Eigenformen E_p bez. E_r, E_∞ von $K(x)$, die wegen (74) Einzelformen sind, als Summen von Quadraten linearer orthogonaler

Formen x'_1, x'_2, \dots dargestellt denken, gelangen wir in folgender Weise zu einer orthogonalen Substitution der Variablen x_1, x_2, \dots .

Wir bilden zunächst die Form

$$(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots;$$

dieselbe genügt der Relation (77) und ist daher eine Einzelform der Variablen x_1, x_2, \dots ; setzen wir dieselbe in die Gestalt $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots$, wo ξ_1, ξ_2, \dots ebenfalls ein orthogonales System linearer Formen bedeuten, die auch zu x'_1, x'_2, \dots orthogonal sind, so haben wir

$$(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots$$

und mithin definieren die linearen Formen $x'_1, x'_2, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots$ zusammengenommen eine orthogonale Substitution der Variablen x_1, x_2, \dots .

Da die Gleichung (76) gewiß für alle in genügend kleiner Umgebung von $\lambda = 0$ liegenden Werte von λ gelten soll, so schließen wir, da man jede stetige Funktion $w(\mu)$ in dem 0 nicht enthaltenden Intervall s durch lineare Aggregate von Funktionen $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ gleichmäßig approximieren kann, daß auch für jede stetige Funktion $w(\mu)$

$$E_p(x, \cdot) \int_{(s)} w(\mu) d\sigma(\mu; \cdot, y) = 0$$

und folglich auch für alle μ

$$(80) \quad E_p(x, \cdot) \sigma(\mu; \cdot, y) = 0$$

sein muß. Denken wir nun hierin an Stelle der Variablen x_1, x_2, \dots die Variablen $x'_1, x'_2, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots$ eingeführt, so lehrt (80), mit Rücksicht auf die Kovarianz der Faltung bei orthogonaler Transformation und den definiten Charakter von $\sigma(\mu; x)$, daß die so transformierte Spektralform von den Variablen x'_1, x'_2, \dots frei ist; wir bezeichnen dieselbe mit $\xi(\mu; \xi)$. Die Formel (60) nimmt alsdann die Gestalt an

$$(81) \quad K(\lambda, x) = \sum_{(k=1,2,\dots)} \frac{x_k'^2}{1 - k_k \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\xi(\mu; \xi)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

wo k_1, k_2, \dots die betreffenden reziproken Eigenwerte bedeuten, nachdem sie in eine einfach unendliche Reihe gebracht worden sind.

Um die charakteristischen Eigenschaften der Spektralform $\xi(\mu; \xi)$ zu finden, tragen wir in (70) den eben gefundenen Ausdruck

(81) für die Resolvente ein; wir erhalten

$$\begin{aligned} & (\lambda - \mu) \int_{(a)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \cdot)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \int_{\cdot} \frac{d\xi(\varrho; \eta, \cdot)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} \\ &= \lambda \int_{(a)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \mu \int_{(a)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die Identität

$$\frac{\frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \frac{\mu}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}}{\lambda - \mu} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}$$

folgt

$$\int_{(a)} \frac{d\xi(\varrho; \xi, \cdot)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \int_{(a)} \frac{d\xi(\varrho; \eta, \cdot)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} = \int_{(a)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\varrho}} d\xi(\varrho; \xi, \eta).$$

Da diese Gleichung für alle Werte von λ, μ gültig sein soll, so schließen wir wie oben, daß auch für beliebige stetige Funktionen $u(\varrho), v(\varrho)$

$$\int_{(a)} u(\varrho) d\xi(\varrho; \xi, \cdot) \int_{(a)} v(\varrho) d\xi(\varrho; \eta, \cdot) = \int_{(a)} u(\varrho) v(\varrho) d\xi(\varrho; \xi, \eta)$$

gilt; für $u(\varrho) = v(\varrho), \xi = \eta$ nimmt die gefundene Relation die Form an

$$\int_{(a)} (u(\varrho))^2 d\xi(\varrho; \xi) = \int_{(a)} u(\varrho) d\xi(\varrho; \xi, \cdot) \int_{(a)} u(\varrho) d\xi(\varrho; \xi, \cdot).$$

Weiterhin folgt aus (81) für $\lambda = 0$

$$(\xi, \xi) = \int_{(a)} d\xi(\mu; \xi).$$

Da umgekehrt aus der vorletzten Relation die vorhergehenden und mithin schließlich auch (70) und daraus mit Hilfe der letzten Gleichung auch (63) gefolgert werden kann, so erkennen wir, daß die beiden zuletzt gefundenen Bedingungen zur Charakterisierung der Spektralform ξ auch hinreichend sind. Aus (68), (69), (74) folgt die eindeutige Bestimmtheit von λ, E , und andererseits schließen wir, daß auch die Spektralform durch die obigen für sie charakteristischen Relationen und durch die Forderung, es solle K die Darstellung (62) gestatten, eindeutig bestimmt ist; denn die eben angedeutete von den Eigenschaften der Spektralform

ausgehende Betrachtungsweise ergibt, daß die Resolvente durch (60) dargestellt ist, und daß also wegen deren eindeutiger Bestimmtheit auch $\int_{(o)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$ für alle λ und daher auch die Spektralform selbst eindeutig bestimmt ist.

Wir fassen die gewonnenen Resultate wie folgt zusammen:

Satz III. Jede beschränkte quadratische Form K unendlichvieler Variablen läßt sich stets und nur auf eine Weise durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + \int_{(o)} \frac{d\sigma(\mu; \xi)}{\mu},$$

wo k_1, k_2, \dots gewisse absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegende Größen (die reziproken Eigenwerte) bedeuten und die Spektralform $\sigma(\mu; \xi)$ die zu ihrer Charakterisierung auch hinreichenden Relationen

$$(82) \quad \int_{(o)} (u(\mu))^2 d\sigma(\mu; \xi) = \int_{(o)} u(\mu) d\sigma(\mu; \xi, \cdot) \int_{(o)} u(\mu) d\sigma(\mu; \xi, \cdot) \\ (\xi, \xi) = \int_{(o)} d\sigma(\mu; \xi)$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ erfüllt.

Setzen wir in (63) $\lambda = \lambda_r + i\nu'$, so folgt nach Multiplikation mit $\lambda_r - \lambda$ für $\nu' = 0$ wegen (68):

$$E_r(x, y) - \lambda_r K(x, \cdot) E_r(\cdot, y) = 0.$$

Wenn wir E_r als Quadratsumme eines orthogonalen Systemes darstellen:

$$E_r = \sum_{(n)} (L_{rn}(x))^2,$$

so ergibt sich durch Faltung mit $L_{rn}(\cdot)$:

$$L_{rn}(x) - \lambda_r K(x, \cdot) L_{rn}(\cdot) = 0$$

d. h. die Gleichung

$$\lambda L(\cdot) K(x, \cdot) = L(x)$$

kann durch eine beschränkte Linearform L gewiß dann identisch in x_1, x_2, \dots befriedigt werden, wenn λ einer der Eigenwerte von K ist. Ebenso folgt aus (69), daß

$$L(\cdot) K(x, \cdot) = 0$$

gewiß dann befriedigt werden kann, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert ist.

Wir können uns jetzt auch umgekehrt davon überzeugen, daß obige Gleichung nur in diesem Falle durch eine beschränkte Linearform lösbar ist. Mit Rücksicht auf Satz III bedarf es dazu

nur des Nachweises, daß, wenn L eine beschränkte Linearform der Variablen ξ_1, ξ_2, \dots ist, die Relation

$$\lambda L(\cdot) \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, \cdot)}{\mu} = L(\xi)$$

für keinen Wert von λ statthaben kann. Bezeichnen wir die Koeffizienten von L mit l , so nimmt die letztere Relation die Gestalt an

$$\lambda \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, l)}{\mu} = (\xi, l).$$

Hiervon subtrahieren wir die Relation

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; \xi, l) = (\xi, l)$$

und erhalten so die Relation

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\sigma(\mu; \xi, l) = 0,$$

die ebenfalls identisch in ξ_1, ξ_2, \dots erfüllt wäre. Nehmen wir nun in (82) $u(\mu) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, so folgt hieraus

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 d\sigma(\mu; l) = 0$$

und dies ist wegen

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; l) = (l, l)$$

und da σ nie abnimmt, nur möglich für $(l, l) = 0$; wir gewinnen so folgende Tatsache:

Satz IV. Wenn K irgend eine beschränkte quadratische Form ist, so ist die Relation

$$\lambda L(\cdot) K(x, \cdot) = L(x)$$

durch eine beschränkte Linearform L dann und nur dann lösbar, wenn λ ein Eigenwert von K ist.

Insbesondere ist die Gleichung

$$L(\cdot) K(x, \cdot) = 0$$

dann und nur dann lösbar, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert von K ist. Ist $\lambda = \infty$ kein Eigenwert, diese Gleichung also nicht lösbar, so heiße die quadratische Form *abgeschlossen*.

Wir wollen uns fortan in diesem Abschnitte XI mit gewissen zwei Spezialfällen des Satzes III ausführlicher beschäftigen.

Wir nennen eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \dots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ für sich zu Null werden läßt, d. h. wenn

$$\lim_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0, \dots} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \dots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_1^{(n)} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_2^{(n)} = 0, \quad \dots$$

ist. Wenn eine Funktion für jedes Wertsystem der Variablen vollstetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. An den Begriff der Vollstetigkeit knüpfen sich unmittelbar folgende Schlüsse.

Hat eine vollstetige Funktion F die Eigenschaft, absolut genommen für alle Werte der Variablen unterhalb einer endlichen Größe zu bleiben, so besitzt — wie leicht durch das bekannte für endliche Variablenzahl angewandte Verfahren bewiesen werden kann — die Funktion F ein Maximum. Bedeuten ferner $L_1(x), \dots, L_m(x)$ noch m weitere vollstetige Funktionen der Variablen x_1, x_2, \dots und werden nur diejenigen Wertsysteme dieser Variablen zugelassen, die den Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \quad \dots, \quad L_m(x) = 0$$

genügen, so besitzt F ein relatives Maximum; dabei sind die Variablen stets an die Ungleichung

$$(x, x) \leq 1$$

gebunden.

Eine beschränkte Linearform der Variablen x_1, x_2, \dots ist, wie man sofort sieht, auch vollstetig in diesen Variablen. Wir schließen daraus leicht, daß eine vollstetige Funktion der Variablen x_1, x_2, \dots durch orthogonale Transformation derselben wiederum eine vollstetige Funktion der neuen Variablen wird.

Ist eine beschränkte quadratische Form K vollstetig, so ist offenbar, daß ihre Eigenwerte sich im Endlichen nicht häufen; zugleich läßt sich zeigen, daß ein Streckenspektrum überhaupt nicht vorhanden sein kann. Aus Satz III gewinnen wir mithin folgendes Resultat:

Satz V. Wenn eine beschränkte Form K vollstetig ist, so läßt sie sich stets durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen

$$(83) \quad K(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots;$$

dabei sind die Größen k_1, k_2, \dots die reziproken Eigenwerte von K und besitzen, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle.

Wegen der mannigfaltigen und wichtigen Anwendungen dieses Satzes gebe ich hier einen sehr einfachen und von der obigen Theorie unabhängigen Beweis desselben.

Wir nehmen zunächst an, daß K eine positiv definite Form sei; alsdann seien

$$x_1 = l_{11}, \quad x_2 = l_{12}, \quad \dots$$

solche Werte der Variablen, für welche $K(x)$ das Maximum k_1 erlangt. Offenbar fällt die Quadratsumme dieser Werte gleich 1 aus, da wir ja sonst den Wert der Form ohne Verletzung der Bedingung $(x, x) \leq 1$ vergrößern könnten.

Wir setzen

$$L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots$$

und bestimmen, indem wir nunmehr den Variablen die Bedingung

$$L_1(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_2 von $K(x)$; dasselbe werde für die Werte

$$x_1 = l_{21}, \quad x_2 = l_{22}, \quad \dots$$

erlangt, deren Quadratsumme wiederum gleich 1 ausfallen muß. Ferner setzen wir

$$L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots$$

und bestimmen, indem wir den Variablen die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \quad L_2(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_3 von $K(x)$; dasselbe werde für

$$x_1 = l_{31}, \quad x_2 = l_{32}, \quad \dots$$

erlangt. Wir setzen dann

$$L_3(x) = l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + \dots$$

und erhalten durch Fortsetzung dieses Verfahrens ein System von linearen Formen L_1, L_2, L_3, \dots mit den Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(\cdot) L_q(\cdot) = 1,$$

$$L_p(\cdot) L_q(\cdot) = 0. \quad (p \neq q)$$

Auf Grund der früheren Betrachtungen (S. 196) bestimmen wir zu diesen Linearformen ein solches System von Linearformen

$$M_1(x), M_2(x), \dots,$$

daß

$$x'_1 = L_1(x),$$

$$x'_2 = L_2(x),$$

$$\dots$$

$$y_1 = M_1(x),$$

$$y_2 = M_2(x),$$

$$\dots$$

eine orthogonale Substitution der Variabeln x_1, x_2, \dots bilden. Die vermöge dieser orthogonalen Substitution transformierte Form $K(x)$ bezeichnen wir mit $K(x'y)$. Der Koeffizient von $x_1'^2$ in $K(x'y)$ muß offenbar gleich k_1 ausfallen. Andererseits dürfen weitere x_1' enthaltende Glieder in $K(x'y)$ nicht vorkommen, da ja die Differenz

$$K(x'y) - k_1(x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + \dots) = K(x) - k_1(x, x)$$

für alle Werte der Variabeln $x'_1, x'_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ negativ oder Null ausfallen soll. Da die nämlichen Ueberlegungen für x'_2, x'_3, \dots gelten, so haben wir

$$K(x'y) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots + R(y),$$

wo $R(y)$ eine quadratische Form bedeutet, die allein die Variabeln y_1, y_2, \dots enthält.

Da K vollstetig ist, so gilt dies auch von der Form

$$K(x'0) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots$$

und mithin müssen die Größen k_1, k_2, \dots , falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen Null konvergieren; denn sonst würde es eine Reihe von Werten von $K(x'0)$ geben, die gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert, während jedes der Argumente x'_1, x'_2, \dots für sich gegen Null konvergiert.

Gäbe es nun ein Wertsystem $y_1 = m_1, y_2 = m_2, \dots$, für welches $R(m) > 0$ ausfiele, so könnte man q so bestimmen, daß auch $R(m) > k$ wird. Alsdann würde für

$$x'_1 = 0, x'_2 = 0, \dots, y_1 = m_1, y_2 = m_2, \dots$$

auch $K > k$, ausfallen; die Gleichungen

$$L_1(x) = 0, L_2(x) = 0, \dots, M_1(x) = m_1, M_2(x) = m_2, \dots$$

würden mithin ein Wertsystem der Variabeln x_1, x_2, \dots bestimmen,

für welches insbesondere die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \dots, L_{-1}(x) = 0$$

erfüllt sind und zugleich $K > k$, ausfällt; dies widerspricht der Bestimmungsweise von k , und mithin ist $R(y)$ nicht positiver Werte fähig.

Wegen

$$K(0y) = R(y)$$

ist $R(y)$ gewiß auch negativer Werte nicht fähig und folglich ist $R(y)$ identisch gleich Null; d. h. es ist

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \dots$$

Wird $K(x)$ nicht als eine definite Form angenommen, so führt die nämliche Ueberlegung auf die Darstellung

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \dots + R(y),$$

wo $R(y)$ positiver Werte nicht fähig ist. Da sodann $-R(y)$ als positiv definite Form eine Darstellung derselben Art zuläßt, so erhalten wir schließlich auch für K eine Darstellung durch die Quadrate orthogonaler Linearformen und damit ist der Beweis für den Satz V vollständig erbracht.

Ein hinreichendes Kriterium für die Vollstetigkeit einer Form gewinnen wir durch folgenden Satz.

Satz VI. Wenn für eine quadratische Form K eine der Summen

$$s_2 = \sum_{(p,q)} k_{pq} k_{pq} = \sum_{(p,q)} k_{pq}^2,$$

$$s_4 = \sum_{(p,q,r,s)} k_{pq} k_{pq} k_{rs} k_{rs},$$

$$\dots$$

endlich bleibt oder wenn für eine definite quadratische Form K eine der Summen

$$s_1 = \sum_{(p)} k_{pp},$$

$$s_3 = \sum_{(p,q,r)} k_{pq} k_{qr} k_{rp},$$

$$\dots$$

endlich bleibt, so ist K eine beschränkte vollstetige Form.

In der Tat, ist K eine quadratische Form, deren Koeffizienten eine endliche Quadratsumme besitzen, so folgt wegen

$$\left| x_1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_2} + \dots \right|^2 \leq \left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_2} \right)^2 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_p} \right)^2 \leq k_{p1}^2 + k_{p2}^2 + \dots$$

notwendig

$$|K(x)| \leq \sqrt{\sum_{(p,q)} k_{pq}^2}.$$

Durch Anwendung dieser Tatsache auf die quadratische Form

$$K(x) - K_n(x) = \sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq} x_p x_q,$$

wo rechts p, q alle ganzzahligen Wertepaare, abgesehen von solchen, für die zugleich $p \leq n$ und $q \leq n$, durchläuft, finden wir

$$|K(x) - K_n(x)| \leq \sqrt{\sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq}^2},$$

und hieraus entnehmen wir, da doch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq}^2} = 0$$

wird, die verlangte Vollstetigkeit von $K(x)$.

Ist K eine definite Form, so muß

$$k_{pq}^2 \leq k_{pp} k_{qq}$$

sein und es ist mithin

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}^2 \leq \left(\sum_{(p)} k_{pp} \right)^2;$$

wenn also bei einer definiten Form $\sum_{(p)} k_{pp}$ endlich bleibt, so haben ihre Koeffizienten gewiß auch eine endliche Quadratsumme und die Form ist nach der vorigen Betrachtung wiederum eine vollstetige Funktion der Variablen.

Nunmehr erkennen wir leicht der Reihe nach folgende Tatsachen:

1. Wenn eine beschränkte quadratische Form K nicht vollstetig ist, so ist sie auch für das besondere Wertsystem $0, 0, \dots$ nicht vollstetig. Diese Behauptung folgt durch Anwendung der Formel

$$K(x+a) = K(x) + 2K(x, a) + K(a),$$

wenn darin für a_1, a_2, \dots ein Wertsystem genommen wird, für welches K nicht vollstetig ist — mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $K(x, a)$ als eine beschränkte Linearform gewiß vollstetig ist.

2. Wenn K eine vollstetige quadratische Form ist, so ist es auch die Form KK ; dies ergibt unmittelbar der Satz V.

3. Wenn K eine vollstetige, K^* irgend eine quadratische Form ist und für alle Wertsysteme x_1, x_2, \dots die Ungleichung

$$|K^*(x)| \leq |K(x)|$$

gilt, so ist auch K^* vollstetig; denn aus dieser Ungleichung folgt die Vollstetigkeit für das Wertsystem $0, 0, \dots$.

4. Wenn K eine vollstetige, K^* eine beschränkte Form ist, so ist die Faltung beider Formen vollstetig; wegen

$$|K(x, \cdot) K^*(x, \cdot)| \leq \sqrt{(KK(x))(K^* K^*(x))}$$

ist nämlich diese Faltung für das Wertsystem $0, 0, \dots$ gewiß vollstetig, da nach 2 die Form KK vollstetig ist.

5. Wenn die Faltung KK einer quadratischen Form K vollstetig ist, so ist es auch die Form K selbst; dies ergibt sich ebenso vermöge 1 aus der Ungleichung

$$|K(x)| \leq \sqrt{KK(x)}.$$

6. Ist eine der Formen, die durch wiederholte Faltung aus der beschränkten Form K entstanden sind:

$$K^{(3)} = KKK, \quad K^{(4)} = KKKK, \quad K^{(5)} = KKKKK, \quad \dots$$

vollstetig, so ist auch K vollstetig. Denn ist etwa $K^{(5)}$ vollstetig, so sind wegen 4 auch die Formen

$$K^{(5+1)}, K^{(5+2)}, \dots$$

vollstetig; wählen wir unter diesen eine Form aus, für die die Faltungszahl eine Potenz von 2 ist, etwa $K^{(2^g)}$, so schliessen wir durch g -malige Anwendung von 5 auf die Vollstetigkeit von K .

7. Wenn K eine beschränkte definite Form ist, so sind auch die Faltungen $K^{(3)}, K^{(4)}, \dots$ definit; denn es entsteht beispielsweise $K^{(3)}$ aus K , indem wir in $K(x)$ an Stelle der Variablen x , die Ausdrücke $\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}$ einsetzen.

Da nun allgemein s , nichts anders als die Invariante $K^{(s)}(.,.)$ d. h. die Summe der Koeffizienten von x_s^2 in $K^{(s)}$ ist, so folgt aus 6. und 7. und da der Fall $f = 1$ bereits zuvor erledigt worden ist, die Richtigkeit des Satzes VI allgemein.

Aus Satz V und VI entnehmen wir die folgende Tatsache:

Satz VII. Eine quadratische Form K , die eine der Voraussetzungen des Satzes VI erfüllt, gestattet gewiß die orthogonale Transformation (83) auf eine Quadratsumme.

Ein Gegenstück zu dem in den Sätzen V—VII behandelten Fall bildet die Annahme, daß die Form K kein Punktspektrum, sondern nur ein Streckenspektrum besitzt. Um hier nur den einfachsten Fall — der überdies typisch ist — ins Auge zu fassen, fügen wir dieser Annahme noch die wei-

teren hinzu, daß das Streckenspektrum s aus einer endlichen Anzahl von Intervallen bestehen möge, daß ferner die Koeffizienten der Spektralform $\sigma(\mu, x)$ stetig differenzierbare Funktionen von μ seien und endlich, daß, wenn

$$\frac{d\sigma(\mu, x)}{d\mu} = \psi(\mu, x) = \sum_{(p, q=1, 2, \dots)} \psi_p(\mu) x_p x_q$$

gesetzt wird, $\psi_{11}(\mu)$ innerhalb s nirgends verschwindet und, wenn der Kürze halber

$$\psi_1(\mu) = \frac{\psi_{11}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_{12}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \dots$$

ist, diese unendlichvielen Funktionen $\psi_1(\mu), \psi_2(\mu), \dots$ linear von einander unabhängig ausfallen, in dem Sinne, daß bei willkürlicher Wahl von $u(\mu)$ zwischen den Integralen

$$(84) \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_1(\mu) d\mu, \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_2(\mu) d\mu, \quad \dots$$

keine lineare Relation bestehen soll, deren Koeffizienten Konstante mit endlicher Quadratsumme sind.

Führen wir in die Relation (82) diese Annahmen ein und setzen

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \dots$$

und an Stelle von $u(\mu)$ die Funktion

$$\frac{u(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}},$$

so ergibt sich

$$(85) \quad \int_{(s)} (u(\mu))^2 d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \left\{ \int_{(s)} u(\mu) \psi_p(\mu) d\mu \right\}^2,$$

und hieraus entnehmen wir die allgemeinere Formel

$$(86) \quad \int_{(s)} u(\mu) v(\mu) d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \int_{(s)} u(\mu) \psi_p(\mu) d\mu \int_{(s)} v(\mu) \psi_p(\mu) d\mu.$$

Für

$$v(\mu) = \psi_r(\mu)$$

folgt mithin

$$(87) \quad \int_{(s)} u(\mu) \psi_r(\mu) d\mu = \sum_{(p=1, 2, \dots)} \int_{(s)} \psi_p(\mu) \psi_r(\mu) d\mu \int_{(s)} \psi_p(\mu) u(\mu) d\mu.$$

Aus unserer Annahme über die lineare Unabhängigkeit der Integrale (84) erkennen wir, daß die Relation (87) identisch für alle Funktionen $u(\mu)$ nicht anders erfüllt sein kann, als wenn

$$(88) \quad \begin{aligned} \int_{(a)} (\psi_r(\mu))^2 d\mu &= 1, \\ \int_{(a)} \psi_r(\mu) \psi_s(\mu) d\mu &= 0 \quad (r \neq s) \end{aligned}$$

ist.

Wegen des positiv definiten Charakters der Form $\psi(\mu, \xi)$ ist

$$(\psi_{11}\xi_1 + \psi_{12}\xi_2 + \dots)^2 \leq \psi(\mu, \xi) \psi_{11}$$

oder

$$(89) \quad (\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \dots)^2 \leq \psi(\mu, \xi).$$

Andererseits haben wir wegen (88)

$$\int_{(a)} (\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \dots)^2 d\mu = (\xi, \xi)$$

und, da auch

$$\int_{(a)} \psi(\mu, \xi) d\mu = (\xi, \xi)$$

ist, so wird

$$\int_{(a)} \{ \psi(\mu, \xi) - (\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \dots)^2 \} d\mu = 0.$$

Da aber der hier unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck nach (89) für keinen Wert von μ negativ ausfällt, so ist derselbe stets gleich Null, d. h. es ist

$$\psi(\mu, \xi) = (\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \dots)^2.$$

Wir ersehen hieraus, daß unter den gemachten Annahmen die charakteristische Eigenschaft der Spektralform $\sigma(\mu, \xi)$ darin besteht, daß ihre Ableitung nach μ das Quadrat einer Linearform wird, deren Koeffizienten die Orthogonalitätseigenschaften (85) und (88) besitzen. Da umgekehrt eine solche Form alle charakteristischen Eigenschaften einer Spektralform erfüllt, so ist es hiernach leicht, eine quadratische Form K zu konstruieren, deren Spektrum aus einer Zahl gegebener Intervalle besteht: man bestimme für die Intervalle s ein vollständiges System von orthogonalen Funktionen ψ_1, ψ_2, \dots d. h. ein System solcher Funktionen, die den Relationen (85) und (88) genügen — was leicht geschehen kann — und setze dann

$$K(\xi) = \int_{(a)} \frac{(\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \dots)^2}{\mu} d\mu.$$

Als einfachstes Beispiel diene die quadratische Form

$$(90) \quad K(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots;$$

dieselbe besitzt kein Punktspektrum und ihr Streckenspektrum

besteht aus den Intervallen

$$\lambda = -\infty \text{ bis } -1 \quad \text{und} \quad +1 \text{ bis } +\infty.$$

Wir finden

$$\psi_r(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} \sin pt,$$

wo t den zwischen 0 und π gelegenen Wert von $\arccos \frac{1}{\mu}$ bedeutet. In der Tat bestätigt sich dann durch Rechnung

$$\int_{\left(\begin{smallmatrix} -\infty \dots -1 \\ +1 \dots +\infty \end{smallmatrix}\right)} (\psi_1(\mu)x_1 + \psi_2(\mu)x_2 + \dots)^2 d\mu = (x, x),$$

$$K(x) = \int_{\left(\begin{smallmatrix} -\infty \dots -1 \\ +1 \dots +\infty \end{smallmatrix}\right)} \frac{(\psi_1(\mu)x_1 + \psi_2(\mu)x_2 + \dots)^2}{\mu} d\mu.$$

In Bestätigung von Satz IV haben ferner, wie man erkennt, die unendlichvielen Gleichungen

$$x_1 - \frac{\lambda}{2} x_2 = 0,$$

$$x_2 - \frac{\lambda}{2} (x_1 + x_3) = 0,$$

$$x_3 - \frac{\lambda}{2} (x_2 + x_4) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

für keinen Wert von λ Lösungen x_1, x_2, \dots , deren Quadratsumme endlich bleibt.

Ein anderes Beispiel liefert die quadratische Form

$$(91) \quad \frac{2}{\sqrt{2^2-1}} x_1 x_2 + \frac{4}{\sqrt{4^2-1}} x_2 x_3 + \frac{6}{\sqrt{6^2-1}} x_3 x_4 + \dots;$$

das Spektrum ist das nämliche, wie im ersten Beispiel. Wir finden

$$\psi_r(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} P^{(r-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die P die Legendreschen Polynome sind. Setzen wir noch

$$x_r(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} Q^{(r-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die Q die zugehörigen Kugelfunktionen zweiter Art bedeuten,

so erhält die Resolvente von K folgende Gestalt:

$$K(\lambda, x) = \sum_{(p, q \geq p)} 4\lambda \psi_p(\lambda) \chi_q(\lambda) x_p x_q.$$

Die beiden quadratischen Formen (90) und (91) lassen sich durch eine orthogonale Substitution der Variablen in einander überführen, wie aus ihrer Darstellung durch die Spektralform hervorgeht.

Läßt man die oben gemachte Annahme der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\psi_1(\mu), \psi_2(\mu), \dots$ fallen, so wird die Ableitung der Spektralform nicht ein Quadrat, sondern eine Summe von Quadraten linearer Formen von entsprechender Art.

XII.

Simultanes System quadratischer Formen, die Hermitesche Form, die schiefsymmetrische Form und die Bilinearform mit unendlichvielen Variablen.

Die in Abschnitt XI entwickelten Methoden und Resultate lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeit auf allgemeinere Formen mit unendlichvielen Variablen ausdehnen. Wir betrachten zunächst den Fall eines simultanen Systems zweier quadratischer Formen, von denen die eine definiten Charakter hat, die andere als Aggregat von positiven und negativen Quadraten der Variablen vorgelegt ist. Mit Hülfe meiner Methode des Grenzüberganges, ausgehend von Formen mit endlicher Variabelnzahl können wir leicht die entsprechende Theorie entwickeln; wir heben nur folgendes Resultat hervor:

Satz VIII. Es sei eine positiv definite vollstetige abgeschlossene quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots$$

vorgelegt, wo v_1, v_2, \dots bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine unendliche Reihe von Null verschiedener Größen x_1, x_2, \dots , deren Vorzeichen bez. v_1, v_2, \dots sind und die gegen Null konvergieren — ihre reziproken Werte mögen Eigenwerte von K in Bezug auf V heißen — und von zugehörigen beschränkten Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ — sie mögen die zugehörigen Eigenformen heißen — von solcher Art, daß die „Polaritätsrelationen“

$$\begin{aligned} L_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) L_q(\cdot) &= v_p, \\ L_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) L_q(\cdot) &= 0, \end{aligned} \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = |\kappa_1| (L_1(x))^2 + |\kappa_2| (L_2(x))^2 + \dots$$

gestattet.

Man kann diesen Satz VIII auch ohne den Grenzübergang von endlicher zu unendlicher Variablenzahl lediglich auf Grund des Satzes V mit Ausschluß neuer Konvergenzbetrachtungen beweisen.

Zu dem Zwecke setzen wir zunächst die vorgelegte Form $K(x)$ als abgeschlossen voraus: wir bringen dann diese Form $K(x)$ nach Satz V durch eine orthogonale Transformation der Variablen x_1, x_2, \dots in die Gestalt einer Quadratsumme; wir bezeichnen die neuen Variablen mit x'_1, x'_2, \dots und finden

$$K(x) = k_1 x'^2_1 + k_2 x'^2_2 + \dots,$$

wo dann k_1, k_2, \dots lauter positive Größen sind, die gegen Null konvergieren. Ferner bezeichnen wir mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variablen x'_1, x'_2, \dots und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variablen ξ_1, ξ_2, \dots , die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von x'_1, x'_2, \dots die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ einsetzen.

Wir können nun leicht zeigen, daß $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form der Variablen ξ_1, ξ_2, \dots ist. In der Tat ist, wie man sieht, $V'(x')$ als Differenz zweier Einzelformen $E_1(x')$ und $E_2(x')$ darstellbar; dieselben genügen als solche den Ungleichungen

$$E_1(x') \leq (x', x'), \quad E_2(x') \leq (x', x').$$

Setzen wir an Stelle von x'_1, x'_2, \dots wieder $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ ein, so gehen diese Ungleichungen über in

$$E_1(\sqrt{k}\xi) \leq k_1 \xi^2_1 + k_2 \xi^2_2 + \dots,$$

$$E_2(\sqrt{k}\xi) \leq k_1 \xi^2_1 + k_2 \xi^2_2 + \dots$$

Wären nun diese Einzelformen nicht vollstetig in den Variablen ξ_1, ξ_2, \dots , so müßten sich auch Wertsysteme $\alpha^{(n)}_1, \alpha^{(n)}_2, \dots$ finden lassen, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)}_1 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)}_2 = 0, \quad \dots$$

wird, während die Einzelformen, die ja positiv definit sind, für

$$\xi_1 = \alpha^{(n)}_1, \quad \xi_2 = \alpha^{(n)}_2, \quad \dots$$

Werte erhalten müßten, die oberhalb einer positiven von n unab-

hängigen Größe bleiben; dies aber widerspräche den obigen Ungleichungen, da $K(x)$ vollstetig ist. Da demnach $E_1(\sqrt{k}\xi)$, $E_2(\sqrt{k}\xi)$ vollstetig in ξ_1, ξ_2, \dots sind, so ist dies auch $V'(\sqrt{k}\xi)$. Die Tatsache der Vollstetigkeit von $E_1(\sqrt{k}\xi)$, $E_2(\sqrt{k}\xi)$ in den Variablen ξ_1, ξ_2, \dots folgt auch unmittelbar aus 4. auf S. 205.

Nunmehr transformieren wir nach Satz V die Variablen ξ_1, ξ_2, \dots orthogonal in die neuen Variablen ξ'_1, ξ'_2, \dots derart, daß die Form $V'(\sqrt{k}\xi)$ die Gestalt

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \alpha_1 \xi'^2_1 + \alpha_2 \xi'^2_2 + \dots$$

erhält, worin $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gewisse reelle Größen sind, die gegen Null konvergieren. Bezeichnen wir nun diejenigen Linearformen von x'_1, x'_2, \dots , die aus den Formen $\xi'_r(\xi)$ hervorgehen, wenn wir darin für ξ_1, ξ_2, \dots bez. die Ausdrücke $\sqrt{k_1}x'_1, \sqrt{k_2}x'_2, \dots$ einsetzen, mit $\xi'_r(\sqrt{k}x')$, so ist, da jene Formen eine orthogonale Transformation bilden:

$$\begin{aligned} K(x) &= (\sqrt{k_1}x'_1)^2 + (\sqrt{k_2}x'_2)^2 + \dots \\ &= (\xi'_1(\sqrt{k}x'))^2 + (\xi'_2(\sqrt{k}x'))^2 + \dots; \end{aligned}$$

ferner wird:

$$\begin{aligned} \xi'_r(\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta) &= \frac{\partial \xi'_r(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \xi'_r(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_2} + \dots \\ &= \xi'_r(\sqrt{k}\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \cdot) \end{aligned}$$

und folglich wird:

$$\xi'_r(\sqrt{k}\cdot) V'(\sqrt{k}\xi, \cdot) = \alpha_r \xi'_r(\xi).$$

Aus dieser Formel schließen wir in gleicher Weise

$$\xi'_r(\sqrt{k}\cdot) V'(\cdot, \cdot) \xi'_r(\sqrt{k}\cdot) = \alpha_r \xi'_r(\cdot) \xi'_r(\cdot).$$

Wenn wir nun wieder zu den Variablen x_1, x_2, \dots zurückkehren und allgemein mit $A_r(x)$ diejenige Linearform von x_1, x_2, \dots bezeichnen, die dabei aus $\xi'_r(\sqrt{k}x')$ wird, so erhalten wir

$$A_r(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_r(\cdot) = \alpha_r \xi'_r(\cdot) \xi'_r(\cdot)$$

und das ist wegen der Orthogonalität der Formen $\xi'_r(\xi)$ gleich $\alpha_r (p = q)$ oder gleich Null ($p \neq q$); andererseits wird

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots$$

Wäre $\alpha_r = 0$, so müßte für alle x_1, x_2, \dots

$$A_r(\cdot) V(\cdot, \cdot) K(\cdot, x) = 0$$

sein, was der Abgeschlossenheit von K und von V wider-

nach x'_1, x'_2, \dots aufgelöst und stellen die Lösungen als Funktionen von a_1, \dots, a_{e+1} , wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} x'_1 &= o_{11} a_1 + \dots + o_{1,e+1} a_{e+1}, \\ x'_2 &= o_{21} a_1 + \dots + o_{2,e+1} a_{e+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Endlich bestimmen wir für jedes n solche $e+1$ Größen $a_1^{(n)}, \dots, a_{e+1}^{(n)}$, daß nach Eintragung dieser Werte von x'_1, x'_2, \dots die $e+1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x'_1 + \dots + \alpha_{1e} x'_e &= 0, \\ &\dots \\ \alpha_{e1} x'_1 + \dots + \alpha_{ee} x'_e &= 0, \\ a_1^2 + \dots + a_{e+1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

für

$$a_1 = a_1^{(n)}, \dots, a_{e+1} = a_{e+1}^{(n)}$$

erfüllt sind.

Wählen wir nun solche $n = n_h$ aus, daß die Grenzwerte von $a_1^{(n_h)}, \dots, a_{e+1}^{(n_h)}$ für $h = \infty$ existieren und setzen die durch diese Werte $a_1^{(n_h)}, \dots, a_{e+1}^{(n_h)}$ vermittelten Größen x'_1, \dots, x'_{n_h} in den n_h -ten Abschnitt der obigen Identität

$$v_1(x_1(x'))^2 + v_2(x_2(x'))^2 + \dots = x_1 \left(\xi'_1 \left(\frac{x'}{\sqrt{k}} \right) \right)^2 + x_2 \left(\xi'_2 \left(\frac{x'}{\sqrt{k}} \right) \right)^2 + \dots$$

ein, so erkennen wir, daß die linke Seite dieser Identität, da sie eine beschränkte Form der Variablen x'_1, x'_2, \dots darstellt und als solche nach S. 178 stetig in diesen Variablen ist, in der Grenze für $h = \infty$ den Wert -1 erhält, während die rechte Seite beständig ≥ 0 ausfällt.

Hiernach sind beide Fälle als unmöglich erkannt und wir dürfen also von vorneherein allgemein x , vom selben Vorzeichen wie v , annehmen.

Setzen wir daher jetzt

$$L_r(x) = \frac{A_r(x)}{\sqrt{|x_r|}},$$

so sind die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ von der im Satze VIII verlangten Beschaffenheit.

Das nämliche Schlußverfahren ermöglicht die Behandlung einer nicht abgeschlossenen Form K .

Um dies einzusehen, bringen wir wiederum die Form K nach Satz V durch eine orthogonale Transformation der Variablen $x_1,$

x_1, \dots in die Gestalt einer Quadratsumme. Wir setzen

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots,$$

wo k_1, k_2, \dots teils positive teils verschwindende Größen sind.

Wir bezeichnen wiederum mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variablen x'_1, x'_2, \dots und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variablen ξ_1, ξ_2, \dots , die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von x'_1, x'_2, \dots die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \dots$ einsetzen. Da $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form in ξ_1, ξ_2, \dots ist, so können wir nach Satz V die Variablen ξ_1, ξ_2, \dots orthogonal in die neuen Variablen ξ'_1, ξ'_2, \dots transformieren derart, daß

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \kappa_1 \xi_1'^2 + \kappa_2 \xi_2'^2 + \dots$$

sind, worin $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ gewisse teils positive oder negative teils verschwindende Größen sind, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden gegen Null konvergieren. Bilden wir endlich entsprechend wie vorhin die Ausdrücke $\xi'_p(\sqrt{k}x')$ und bezeichnen allgemein mit $A_p(x)$ diejenige Linearform, die aus $\xi'_p(\sqrt{k}x')$ wird, wenn wir darin statt der Variablen x'_1, x'_2, \dots wieder die ursprünglichen Variablen x_1, x_2, \dots einführen, so wird wie vorhin

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots,$$

$$A_p(\cdot)V(\cdot, \cdot)A_q(\cdot) = 0, \quad (p \neq q) \text{ bez. } = \kappa_p \quad (p = q).$$

Wir sprechen dieses den Satz VIII ergänzende Resultat wie folgt aus:

Satz VIII. Es sei eine positiv definite vollstetige quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt*

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots$$

vorgelegt, wo v_1, v_2, \dots bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann giebt es stets eine Reihe von teils positiven oder negativen teils verschwindenden Größen $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren und von zugehörigen beschränkten Linearformen $A_1(x), A_2(x), \dots$ derart, daß die Polaritätsrelationen

$$A_p(\cdot)V(\cdot, \cdot)A_q(\cdot) = \kappa_p,$$

$$A_p(\cdot)V(\cdot, \cdot)A_q(\cdot) = 0, \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots$$

gestattet.

Unter einer *Hermiteschen Form* der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ verstehen wir eine Bilinearform dieser Variablen von der Gestalt

$$H(x, y) = \sum_{(p, q)} h_{pq} x_p y_q,$$

deren Koeffizienten h_{pq} komplexe der Bedingung

$$h_{pq} = k_{pq} + i s_{pq} = \bar{h}_{qp} = k_{qp} - i s_{qp}$$

genügende Größen sind. Stellt sowohl Real- wie Imaginärteil von $H(x, y)$ eine vollstetige Funktion der reellen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ dar, so lassen sich reelle im Endlichen nirgends sich verdichtende Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — die Eigenwerte von H — und zugehörige Linearformen mit komplexen Koeffizienten $L_1(x), L_2(x), \dots$ — die Eigenformen von H — finden, so daß

$$(x, y) = L_1(x) \bar{L}_1(y) + L_2(x) \bar{L}_2(y) + \dots,$$

$$H(x, y) = \frac{L_1(x) \bar{L}_1(y)}{\lambda_1} + \frac{L_2(x) \bar{L}_2(y)}{\lambda_2} + \dots$$

wird und daß die Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(\cdot) \bar{L}_p(\cdot) = 1, \quad L_p(\cdot) \bar{L}_q(\cdot) = 0 \quad (p \neq q)$$

erfüllt sind; die horizontalen Striche deuten die Vertauschung von i mit $-i$ an. Der Beweis dieser Tatsache kann analog wie unten der Beweis des spezielleren Satzes IX geführt werden.

Nehmen wir die Koeffizienten der Hermiteschen Form rein imaginär an und unterdrücken alsdann den Faktor i , so entspringt die schiefsymmetrische Form; unter einer *schiefsymmetrischen Form* verstehen wir mithin eine Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ von der Gestalt

$$S(x, y) = \sum_{(p, q)} s_{pq} x_p y_q,$$

deren Koeffizienten reelle der Bedingung

$$s_{pq} = -s_{qp}, \quad s_{pp} = 0$$

genügende Größen sind. Die vorhin für eine Hermitesche Form ausgesprochene Tatsache drückt sich für den besonderen Fall der schiefsymmetrischen Form, wie folgt, aus:

Satz IX. Wenn die schiefsymmetrische Form $S(x, y)$ vollstetig ist, so gibt es eine orthogonale Transformation der Variablen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

in die neuen Variablen

$$\xi_1, \xi'_1, \xi_2, \xi'_2, \dots$$

so daß, wenn die Variablen y_1, y_2, y_3, \dots mittelst derselben orthogonalen Transformation simultan in die Variablen $\eta_1, \eta'_1, \eta_2, \eta'_2, \dots$ übergehen, die Form S die Gestalt

$$S(x, y) = k_1(\xi_1 \eta'_1 - \xi'_1 \eta_1) + k_2(\xi_2 \eta'_2 - \xi'_2 \eta_2) + \dots$$

erhält; dabei sind k_1, k_2, \dots Größen, die, falls sie in unendlicher Zahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle besitzen.

Zum Beweise betrachten wir $2S(x, y)$ als quadratische Form der unendlichvielen Variablen $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ und erkennen sodann aus Satz V das Vorhandensein von Größen k_1, k_2, \dots und zugehörigen Linearformen $L_1(x, y), L_2(x, y), \dots$ jener Variablen, so daß

$$2S(x, y) = k_1(L_1(x, y))^2 + k_2(L_2(x, y))^2 + \dots$$

und

$$(x, x) + (y, y) = (L_1(x, y))^2 + (L_2(x, y))^2 + \dots$$

wird. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der schiefsymmetrischen Form

$$\begin{aligned} S(x, y) &= -S(y, x), \\ S(x, y) &= -S(-x, y) \end{aligned}$$

folgt leicht, daß in der obigen Darstellung für $2S(x, y)$ zu jedem k_r, L_r stets noch die Eigenwerte und zugehörigen Linearformen

$$\begin{aligned} k_r &= -k_r, & L_r(x, y) &= L_r(y, x), \\ k_{r'} &= -k_r, & L_{r'}(x, y) &= L_r(-x, y), \\ k_{r''} &= -k_r = k_r, & L_{r''}(x, y) &= L_r(-x, y) = L_r(y, -x) \end{aligned}$$

vorhanden sein müssen, deren Vereinigung in der Darstellung von $2S(x, y)$ die Glieder

$$k_r \{ (L_r(x, y))^2 - (L_r(y, x))^2 - (L_r(-x, y))^2 + (L_r(y, -x))^2 \}$$

und in der Darstellung von $(x, x) + (y, y)$ die Glieder

$$(L_r(x, y))^2 + (L_r(y, x))^2 + (L_r(-x, y))^2 + (L_r(y, -x))^2$$

liefert.

Setzen wir nun

$$L_r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (O_r(x) + O'_r(y)),$$

wo $O_r(x)$ eine lineare Form von x_1, x_2, \dots und $O'_r(y)$ eine lineare Form von y_1, y_2, \dots ist, so gehen die obigen Darstellungen über in

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \sum k_r (O_r(x) O'_r(y) - O'_r(x) O_r(y)), \\ (x, x) + (y, y) &= \sum (O_r(x))^2 + (O'_r(x))^2 + (O_r(y))^2 + (O'_r(y))^2, \end{aligned}$$

und da $L_1(x, y), L_2(x, y), \dots$ zu einander orthogonal sind, folgt leicht auch die Orthogonalität der Formen O_1, O_2, \dots ; mithin bestimmen

$$\xi_r = O_r(x), \quad \xi'_r = O'_r(x)$$

eine orthogonale Transformation von der verlangten Beschaffenheit.

Aus dieser Darstellung folgt durch eine einfache Ueberlegung, wie sie später ähnlich angestellt werden wird (S. 224), daß die aus $(x, y) - \lambda S(x, y)$ entspringenden inhomogenen Gleichungen eindeutig lösbar sind, außer wenn $\lambda = \frac{i}{k_1}, \frac{i}{k_2}, \dots$ ist; für diese rein imaginären Eigenwerte der Form $S(x, y)$ haben die homogenen Gleichungen eine nicht identisch verschwindende Lösung und zwar ist die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen stets endlich.

Was schließlich die Theorie der Bilinearform betrifft, so sehen wir zunächst ohne Schwierigkeit folgende Tatsachen ein:

Wenn die Bilinearform $A(x, y)$ eine vollstetige Funktion der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ darstellt, so ist, wenn A_n den n^{ten} Abschnitt der Bilinearform A bezeichnet, für jedes Wertsystem der unendlichvielen Variablen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\cdot, x) A_n(\cdot, x) = A(\cdot, x) A(\cdot, x)$$

und zwar im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, d. h. es ist

$$(92) \quad |A(\cdot, x) A(\cdot, x) - A_n(\cdot, x) A_n(\cdot, x)| \leq \varepsilon_n,$$

wo ε_n gewisse von den Variablen x_1, x_2, \dots unabhängige mit unendlichwachsendem n gegen Null abnehmende Größen sind. Daraus folgt, daß die quadratische Form $A(\cdot, x) A(\cdot, x)$ stets vollstetig ist, wenn die Bilinearform $A(x, y)$ vollstetig ist.

Eine Bilinearform $A(x, y)$ ist stets vollstetig, wenn die quadratische Form $A(\cdot, x) A(\cdot, x)$ vollstetig ist, also beispielsweise gewiß, wenn die Summe der Quadrate der Koeffizienten von A endlich bleibt. In der Tat, fassen wir $A(x, y)$ als quadratische Form der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ auf, so folgt aus der Ungleichung

$$|A(x, y)| \leq \sqrt{A(\cdot, x) A(\cdot, x)},$$

durch die in 4. und 5. (S. 205) angewandte Schlußweise, daß $A(x, y)$ vollstetig ist.

Diese Mitteilung möchte ich mit der Entwicklung eines Satzes beschließen, der — wie ich in der folgenden Mitteilung zeigen

werde — auf die einfachste Weise zur Auflösung der Integralgleichungen zweiter Art mit unsymmetrischem Kern verwandt werden kann; derselbe lautet:

Satz X. Wenn

$$A(x, y) = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q,$$

eine vollstetige Bilinearform der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ ist, so haben gewiß entweder die unendlichvielen Gleichungen

$$\begin{aligned} (93) \quad & (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots = a_1, \\ & a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots = a_2, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

für alle möglichen Größen a_1, a_2, \dots mit konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung x_1, x_2, \dots mit konvergenter Quadratsumme — oder die entsprechenden homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} (94) \quad & (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots = 0, \\ & a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

lassen eine Lösung x_1, x_2, \dots mit der Quadratsumme 1 zu.

Zum Beweise betrachten wir zunächst irgend ein System von n linearen Gleichungen und n Unbekannten mit nicht verschwindender Determinante von der Gestalt

$$\begin{aligned} & b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = b_1, \\ & \dots \dots \dots \\ & b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

Bezeichnen β_1, \dots, β_n die Lösungen dieser Gleichungen, so ist gewiß

$$\begin{aligned} & (b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n)^2 + \dots + (b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ & = b_1(b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n) + \dots + b_n(b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n) \end{aligned}$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} & (b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n)^2 + \dots + (b_{n1}\beta_1 + \dots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ & \leq \sqrt{(\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2)} \{ (b_{11}b_1 + \dots + b_{1n}b_n)^2 + \dots + (b_{n1}b_1 + \dots + b_{nn}b_n)^2 \}. \end{aligned}$$

Nunmehr sei m das Minimum der quadratischen Form

$$(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + \dots + (b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n)^2$$

bei der Nebenbedingung

$$(95) \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

greifen, daß die Grenzwerte

$$\alpha_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha_1^{(n_h)}, \quad \alpha_2 = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha_2^{(n_h)}, \quad \dots$$

existieren; die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ haben eine ebenfalls unterhalb der Grenze (98) liegende Quadratsumme und müssen wegen der Vollstetigkeit der Linearformen

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots$$

gewiß jede der Gleichungen des vorgelegten Systems (93) befriedigen.

Zweitens mögen die Minima m_1, m_2, \dots gegen Null konvergieren; die Werte der Variablen mit der Quadratsumme 1, für welche diese Minima eintreten, seien

$$\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_n^{(n)}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & ((1 + a_{11})x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + (1 + a_{nn})x_n)^2 \\ &= A_n(\cdot, x) A_n(\cdot, x) + 2A_n(x, x) + (x, x)_n \end{aligned}$$

und folglich

$$(99) \quad A_n(\cdot, \mu^{(n)}) A_n(\cdot, \mu^{(n)}) + 2A_n(\mu^{(n)}, \mu^{(n)}) + 1 = m_n.$$

Nun denken wir uns wieder eine solche Reihe ganzer Zahlen n_1, n_2, \dots herausgegriffen, daß die Grenzwerte

$$\mu_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_1^{(n_h)}, \quad \mu_2 = \lim_{h \rightarrow \infty} \mu_2^{(n_h)}, \quad \dots$$

existieren; die Größen μ_1, μ_2, \dots genügen dann der Bedingung

$$(100) \quad (\mu, \mu) \leq 1.$$

Mit Rücksicht auf (92) und wegen der Vollstetigkeit der quadratischen Form $A(x, x)$ folgt aus (99), wenn wir darin n_h an Stelle von n einsetzen und zur Grenze $h = \infty$ übergehen

$$(101) \quad A(\cdot, \mu) A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + 1 = 0.$$

Wir betrachten nun die quadratische Form

$$\begin{aligned} (102) \quad & ((1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots)^2 + (a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots)^2 \\ &= A(\cdot, x) A(\cdot, x) + 2A(x, x) + (x, x); \end{aligned}$$

da dieselbe positiv definit ist, so folgt insbesondere

$$(103) \quad A(\cdot, \mu) A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) \geq 0;$$

hieraus entnehmen wir wegen (101)

$$(\mu, \mu) \geq 1;$$

mithin ist wegen (100):

$$(\mu, \mu) = 1.$$

Nunmehr erkennen wir wegen (101), daß auch

$$A(., \mu) A(., \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) = 0$$

ist, d. h. im Hinblick auf (102), die Größen μ_1, μ_2, \dots befriedigen die homogenen Gleichungen (94). Damit ist gezeigt, daß stets mindestens einer der in Satz X unterschiedenen Fälle stattfindet.

Wenn die homogenen Gleichungen (94) eine Lösung mit der Quadratsumme 1 besitzen, so können die durch Transposition entstehenden inhomogenen Gleichungen

$$(104) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \dots &= a_1, \\ a_{12}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots &= a_2, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

gewiß nicht für alle a_1, a_2, \dots mit endlicher Quadratsumme eine Lösung von endlicher Quadratsumme besitzen, da ja zwischen ihren linken Seiten eine lineare Identität besteht; es müssen daher dem eben Bewiesenen zufolge alsdann die transponierten homogenen Gleichungen

$$(105) \quad \begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \dots &= 0, \\ a_{12}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots &= 0, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

eine Lösung mit der Quadratsumme 1 zulassen. Also können die inhomogenen Gleichungen (93) gewiß nicht für alle a_1, a_2, \dots eine Lösung mit endlicher Quadratsumme besitzen; daher schließen sich die beiden Fälle des Satzes X wirklich aus, und die Lösung im ersten Falle ist eindeutig. Damit ist der Beweis für unsern Satz völlig erbracht.

Um die Mannigfaltigkeit der Lösungen der homogenen Gleichungen (94) festzustellen, haben wir nur nötig die in Abschnitt XI entwickelte Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen auf die Form (102) anzuwenden. Da $A(., x) A(., x)$ und $A(x, x)$ vollstetige quadratische Formen sind, so ist dies auch die Form

$$A(., x) A(., x) + 2A(x, x);$$

dieselbe besitzt daher den Wert -1 höchstens als Eigenwert von endlicher Vielfachheit; mithin besitzt die quadratische Form (102) den Wert ∞ nur als Eigenwert von endlicher Vielfachheit, d. h. es giebt eine orthogonale Transformation der Veränderlichen

x_1, x_2, \dots in x'_1, x'_2, \dots , so daß jene quadratische Form (102) die Gestalt

$$k_e x_e'^2 + k_{e+1} x_{e+1}'^2 + \dots$$

erhält, wo k_e, k_{e+1}, \dots lauter positive von Null verschiedene gegen 1 konvergierende Größen und e eine endliche ganze Zahl bedeuten. Die Lösungen der homogenen Gleichungen (94) erhält man aus

$$x'_1 = u_1, \dots, x'_{e-1} = u_{e-1}, x'_e = 0, x'_{e+1} = 0, \dots,$$

wo u_1, \dots, u_{e-1} willkürliche Konstante sind und wir ersehen daraus, daß es nur eine endliche Anzahl und zwar genau $e-1$ von linear unabhängigen Lösungen von (94) giebt.

Bei der Voraussetzung, daß $A(x, y)$ eine vollstetige Bilinearform ist, kommen also dem Gleichungssysteme (93) alle wesentlichen Eigenschaften eines Systemes von endlichvielen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zu.

Zum Schlusse möge noch gezeigt werden, mit welcher überraschender Eleganz und Einfachheit der Satz X ohne irgend eine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen werden kann, indem man sich der Sätze V und IX bedient.

In der Tat aus Satz IX leiten wir sofort folgende Tatsache ab:

Hilfssatz 6. Wenn $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ eine unendliche Reihe positiver Größen ist, die gegen 1 konvergieren und

$$S(x, y) = \sum_{(p, q)} s_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige schiefsymmetrische Form der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ bedeutet, so gibt es stets eine vollstetige Bilinearform $T(x, y)$ der nämlichen Variablen, sodaß

$$(106) \quad \{\kappa(x, \cdot) + S(x, \cdot)\} \{(\cdot, y) + T(\cdot, y)\} = (x, y)$$

wird, wo $\kappa(x)$ die quadratische Form

$$\kappa(x) = \kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2 + \dots$$

bedeutet. Die Relation (106) ist damit gleichbedeutend, daß das Gleichungssystem

$$(107) \quad \begin{aligned} \kappa_1 x_1 + s_{12} x_2 + s_{13} x_3 + \dots &= y_1, \\ s_{21} x_1 + \kappa_2 x_2 + s_{23} x_3 + \dots &= y_2, \\ s_{31} x_1 + s_{32} x_2 + \kappa_3 x_3 + \dots &= y_3, \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

die Auflösungen

$$x_1 = y_1 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_1},$$

$$x_2 = y_2 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_2},$$

.

besitzt.

Zum Beweise setzen wir in $S(x, y)$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} x'_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} x'_2, \quad \dots,$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} y'_1, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} y'_2, \quad \dots$$

ein und erhalten dann eine schiefsymmetrische vollstetige Form $S'(x', y')$, während $\kappa(x)$ in (x', x') übergeht. Aus (107) wird ein Gleichungssystem von folgender Gestalt

$$(108) \quad \begin{aligned} x'_1 + s'_{11} x'_1 + s'_{12} x'_2 + \dots &= y'_1, \\ s'_{21} x'_1 + x'_2 + s'_{22} x'_2 + \dots &= y'_2, \\ s'_{31} x'_1 + s'_{32} x'_2 + x'_3 + \dots &= y'_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Führen wir nunmehr auf S' nach Satz IX die orthogonale Transformation aus, so geht das zu S' gehörige Gleichungssystem (108) in ein Gleichungssystem von folgender Gestalt über:

$$\begin{aligned} \xi_1 + k_1 \xi'_1 &= \eta_1, \\ -k_1 \xi_1 + \xi'_1 &= \eta'_1, \\ \xi_2 + k_2 \xi'_2 &= \eta_2, \\ -k_2 \xi_2 + \xi'_2 &= \eta'_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt, wie man sieht, die Auflösungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 + \frac{\partial T(\xi \xi', \eta \eta')}{\partial \xi_1}, \\ \xi'_1 &= \eta'_1 + \frac{\partial T(\xi \xi', \eta \eta')}{\partial \xi'_1}, \\ \xi_2 &= \eta_2 + \frac{\partial T(\xi \xi', \eta \eta')}{\partial \xi_2}, \\ \xi'_2 &= \eta'_2 + \frac{\partial T(\xi \xi', \eta \eta')}{\partial \xi'_2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

wenn

$$\begin{aligned} T(\xi\xi', \eta\eta') = & -\frac{k_1^2}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1+\xi_1'\eta_1') - \frac{k_2^2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2+\xi_2'\eta_2') - \dots \\ & -\frac{k_1}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1'-\xi_1'\eta_1) - \frac{k_2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2'-\xi_2'\eta_2) - \dots \end{aligned}$$

gesetzt wird. Da die Größen k_1, k_2, \dots gegen Null konvergieren, so ist T eine vollstetige Form.

Die Rückkehr zu den Variablen $x'_1, x'_2, \dots, y'_1, y'_2, \dots$ und von diesen zu den ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$, wobei aus T die Form T entsteht, lehrt die Richtigkeit des Hilfssatzes.

Um nunmehr Satz X zu beweisen, bedenken wir daß das Gleichungssystem (93) in Satz X seine Gestalt behält, wenn wir auf die Variablen x_1, x_2, \dots irgend eine orthogonale Transformation ausführen und zugleich entsprechend die linken Seiten jener Gleichungen orthogonal kombinieren, da dies ja auf eine simultane orthogonale Transformation beider Variablenreihen in $A(x, y)$ hinausläuft. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei bereits eine solche orthogonale Transformation der Bilinearform $A(x, y)$ ausgeführt, daß die aus $A(x, y)$ entspringende quadratische vollstetige Form $A(x, x)$ nur die Quadrate der Variablen enthält und demnach in der Gestalt

$$A(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots$$

oder

$$(109) \quad A(x, y) + A(y, x) = 2(\alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \dots)$$

erscheint. Da hierin $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gegen Null konvergierende Größen sind, so gibt es gewiß nur eine endliche Anzahl derselben, die ≤ -1 ausfallen; es sei etwa e eine ganze Zahl, so daß

$$(110) \quad \alpha_{e+p} > -1, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

ausfällt.

Alsdann sondern wir von den Gleichungen (93) in Satz X zunächst die ersten e Gleichungen ab und schreiben die übrigen in der Gestalt:

$$\begin{aligned} (111) \quad & (a_{e+1, e+1} + 1)x_{e+1} + a_{e+1, e+2}x_{e+2} + \dots = y_{e+1}, \\ & a_{e+2, e+1}x_{e+1} + (a_{e+2, e+2} + 1)x_{e+2} + \dots = y_{e+2}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (112) \quad & y_{e+1} = a_{e+1} - a_{e+1, 1}x_1 - \dots - a_{e+1, e}x_e, \\ & y_{e+2} = a_{e+2} - a_{e+2, 1}x_1 - \dots - a_{e+2, e}x_e, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

wird, so gelangen wir vermöge (112) und (113) zu solchen Werten x_{i+1}, x_{i+2}, \dots , die zusammen mit den gefundenen x_1, \dots, x_i ein

Lösungssystem der homogenen Gleichungen (94) in Satz X ausmachen.

Damit ist Satz X vollständig bewiesen.

Da oben auch der Satz IX über die schiefssymmetrischen Formen lediglich mit Hilfe des Satzes V über die orthogonale Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne irgend eine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen worden ist, so ergibt sich, daß auch die Theorie der Gleichungen von der Gestalt (93) und damit überhaupt die Theorie der vollstetigen Bilinearform lediglich auf die Theorie der orthogonalen Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne neue Konvergenzbetrachtungen begründet werden kann — eine bemerkenswerte Tatsache, die der Theorie der vollstetigen Formen von unendlichvielen Variabeln eine wunderbare Durchsichtigkeit und Einheitlichkeit verleiht.

Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einflusse einer longitudinal wirkenden Kraft.

Von

Paul Hertz.

Vorgelegt in der Sitzung am 12. Mai 1906 von Herrn D. Hilbert.

Die Elektronentheorie verdankt unter vielem andern ihre Bedeutung auch dem Umstande, daß sie einen Weg zu einer rein elektromagnetischen Begründung der Mechanik eröffnet. Daher ist es von Wichtigkeit die Bewegungsgesetze der Elektronen einer möglichst eingehenden Betrachtung zu unterwerfen. Nun besteht aber die Mechanik des einzelnen Elektrons in nichts anderm als in der Behandlung der zwei Fragen:

- 1) Welche Kraft ist nötig, um eine gegebene Bewegung zu unterhalten? (oder, in der Sprechweise der gewöhnlichen Mechanik, „hervorzurufen“.)
- 2) Welche Bewegung wird von einer gegebenen Kraft hervorgerufen?

Die erste dieser beiden Fragen ist elementarerer Natur und schließt sich enger an den elektromagnetischen Vorstellungskreis an, in dem die Bewegung gewissermaßen als das prius angesehen wird. Die zweite Frage hingegen erscheint für unsere allgemeine Naturanschauung bedeutungsvoller und nähert sich mehr der Denkweise der alten Mechanik, die sich zur Aufgabe stellt, die zu einer gegebenen Kraft zugehörige Bewegung zu finden. Dabei wird die Lösung des ersten Problems zweckmäßiger Weise der Lösung des zweiten vorangestellt werden müssen, da hier ein ähnliches Verhältnis vorliegt, wie das der Differentialrechnung zur Integralrechnung und der elliptischen Integralen zu den elliptischen Funktionen.

Die erste Frage wurde zuerst für den Fall unendlich kleiner

Beschleunigungen — sogenannter quasistationärer Bewegung — erschöpfend von Herrn M. Abraham¹⁾ behandelt. Die Fortschritte der experimentellen Untersuchungen machten jedoch ein Ueberschreiten der quasistationären Theorie erforderlich. Vom Verfasser der gegenwärtigen Mitteilung wurde ein zwar ganz spezieller, aber nicht quasistationärer Fall behandelt²⁾.

In voller Allgemeinheit indes wurde von Herrn A. Sommerfeld³⁾ eine Lösung der ersten Frage gegeben, in einer Reihe von Arbeiten, auf die wir uns im folgenden durchaus zu beziehen haben.

Hiernach scheint es nun erwünscht, eine möglichst allgemeine Lösung auch der zweiten Frage zu finden. Auf diesem Gebiete liegen bereits Untersuchungen von Herrn G. Herglotz⁴⁾ vor, der kräftefreie Bewegungen behandelt hat. Wir stellen uns dagegen — allerdings unter Beschränkung auf geradlinige Translationsbewegung — die Aufgabe, die von einer beliebig vorgeschriebenen äußern Kraft erzeugte Bewegung zu untersuchen. Auch in der Methode weichen wir von Herrn G. Herglotz ab. Um die Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erweisen, kann man sich dreier Methoden bedienen: der Potenzreihenmethode, der Methode von Cauchy und Lipschitz, und der Methode der successiven Approximation⁵⁾. Auch auf die Funktionalgleichungen der Elektronentheorie lassen sich diese Verfahren übertragen. Während nun Herr G. Herglotz die Potenzreihenmethode benutzt hat, werden wir die Methode der successiven Approximation zur Anwendung bringen, werden aber auch kurz das Cauchy-Lipschitzsche Verfahren besprechen. Daneben geben wir einen Eindeutigkeitsbeweis, der einem von Herrn C. Jordan herrührenden nachgebildet ist. Wir werden den Satz beweisen, daß sich die Bewegung eines Elektrons bei vorgeschriebener Anfangsvorgeschichte⁶⁾ und bei für die Folgezeit vorgeschriebener äußerer longitudinaler Kraft, auf eine und nur eine Weise fortsetzen läßt, wofern nur nicht ein gewisser mit der Anfangsvorgeschichte zusammenhängender Ausdruck verschwindet.

1) M. Abraham, Anm. d. Physik 10. 1903. S. 153 ff.

2) P. Hertz, Physikalische Zeitschrift 5. 1904. S. 109 ff. Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons, Dissertation 1904, Göttingen.

3) Göttinger Nachrichten 1904, Heft 1, S. 99; Heft 5, S. 363; Heft 3, S. 201.

4) G. Herglotz: Göttinger Nachrichten 1903, Heft 6, S. 1.

5) Alle 3 Methoden sind dargestellt in: E. Picard, traité d'Analyse tome II Chap. XI p. 322 ff.

6) Wir setzen voraus, daß das Elektron früher einmal in Ruhe war.

Eine weitere Einschränkung wird später eingeführt werden.

Die hier erwähnte Singularität verhindert es, daß die äußere Kraft eine gewisse obere Grenze überschreitet. Diese Tatsache, die Herr A. Sommerfeld schon für Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegungen hervorgehoben hat¹⁾, werden wir hier allgemein beweisen. Wir werden ferner zeigen, daß keine dauernde kräftefreie Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung möglich ist, was Herr Sommerfeld ebenfalls auf Grund numerischer Ausrechnung einer hinreichenden Zahl von Beispielen gefunden hat²⁾.

Wir werden unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise der Annahme räumlicher Ladung zuwenden. Zum Schlusse besprechen wir jedoch kurz auch die Annahme flächenhafter Ladung und vergleichen die dabei obwaltenden Verhältnisse mit den bei Volumenladungen vorliegenden. Es tritt eine Reihe von Unterschieden auf, namentlich in Bezug auf Stetigkeitsfragen. Interesse dürften auch die geradlinigen Translationsschwingungen verdienen, die unter Annahme von Flächenleitung kräftefrei möglich sind. Jede periodische Bewegung mit der Schwingungszeit Elektronendurchmesser dividiert durch Lichtgeschwindigkeit ist kräftefrei.

Wir haben unser Hauptaugenmerk auf die Führung des Existenzbeweises gerichtet. Doch gestatten unsere Methoden auch die numerische Durchrechnung einzelner Fälle.

Daß ein Elektron auf eine bestimmte es antreibende Kraft durch irgend eine Bewegung antworten muß, wird dem Physiker als unzweifelhaft und darum der Untersuchung unwert erscheinen. Indes handelt es sich darum gar nicht; die Frage ist vielmehr, ob diese für unsere Naturanschauung unerläßliche Forderung auch im Gebiete der mathematischen Nachkonstruktion erfüllt ist, und diese daher geeignet ist, die Naturvorgänge zu beschreiben. In der Tat, würden wir in ihr jenes Existenztheorem als nicht im Allgemeinen gültig gefunden haben, so hätten wir daraus nichts über das Verhalten der Elektronen geschlossen, sondern nur, daß ihre bisherige Theorie zum mindesten einer Revision zu unterziehen sei.

Wenden wir uns jetzt der Darstellung der Sommerfeldschen Methode zu. Ueber sie kann hier nur berichtet werden; bezüglich der Beweise muß auf die Arbeiten des Herrn A. Sommerfeld selbst verwiesen werden.

1) Physik. Ztschr. 7, 1906, S. 28; Jahresb. d. d. Math.-Vgg. XV. S. 51.

2) Göttinger Nachrichten, Heft 3, 1905, S. 201.

Vgl. auch P. Hertz, Physik. Zeitschrift 7, 1906. S. 347.

Bei dieser Gelegenheit seien zwei Druckfehler in jener Mitteilung berichtigt: Seite 349 Spalte 1 Z. 14 v. u. lies *BDO* statt *EDO*. Ferner: die Fußnote auf Seite 350 soll zu Seite 349 Spalte 2 Z. 16 v. u. gehören.

§ 1. Berechnung der von einer gegebenen Bewegung erzeugten „innern“ oder der zu ihrer Unterhaltung erforderlichen „äussern“ Kraft.

Dieser Paragraph stellt sich auf den Boden der ersten in der Einleitung erwähnten Fragestellung: die Bewegung des Elektrons ist das Gegebene, die zugehörige Kraft wird gesucht. Die von einem bewegten Elektron erregte Kraft heisst innere Kraft und werde mit K_i bezeichnet. Die Elektronentheorie in ihrer rein elektromagnetischen Gestalt nimmt an, daß ihr gleich aber entgegengesetzt gerichtet die „äußere“, d. i. die auf das Elektron ausgeübte Kraft ist, so daß wir haben

$$1) \quad K = -K_i,$$

wenn K ohne Index die äußere Kraft bezeichnet. Konsequenter Weise sollten wir in den Formeln dieses Paragraphen die Größe K_i bevorzugen, in den späteren, der zweiten Fragestellung entsprechenden dagegen K , doch ziehen wir es der Einfachheit halber vor, uns schon jetzt des Ausdruckes K zu bedienen, der hier zunächst für uns nichts weiter bedeuten möge als $-K_i$.

Wir nehmen dabei das Elektron vörerst als gleichmäßig über sein Volumen geladen an und beschränken uns auf geradlinige rotationsfreie Bewegungen. Ferner gestatten wir uns einige Abweichungen von der Sommerfeldschen Bezeichnungsweise.

Wir führen als Längeneinheit den Radius des Elektrons und als Zeiteinheit die Größe: Elektronenradius dividiert durch Lichtgeschwindigkeit ein. Die Bewegung des Elektrons erfolgt nach Voraussetzung geradlinig und somit wird auch die Kraft in die Bahnrichtung fallen. Wir haben auf der Bahngeraden zwei Richtungen zu unterscheiden und wollen eine davon als Vorzugsrichtung auszeichnen; dann sei K positiv oder negativ, je nachdem die äußere Kraft mit der Vorzugsrichtung gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist. Es wird häufig bequem sein als Vorzugsrichtung die Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit zu wählen. Der Ausdruck K läßt sich nun in jedem Augenblicke aus der „Vorgeschichte“ des Elektrons berechnen. Die zu einem bestimmten Augenblicke gehörige Vorgeschichte wollen wir uns durch eine in einer X - Y -Ebene verlaufende Vorgeschichtskurve versinnbildlichen¹⁾. Es soll nämlich x eine Zeit bedeuten, und y die Entfernung die die Lage des Elektronenmittelpunktes vor x Zeiteinheiten von der jetzigen Lage besaß; dabei sei y positiv, wenn die jetzige Lage auf die frühere im Sinne der Vorzugsrichtung folgt, im

1) Vgl. A. Sommerfeld, III, Note, Figur 11 und 12.

andern Falle negativ. Falls wir also die augenblickliche Geschwindigkeitsrichtung zur Vorzugsrichtung machen, so wird die Kurve zunächst einmal in der Halbebene der positiven y verlaufen. Solche Vorgeschichtskurven können in den mannigfachsten Gestalten auftreten: immer werden sie doch der einen Bedingung unterworfen sein, daß jede Parallele zur Y -Achse sie nur einmal schneidet, oder daß ihre Abscissen stets wachsen, weil im andern Falle das Elektron sich gleichzeitig an verschiedenen Punkten befinden müßte. Insbesondere können die Kurven nie in die Halbebene der negativen x eindringen. Sehr wohl können sie dagegen in die Halbebene der negativen y gelangen; solchen Vorgeschichtskurven begegnen wir z. B. bei schwingenden Elektronen.

Von Wichtigkeit ist die Tangente der Kurve. Eine horizontale Tangente — wir denken uns die X -Achse horizontal, die Y -Achse vertikal orientiert — bedeutet Ruhe des Elektrons, eine im Winkel von 45° geneigte die Lichtgeschwindigkeit, und eine vertikale würde unendlich große Geschwindigkeit bedeuten. Letztere ist aber auszuschließen und nur gelegentlich als Grenzfall zuzulassen. Allgemein giebt die Neigung der Tangente durch ihren Tangens die Geschwindigkeit des Elektrons in der Vorzugsrichtung.

Indem wir also die früher vorhandenen Geschwindigkeiten des Elektrons, die Herr Sommerfeld v_{rel} schreibt, gleich dem Differentialpotienten $\frac{dy}{dx}$ oder y' setzen, können wir die Sommerfeldsche Formel¹⁾ auf die Form bringen:

$$K = m \int \{A(x, y) + B(x, y) y'\} dx$$

oder

$$2) \quad K = m \int A(x, y) dx + B(x, y) dy.$$

Hier bezeichne m eine von der Ladung des Elektrons abhängige Zahl, es sei nämlich

$$3) \quad m = \frac{3e^2}{32\pi},$$

unter e die Ladung in rationellen Einheiten verstanden. Ferner werde die Integration über die ganze unendliche Vorgeschichtskurve erstreckt, und $A(x, y)$ und $B(x, y)$ seien bekannte Ortsfunktionen in der X - Y -Ebene.

A und B sind aber nicht durch einheitliche analytische Ausdrücke gegeben, vielmehr ergeben sich verschiedene in verschiedenen Teilen der Ebene:

Man denke sich (Figur 1) eine im Winkel von 45° gegen OX geneigte Gerade OA gezogen. Die Linie OA als Vorgeschichts-

1) Göttinger Nachrichten 1904, Heft 5, S. 398, Gl. 64'.

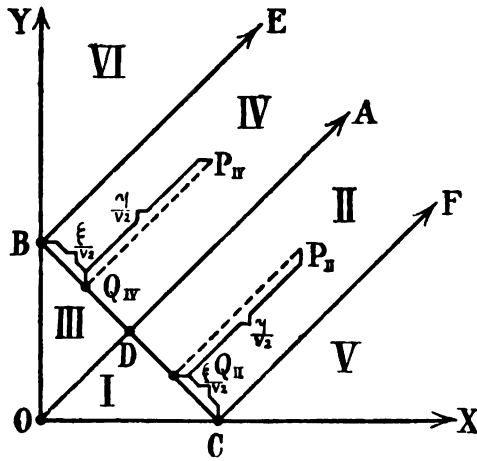


Fig. 1.

kurve würde der stationären Lichtgeschwindigkeitsbewegungen entsprechen. Eine Bewegung die stets mit Unterlichtgeschwindigkeit verlaufen ist, wird durch eine ganz in AOX liegende Kurve dargestellt, eine stets mit Ueberlichtgeschwindigkeit erfolgte Bewegung durch eine Kurve in YOA . Sei ferner $OB = OC = 2$, D der Schnittpunkt von BC und OA , und seien BE und CF parallel OA . Endlich bezeichnen wir

das Gebiet ODC mit I
 das Gebiet $ADCF$ mit II
 das Gebiet BOD mit III
 das Gebiet $EBDA$ mit IV
 das Gebiet XCF mit V
 das Gebiet YBE mit VI.

Dann ist nach der eben erwähnten Formel des Herrn Sommerfeld in V und VI

$$A = B = 0.$$

Dagegen ist, wenn

$$4) \quad f(u) = -\frac{8}{5} + 2u^2 - u^3 + \frac{1}{20} u^5 \quad 1)$$

gesetzt wird, und $f'(u)$ die Ableitung dieser Funktion bezeichnet: in I (Unterlichtgeschwindigkeit; erstes Intervall) ²⁾

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{y} f'(x+y) - \frac{1}{y^3} f(x+y) \\ \quad + \frac{1}{y} f'(x-y) + \frac{1}{y^3} f(x-y) \\ B = \frac{1}{y} f'(x+y) \\ \quad - \frac{1}{y} f'(x-y) \end{array} \right.$$

1) l. c. S. 377, Gl. 51'.

2) l. c. S. 398, Gl. 64'.

in II (Unterlichtgeschwindigkeitsgebiet, zweites Intervall)

$$6) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{y} f'(x-y) + \frac{1}{y^2} f(x-y) \\ B = -\frac{1}{y} f'(x-y) \end{cases}$$

in III (Ueberlichtgeschwindigkeitsgebiet, erstes Intervall)

$$7) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{y} f'(y+x) - \frac{1}{y^2} f(y+x) \\ \quad - \frac{1}{y} f'(y-x) + \frac{1}{y^2} f(y-x) \\ B = \frac{1}{y} f'(y+x) \\ \quad + \frac{1}{y} f'(y-x) \end{cases}$$

und in IV (Ueberlichtgeschwindigkeitsgebiet, zweites Intervall)

$$8) \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{y} f'(y-x) + \frac{1}{y^2} f(y-x) \\ B = \frac{1}{y} f'(y-x). \end{cases}$$

Endlich definieren wir A und B auch für negative y , und zwar durch die Gleichungen

$$9) \quad \begin{cases} A(x, -y) = -A(x, y) \\ B(x, -y) = B(x, y), \end{cases} \quad .$$

die aus Symmetriebetrachtungen leicht zu erhalten sind.

Hiermit ist unsere erste Frage allgemein gelöst. Die Kurve mag ganz beliebig verlaufen, immer wird K durch das über die unendliche Kurve erstreckte Integral $\int A dx + B dy$ gegeben. In vielen Fällen, aber nicht immer, wird sich die Integration nur über ein endliches Kurvenstück erstrecken, nämlich dann, wenn die Vorgeschichtskurve in V oder VI eindringt und dort dauernd verbleibt. In diesem Falle können wir sie uns auch als auf BE oder CF endigend vorstellen¹⁾.

Es ist jetzt eine genauere Diskussion der Funktionen A und B erforderlich. Zunächst bemerken wir, daß die durch 4) eingeführte Funktion f samt ihren ersten beiden Ableitungen an der Stelle

1) Ihrer Schreibweise nach beziehen sich die Sommerfeldschen Formeln nur auf diesen Fall.

$u = 2$ verschwindet, daß auf BC der Ausdruck $y + x = 2$ ist, und daß $f'(0) = 0$ ist. Hierauf lehrt eine aufmerksame Betrachtung der Gleichungen 6)–8): Die Funktionen A und B samt ihren ersten Ableitungen nach x und y , sind in der ganzen Viertelebene der positiven x und y , dort wo sie endlich sind, auch stetig. Auf BE und CF verschwinden sie. Wir wollen jetzt A und B in I und III berechnen.

Wir erhalten aus 5), 4), 7)

für I:

$$10) \quad \begin{cases} A = (-4 + 2x^2)y + \frac{2}{5}y^2 \\ B = (8 - 12x + 2x^2) + 2xy^2 \end{cases}$$

und für III:

$$11) \quad \begin{cases} A = \frac{x}{10y^2} \{ (20x^2 - x^4) + (-60 + 10x^2)y^2 + 15y^4 \} \\ B = \frac{1}{2y} \{ (-12x^2 + x^4) + 16y + (-12 + 6x^2)y^2 + y^4 \}. \end{cases}$$

Bei Annäherung an den Punkt O bleiben nach diesen Formeln A und B durchaus endlich und stetig. Dasselbe läßt sich von diesen Funktionen bei Annäherung an C zeigen, was später noch nachgewiesen werden mag. Ferner verhalten sich wegen 9) B , $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$ an OX stetig, während sich A , $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial y}$ beim Ueberschreiten dieser Linie mit -1 multiplizieren. Nun verschwinden aber nach 10) die letzten drei Größen für $y = 0$, so daß wir den eben ausgesprochenen Stetigkeitssatz so erweitern können: Die Funktionen A und B sind in der ganzen Halbebene der positiven x samt ihren ersten Ableitungen, überall dort wo sie endlich bleiben, stetig; A und B selbst sind in der ganzen Halbebene endlich und stetig.

Schließlich bemerken wir noch daß im Unendlichen A und B unendlich klein werden.

Aus diesen Stetigkeitsverhältnissen zieht wir einen wichtigen Schluß. Betrachten wir ein Elektron in zwei benachbarten Zeitpunkten, so können die zugehörigen Vorgeschichtskurven nur sehr wenig von einander abweichen. Aus dem eben Gesagten folgt aber dann weiter, daß sich die zugehörigen K nur sehr wenig von einander unterscheiden werden, so daß wir behaupten dürfen: Bei der Bewegung eines Elektrons verändert sich die Kraft K zeitlich stetig. Auch durch Geschwindigkeitsunstetigkeiten in der Bewegung des Elektrons können keine unstetigen Kräfte hervorgerufen werden; eine Geschwindigkeitsunstetigkeit in der Bahn des Elektrons

bedeutet nämlich nur einen Knick in der Vorgeschichtskurve, durch den unsere Betrachtungen keineswegs ihre Gültigkeit verlieren.

Wird also die äußere Kraft unstetig vorgeschrieben, so läßt sich keine zugehörige Elektronenbewegung auffinden, weder eine stetige noch unstetige. Auf diesen Punkt habe ich bereits in der Physikalischen Zeitschrift aufmerksam gemacht¹⁾.

Wir schließen diesen Paragraphen indem wir drei später wichtig werdende Integrale auswerten, die der Ruhe, der stationären Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit und der Bewegung mit unendlich großer Geschwindigkeit entsprechen.

Das längst OX genommene Integral $\int A dx + B dy$ liefert, da hier $dx = 0$ zu setzen ist und A nach 10) $= 0$ ist, den Wert Null:

$$12) \quad K = m \cdot \int_{OX} A dx + B dy = 0.$$

Das Integral längs OA genommen, läßt sich schreiben:

$$\int_{OB} (A + B) dx + \int_{DA} (A + B) dx.$$

Im ersten Integrale erhalten wir übereinstimmend aus 10) und 11), indem wir $x = y$ setzen:

$$A + B = 8 - 16x + \frac{32}{5} x^2.$$

Im zweiten Integrale dagegen ist nach 6) oder 8)

$$A + B = \frac{1}{x^2} f(0) = -\frac{8}{5x^2}.$$

Hieraus erhält man

$$13) \quad K = m \int_{OA} A dx + B dy = 0.$$

Endlich ist nach 11)

$$\int_{OY} A dx + B dy = \int_0^2 (8 - 6y + \frac{1}{2} y^2) dy = 6,$$

also

$$14) \quad K = m \int_{OY} A dx + B dy = 6m.$$

§ 2. Die E-Funktion.

Wir haben jetzt alle Möglichkeiten von Vorgeschichtskurven berücksichtigt, sind aber noch zu keiner rechten Uebersicht ge-

1) Anm. bei der Korr.: Herr Van der Waals jr. hat diese Bemerkung schon früher in einer Note gemacht, von der ich erst bei der Korrektur der gegenwärtigen Mitteilung Kenntnis hatte: K. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam Dec. 21. 1905. S. 477 ff.

langt. Und doch ist eine solche unumgänglich nötig, wenn spezielle Aufgaben an uns herantreten. Eine wichtige von Herrn A. Sommerfeld aufgeworfene Frage besteht z. B. darin, zu unterscheiden, ob sich ein stets mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegtes Elektron kräftefrei bewegen kann. Auf Grund numerischer Auswertung einer Anzahl von Integralen hat Herr Sommerfeld die Unmöglichkeit dieses Vorkommnisses festgestellt ¹⁾. Hier hat man sich vor einem Mißverständnisse zu hüten: Es ist nicht gemeint, daß niemals eine Elektronenbewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit kräftefrei vor sich gehen könnte — in diesem Umfange wäre der Satz durchaus nicht richtig — sondern nur soviel soll behauptet werden: Hat während der ganzen Vorgeschichte Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung stattgefunden, so beansprucht die Bewegung in der Gegenwart zu ihrer Aufrechterhaltung eine Kraft. Für diesen Satz wollen wir im folgenden einen exakten Beweis geben.

Vorgeschichten, die durchweg Ueberlichtgeschwindigkeit besitzen, werden durch ganz im Sektor YOA verlaufende Kurven dargestellt. Umgekehrt aber liefert nicht jede in YOA verlaufende Kurve eine reine Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung. Wenn wir indes allgemein beweisen, daß jede in YOA verlaufende Kurve ein positives K liefert, so gilt dieses Resultat im Besonderen auch von allen reinen Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegungen. Um zu einer Uebersicht über die möglichen Werte von K zu gelangen, fragen wir nach seinen größten und kleinsten Werten, d. h. bedienen uns der Variationsrechnung. Will man das Integral $\int(A + By') dx$ untersuchen, so ist nach Lagrange die Gleichung zu bilden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} (A + By') - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (A + By') \right] \\ &= \frac{\partial A}{\partial y} + y' \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{d}{dx} (B) \\ &= \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung setzen wir $= E$:

$$15) \quad E = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x},$$

und bezeichnen diese Funktion als E -Funktion, in Erinnerung an

1) Göttinger Nachrichten 1905, Heft 3, S. 216 ff.

die gleichbenannte Weierstrassische Funktion, mit der sie gewisse Analogieen besitzt, ohne jedoch mit ihr identisch zu sein. Wir werden sie bei der Beantwortung einer Reihe von Fragen gebrauchen, und unsere nächste Aufgabe muß daher sein, sie für die ganze X — Y -Ebene aufzustellen und zu diskutieren.

Natürlich erhalten wir wieder für die verschiedenen Teile der Ebene verschiedene analytische Ausdrücke. Nach 5), 7), 15) ist in I)

$$16) \quad E = \frac{1}{5} (10 - 5x^2 - y^2),$$

und in III)

$$17) \quad E = \frac{x}{5y^2} \{(-20x^2 + x^4) + (60 - 10x^2)y^2 - 15y^4\}.$$

Zur Berechnung der E -Funktion in II empfiehlt sich eine Variabelntransformation. Sei (Fig. 1) P_{II} ein Punkt in II, Q_{II} der Fußpunkt des von P_{II} auf CD gefällten Lotes. Wir wollen CQ_{II} mit $\frac{\xi}{\sqrt{2}}$ und $P_{II}Q_{II}$ mit $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ bezeichnen, so daß wir haben:

$$18) \quad \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta \\ y = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta \\ x - y = 2 - \xi \\ d\xi = dy - dx \\ d\eta = dy + dx, \end{cases}$$

und ξ kann hier von 0 bis 2, η von 0 bis ∞ variieren.

Setzen wir dann noch

$$19) \quad \begin{cases} f(2+h) = \psi(h) \\ f'(2+h) = \psi'(h) \end{cases}$$

wo

$$20) \quad \psi(h) = h^3 + \frac{1}{2}h^4 + \frac{1}{20}h^5$$

für $h = 0$ dreifach verschwindet, so schreiben sich die Gleichungen 6)

$$21) \quad \begin{cases} A = \frac{2\psi'(-\xi)}{(\xi+\eta)} + \frac{4\psi(-\xi)}{(\xi+\eta)^2} \\ B = \frac{-2\psi'(-\xi)}{(\xi+\eta)}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und mit 20) holt man sehr leicht den auf Seite 236 versprochenen Nachweis nach, daß A und B bei

Annäherung an den Punkt O endlich bleiben. Ferner ist nach 15) und 18)

$$E = \frac{\partial(A+B)}{\partial\xi} + \frac{\partial(A-B)}{\partial\eta}$$

also nach 21)

$$22) \quad = \frac{-8}{(\xi+\eta)^2} \{(\xi+\eta)\psi'(-\xi) + 2\psi(-\xi)\},$$

oder nach 20)

$$23) \quad E = \frac{-2\xi^2}{5(\xi+\eta)^2} \left\{ (60 - 40\xi + 5\xi^2)\eta + (20\xi - 20\xi^2 + 3\xi^3) \right\}.$$

In entsprechender Weise berechnen wir E für das Gebiet IV. Hier bedienen wir uns eines ganz ähnlichen Koordinatensystemes. Es sei gestattet, auch diese neuen Koordinaten ξ und η zu nennen, da eine Verwechslung nicht zu befürchten ist. Sei P_{IV} ein Punkt in IV und Q_{IV} der Fußpunkt des von ihm auf BD gefällten Lotes. Dann möge die Strecke $BQ_{IV} = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $P_{IV}Q_{IV} = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ gesetzt werden, oder analytisch:

$$24) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\xi \\ y = 2 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\xi \\ y - x = 2 - \xi \\ d\xi = dx - dy \\ d\eta = dx + dy. \end{cases}$$

Wieder kann ξ von 0 bis 2, η von 0 bis ∞ variieren.

Es ist nun nach 8) und 19)

$$25) \quad \begin{cases} A = \frac{-2\psi'(-\xi)}{(4+\eta-\xi)} + \frac{4\psi(-\xi)}{(4+\eta-\xi)^2} \\ B = \frac{2\psi'(-\xi)}{(4+\eta-\xi)}. \end{cases}$$

Ferner ist nach 15) und 24)

$$E = \frac{\partial(A-B)}{\partial\eta} - \frac{\partial(A+B)}{\partial\xi},$$

also nach 25)

$$26) \quad E = \frac{8}{(4+\eta-\xi)^2} \{(4+\eta-\xi)\psi'(-\xi) - 2\psi(-\xi)\},$$

oder nach 20)

$$27) \quad E = \frac{2\xi^2}{5(4+\eta-\xi)^2} \left\{ (60-40\xi+5\xi^2)\eta \right. \\ \left. + (240-180\xi+40\xi^2-3\xi^3) \right\}.$$

Für die Halbebene der negativen y gilt schließlich nach 9)

$$28) \quad E(x, -y) = E(x, y),$$

d. h. die E -Funktion nimmt in der Halbebene der negativen y dieselben Werte an, wie an den zur X -Achse spiegelbildlich gelegenen Punkten.

Stellen wir noch einmal die Formeln für die E -Funktion zusammen. Wir haben

in I)

$$16) \quad E = \frac{1}{2}(10-5x^2-y^2)$$

in II)

$$23) \quad E = \frac{-2\xi^2}{5(\xi+\eta)^2} \left\{ (60-40\xi+5\xi^2)\eta \right. \\ \left. + (20\xi-20\xi^2+3\xi^3) \right\},$$

wo

$$18) \quad \begin{aligned} \xi &= 2+y-x \\ \eta &= -2+y+x \end{aligned}$$

ist,

in III)

$$17) \quad E = \frac{x}{5y^2} \{ (-20x^2+x^4) + (60-10x^2)y^2 - 15y^4 \}$$

in IV)

$$27) \quad E = \frac{2\xi^2}{5(4+\eta-\xi)^2} \left\{ (60-40\xi+5\xi^2)\eta \right. \\ \left. + (240-180\xi+40\xi^2-3\xi^3) \right\},$$

wo

$$24) \quad \begin{aligned} \xi &= 2+x-y \\ \eta &= -2+x+y \end{aligned}$$

ist,

in V und VI)

$$E = 0$$

und schließlich

$$28) \quad E(x, -y) = E(x, y).$$

Die so definierte E -Funktion ist in der ganzen Ebene endlich. Dagegen besitzt sie in den Punkten O und C Unbestimmtheitsstellen, bleibt jedoch bei Annäherung an diese Punkte unter einer obernen Grenze. Dies folgt für III) aus der Ungleichung $\frac{x}{y} \leq 1$; was II betrifft, so beachten wir, daß hier die

Funktionen $\frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^3}$ und $\frac{\xi^3}{(\xi + \eta)^3}$ unter einer obern Grenze bleiben.

Um das z. B. für $\frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^3}$ zu zeigen, bilde man den reziproken

Wert $\frac{1}{\xi^2 \eta} (\xi + \eta)^3 = \frac{\xi}{\eta} + 3 + 3\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-1} + \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-2}$, der für positive ξ

und η stets > 3 ist, woraus folgt, daß $\frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^3}$ selbst $< \frac{1}{3}$ ist. Hier-

nach lehrt die Betrachtung von 17) und 23) daß die E -Funktion bei Annäherung an O und C unter einer obern Grenze bleibt.

Zieh wir jetzt noch den auf Seite 236 ausgesprochenen Stetigkeitssatz über A, B und ihre ersten Ableitungen heran, und berücksichtigen wir die Definition der E -Funktion durch 15), so können wir behaupten:

Die E -Funktion ist eine in der ganzen Halbebene der positiven x definierte stetige Funktion der Variablen x und y , die nur für die Punkte $0,0$ und $2,0$ (O und C) unbestimmt wird, ohne jedoch dort unendlich zu werden. Auf den Geraden BE und CF verschwindet sie.

Es kommt uns nun noch auf das Vorzeichen der E -Funktion an. Untersuchen wir es zunächst für das Dreieck III. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer von 17) ist für endliche y und für kleine x sicher positiv. Können wir daher zeigen, daß die durch Nullsetzung dieser Klammer dargestellte Kurve außerhalb des Dreieckes III fällt, so ist damit gezeigt, daß die E -Funktion in III durchweg positiv ist. Untersuchen wir also die Kurve

$$(-20x^2 + x^4) + (60 - 10x^3)y^3 - 15y^4 = 0$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{1}{15}} \cdot \sqrt{30 - 5x^3 \pm \sqrt{900 - 600x^3 + 40x^4}}.$$

In der Nähe des Punktes $x = 0$ erhalten wir die beiden Entwicklungen

$$y = (\sqrt{\frac{1}{3}})x + \dots$$

und

$$y = 2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots$$

Der durch O gehende Ast dieser Kurve läuft demnach, weil in O der Tangens seiner Tangente $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, zunächst in I, der durch B gehende Ast wegen der Horizontalität seiner Tangente in B zunächst in IV. Ferner überzeugt man sich leicht, dass beide Kurvenäste im Intervalle $x = 0$ bis $x = 1$ reell sind. In III

könnte die Kurve daher nur eintreten, wenn sie einen Schnittpunkt entweder mit OD oder BD gemeinsam hätte außer O . Beides ist nicht der Fall. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $y = x$ bestimmt sich nämlich aus der Gleichung $40x^3 - 24x^4 = 0$, die offenbar keine positive Wurzel unter 1 besitzt, und setzen wir in die Gleichung unserer Kurve $y = 2 - x$, so erhalten wir:

$$240x - 360x^2 + 160x^3 - 24x^4 = 0,$$

oder

$$3x^3 - 20x^2 + 45x - 30 = 0.$$

Auch diese Gleichung besitzt, wovon man sich mittels des Budan-Fourierschen Satzes¹⁾ leicht überzeugen kann, keine Wurzel zwischen 0 und 1. Somit verschwindet die E -Funktion im ganzen Innern von III nicht, und muß, da wir sie für kleine x als positiv erkannt haben, in III durchweg positiv sein.

Wenden wir uns jetzt IV zu. Für kleine ξ ist nach 27) E sicher positiv. Untersuchen wir also noch die durch Nullsetzen der geschweiften Klammer von 27) bezeichnete Kurve:

$$(60 - 40\xi + 5\xi^2)\eta + (240 - 180\xi + 40\xi^2 - 3\xi^3) = 0.$$

Denken wir uns nach dieser Gleichung η als Funktion von ξ gegeben. Für $\xi = 0$ wird $\eta = -\frac{240}{60} = -4$, also negativ. Lassen wir ξ von 0 bis 2 wachsen, so kann η nur positiv werden, wenn vorher einer der beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 60 - 40\xi + 5\xi^2, \\ 240 - 180\xi + 40\xi^2 - 3\xi^3 \end{aligned}$$

verschwindet. Nun belehrt uns wieder der Budansche Satz darüber, daß der zweite dieser Ausdrücke im Intervalle $\xi = 0$ bis $\xi = 2$ nicht verschwindet. Der erste Ausdruck dagegen verschwindet für $\xi = 2$ und $\xi = 6$, also nicht vor $\xi = 2$. Mithin verläuft die Kurve, wenigstens für $\xi < 2$, außerhalb von IV, und da für kleine positive ξ jedenfalls E positiv ist, so muß E auch im ganzen Gebiete IV, solange $\xi < 2$ ist, positiv sein. Aber auch für $\xi = 2$ ist E in IV positiv, wie wir durch direktes Einsetzen $\xi = 2$ in 27) nachweisen. Fassen wir also zusammen, was wir über das Verhalten der E -Funktion im Gebiete $EBOA$ wissen:

Die E -Funktion ist im ganzen Gebiete $EBOA$ endlich und stetig, ausgenommen in O , wo sie unbestimmt

1) Vgl. z. B. H. Weber, Algebra I, S. 341.

wird, ohne jedoch unendlich zu werden. Am Rande EBO , mit Ausschluss des Punktes O verschwindet sie. In allen andern Punkten des Gebietes ist sie positiv.

Die Bestimmung des Vorzeichens der E -Funktion in $AOCF$ ist für uns von geringerer Bedeutung. Ohne nähere Rechnungsausführung sei daher nur mitgeteilt, daß dieses Gebiet in zwei Teile zerfällt, die verschiedene Vorzeichen der E -Funktion besitzen. Diese Teile werden durch eine Grenzkurve $E = 0$ getrennt, und jede O mit einem Punkte von CF verbindende Kurve muß jene Grenzkurve mindestens einmal schneiden. Der positive Teil ist natürlich der $EBOA$ anliegende.

§ 3. Unmöglichkeit der dauernden kräftefreien Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung; obere Grenze der Kraft.

Die bisher gewonnenen Resultate setzen uns in den Stand die Frage nach der Möglichkeit der kräftefreien Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung ohne weitere

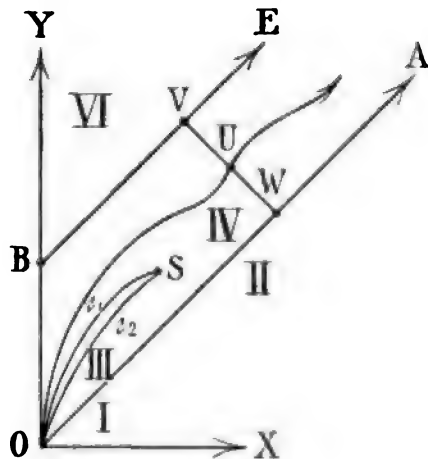


Fig. 2.

Rechnung zu entscheiden. Betrachten wir zunächst (Fig. 2) zwei ganz in $EBOA$ verlaufende Kurvenstücke c_1 und c_2 , die im selben Punkte S endigen, und sei c_2 ganz rechts von c_1 gelegen. Untersuchen wir jetzt die Differenz der Integrale längs c_1 und c_2 :

$$\int_{Oc_1S} A dx + B dy \\ - \int_{Oc_2S} A dx + B dy.$$

Wir können sie offenbar durch ein längs der geschlossenen

Kurve Oc_1Sc_2O genommenes Integral ersetzen, und dieses läßt sich nach dem Stokesschen Satze in das Flächenintegral

$$- \int \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) do$$

umformen, wo do das Flächendifferential bedeutet, und die Integration über den von den Kurven umschlossenen Flächenraum zu erstrecken ist. Da nun dieses Integral, das wir auch

$$- \int E do$$

schreiben können, nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen negativ ist, so folgt der allgemeine Satz: Von zwei in $EBOA$ verlaufenden Kurven, die ohne sich sonst zu schneiden, O mit ein und demselben Punkte dieses Gebietes verbinden, liefert die rechts liegende ein kleineres Integral

$$\int Adx + Bdy.$$

Betrachten wir jetzt eine ganz in YOA verlaufende Vorgesichtskurve.

Wir ersetzen sie zunächst durch eine ganz in $EBOA$ verlaufende unendliche Kurve, indem wir, sollte sie in VI eindringen, durch ein geradliniges längs BE laufendes Stück ersetzen, das sich entweder unendlich weit erstreckt, wenn nämlich die gegebene Kurve in VI verbleibt, oder nur bis zum nächsten Schnittpunkt läuft, wenn die gegebene Kurve wieder in IV eintritt. Entsprechend ist zu verfahren, wenn die Kurve die Grenze BE noch öfter schneidet. Durch diese Ersetzung kann jedenfalls nach dem, was wir über die Funktionen A und B wissen, der Wert des Integrales $\int Adx + Bdy$ nicht geändert werden. Betrachten wir also jetzt eine unendliche in $EBOA$ verlaufende Kurve, von der wir noch voraussetzen wollen, daß sie von den Rändern OBE und OA verschieden ist. Sei U ein variabler Punkt auf der Kurve, UV das Lot von U auf BE und UW das Lot von U auf OA . Die Strecken UV und UW können auch Null werden. Wir wenden dann auf die zwei durch U gehenden Kurven $OBVU$, OU , und auf die zwei durch W gehenden Kurven OUW , OW den eben bewiesenen Satz an, und haben

$$\int_{OU} Adx + Bdy < \int_{OBV} Adx + Bdy + \int_{VU} Adx + Bdy$$

$$\int_{OW} Adx + Bdy < \int_{OU} Adx + Bdy + \int_{UW} Adx + Bdy$$

oder

$$\int_{OW} Adx + Bdy - \int_{UW} Adx + Bdy < \int_{OU} Adx + Bdy$$

$$< \int_{OBV} Adx + Bdy + \int_{VU} Adx + Bdy.$$

Diese Ungleichungen schließen das Gleichheitszeichen aus, selbst dann, wenn U mit W oder \bar{U} mit V zusammenfällt. Rücken wir mit U immer weiter hinaus, so rücken auch V und W ins Unendliche. Dabei nähern sich $\int_{OW} Adx + Bdy$ und $\int_{OBV} Adx + Bdy$ den endlichen Grenzwerten $\int_{OA} Adx + Bdy$ und $\int_{OBE} Adx + Bdy$ d. i. nach

13) und 14) den Werten 0 und 6, ferner streben $\int_{vw} A dx + B dy$ und $\int_{vu} A dx + B dy$ gegen Null, da A und B im Unendlichen unendlich klein werden. Hieraus folgt aber, daß $\int_{ov} A dx + B dy$ nicht über alle Grenzen wachsen kann, vielmehr muß

$$0 < \lim \int_{ov} A dx + B dy < 6$$

sein ¹⁾ unter Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Wir haben hiermit den Satz bewiesen: Der einer dauernden Ueberlichtgeschwindigkeit zukommende Kraftwert K ist positiv und kleiner als $6m$. Herrschte also in der ganzen Vorgeschichte der Bewegung Ueberlichtgeschwindigkeit, so kann die Bewegung in der Jetztzeit nicht kräftefrei von stattem gehn. Hieraus folgt aber keineswegs, daß stets, wenn Ueberlichtgeschwindigkeit vorhanden ist, zur Aufrechterhaltung dieser Bewegung eine Kraft erforderlich wäre. Es giebt vielmehr sehr wohl Vorgeschichtskurven die anfangs in III verlaufen, dann in I eindringen und ein verschwindendes K liefern ²⁾. Als obere Grenze für die möglichen Kräfte fanden wir $6m$ oder nach 3)

$$\frac{9\varepsilon^2}{16\pi}.$$

In dieser Angabe ist nicht die Abhängigkeit vom Elektronenradius ausgedrückt, was daher rührt, daß wir ihm die Größe 1 zugeschrieben haben. Benutzen wir gewöhnliche Längeneinheiten, und setzen den Radius $= a$, so erhalten wir als obere Grenze der Kraft

$$\frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2} \quad ^3).$$

Diese Grenze ist indes nur für den Fall abgeleitet, daß man die Kurven auf das Ueberlichtgeschwindigkeitsgebiet beschränkt. Es entsteht nun die Frage, ob auch unter Aufhebung dieser Beschränkung für die Gesamtheit aller in der X — Y -Ebene verlaufenden Kurven eine solche Grenze existiert. Diese Frage ist offenbar sofort entschieden, wenn man gezeigt hat, daß das Integral der E -Funktion, genommen über die ganze unendliche X — Y -Ebene, absolut kon-

1) Daß wirklich ein Limes vorhanden ist, kann durch ganz ähnliche Betrachtungen erwiesen werden.

2) Weil in I nämlich E auch negativ werden kann. Uebrigens darf die Theorie das Vorkommen kräftefreier Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegungen in der Natur auch schon deshalb noch nicht abweisen, weil sie bisher nur Flächenladung und gleichförmige Volumenladung untersucht hat.

3) A. Sommerfeld, zweite Note, S. 402. K. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam Dec. 21, 1904, S. 868.

vergiert, d. h. daß ihr absoluter Betrag über die ganze Ebene integriert einen konvergenten Grenzwert liefert. Und das ist in der Tat der Fall. Zunächst erinnern wir uns daran, daß die E -Funktion, wenn sie auch zwei Unbestimmtheitsstellen besitzt, doch in der ganzen Ebene endlich bleibt. Betrachten wir weiter 23) und 27) so sehen wir daß alles auf die Abschätzung der Integrale

$$\int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^3}, \quad \int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\xi^2}{(\xi + \eta)^3}$$

$$\int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\xi^2}{(4 + \eta - \xi)^3} \text{ und } \int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\xi^2 \eta}{(4 + \eta - \xi)^3} \text{ ankommt.}$$

Es mag genügen das erste dieser Integrale auszuwerten. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\eta}{(\xi + \eta)^3} d\eta$ geht durch die Substitution $\xi + \eta = \alpha$ über in

$$\int_\xi^\infty \frac{\alpha - \xi}{\alpha^3} d\alpha = \left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{\xi}{2\alpha^2} \right]_\xi^\infty = \frac{1}{2\xi}.$$

Also ist

$$\int_0^2 d\xi \int_0^\infty d\eta \frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^3} = \frac{1}{2} \int_0^2 \xi d\xi = \frac{1}{4}.$$

Ähnlich bestätigt man die Endlichkeit der drei andern Integrale, und hieraus folgt sofort, daß das Integral $\int |E| do$ über den ganzen Definitionsbereich erstreckt, einen Grenzwert besitzt. Dieser Grenzwert, mit m multipliziert, kann aber von keinem der Integrale $K = m \int A dx + B dy$ überschritten werden, wie man leicht unter Anwendung des Stokesschen Satzes, aus 13) und dem Umstande schließt, daß A und B im Unendlichen verschwinden. Also muß die Gesamtheit der Integrale $K = m \int A dx + B y$ eine obere Grenze besitzen. Damit ist aber die obere Grenze selbst noch nicht bestimmt. Wir wissen nur, daß sie kleiner als $\int |E| do$ sein muß und größer oder gleich $6m$. Um sie genau zu bestimmen, hätte man alle möglichen Maximalkurven aufzustellen. Eine solche Maximalkurve kann nur aus Teilen bestehen, auf denen $E = 0$ ist, oder die vertikal verlaufen. Wäre nämlich an einer Stelle weder $E = 0$, noch die Kurve senkrecht, so könnte man das Kurvenintegral sowohl vergrößern als auch verkleinern, indem man die Kurve nach der einen oder andern Seite ausbauchte; wir hätten also kein Extremum. Eine solche Ausbauchung nach beiden Seiten ist an senkrechten Stellen nicht möglich, wegen der Neben-

bedingung, die stets wachsende Abscissen fordert, so daß die Extremalkurven auch solche senkrechte Stücke enthalten können, wo E nicht $= 0$ ist. Solcher Extremalkurven gibt es nun eine große Mannigfaltigkeit, und unter ihnen hätte man die Kurve zu suchen, welche die absolut größte Kraft liefert. Hierauf wollen wir jedoch verzichten. Soviel haben wir aber bereits festgestellt, daß eine obere Grenze vorhanden ist. Würde man die wirkende Kraft diesen Wert übersteigen lassen können, so würde ihr keine Bewegung des Elektrons entsprechen, weder eine mit Ueberlichtgeschwindigkeit noch mit Unterlichtgeschwindigkeit. Es bleibt nur der Ausweg übrig, anzunehmen, daß solche Kräfte auf keine Weise erzeugt werden können.

§ 4. Zeitliche Aenderung der Kraft; Kraftanstieg.

Nachdem wir den Ausdruck für die Kraft, die in einem bestimmten Zeitpunkt wirkt, aufgestellt haben, fassen wir jetzt die Veränderung der Kraft während einer Reihe von Zeitmomenten ins Auge. Bei diesen Betrachtungen werden wir uns einer Umformung des Ausdruckes für die Kraft bedienen. Beschränken wir uns der größeren Einfachheit halber auf solche Bewegungen, bei denen früher einmal dauernd Ruhe geherrscht hat, so daß alle in Betracht kommenden Vorgeschichtskurven mit einem horizontalen Aste endigen werden. Dann haben wir nach 2), 12), 15) unter Benutzung des Stokeschen Satzes

$$29) \quad K = m \int E do,$$

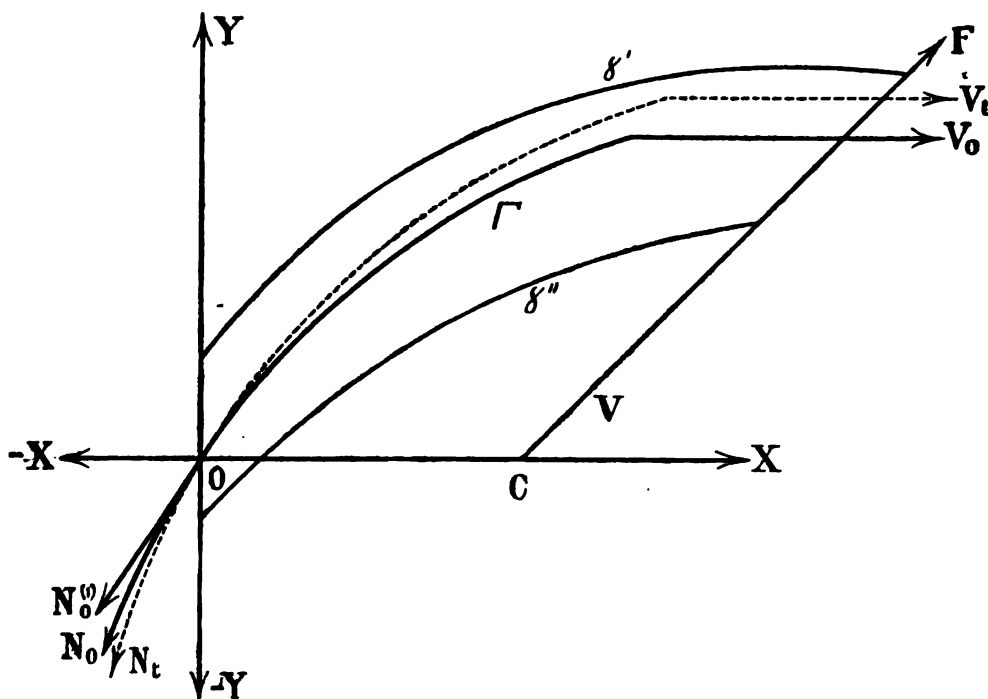
wo do ein Flächendifferential bedeutet, und die Integration über den ganzen unendlichen Raum zwischen der X -Achse und der Vorgeschichtskurve zu erstrecken ist resp. über den endlichen Teil, der nicht zum Gebiete V oder dessen Spiegelbild an OX gehört. In der Halbebene des negativen y hat man das Flächendifferential do negativ anzusetzen.

Zweitens müssen wir einige neue Festsetzungen treffen und neue geometrische Vorstellungen einführen. Denn während wir bisher nur einen festen Zeitpunkt und die dazu gehörige Vorgeschichte zu betrachten hatten, sollen wir uns jetzt eine Folge solcher Zeitpunkte vorstellen und zu jedem die Vorgeschichte konstruieren.

Folgendes sei unsere analytische Darstellung: Unter $t = 0$ verstehn wir einen bevorzugten Zeitmoment; ein positiver Wert von t bedeute einen auf diesen Moment nach t Zeiteinheiten folgenden

Zeitpunkt, und für jeden Zeitpunkt t denken wir uns die Vorgeschichtsfunktion gegeben, die bestimmt, welche Entfernung y das Elektron vor x Zeiteinheiten — also zur Zeit $t-x$ — von der zur Zeit t eingenommenen Lage besaß. Und geometrisch: Zur Zeit 0 ist eine durch O gehende Vorgeschichtskurve gegeben, die V_0 heißen möge. Diese Kurve ändert mit der Zeit ihre Gestalt und geht stetig in immer neue durch O gehende Kurven über. Die zur Zeit t gehörige Kurve möge V_t heißen.

Gibt es nun nicht ein einfaches geometrisches Gesetz nach dem die Kurve V_0 in die Kurven V_t übergeht? Ein solches ist in der Tat nicht schwer aufzufinden. Wir müssen hierzu die auf die Zeit 0 folgende Bewegung ebenfalls durch eine Kurve darstellen, welche die Nachgeschichtskurve heißen und mit N_0 bezeichnet werden möge (vgl. Fig. 3). Diese Kurve wird zweckmäßig in die Halbebene der negativen x eingezeichnet werden; das der Abscisse $x = -|x|$ zugehörige y bedeutet die Entfernung die der Elektronenmittelpunkt $|x|$ Zeiteinheiten später von seiner gegenwärtigen Lage besitzen wird. Diese Kurve N_0 bildet die nach rückwärts gerichtete Fortsetzung der Kurve V_0 ; N_0 und V_0 zusammen als



Figur 3.

ein Gebilde mögen C_0 heißen. Entsprechend werden N_i und C_i definiert. Nun gewinnt man die C_i aus C_0 durch einen einfachen geometrischen Prozeß, den wir als das Hindurchschieben oder Hindurchgleiten durch O bezeichnen wollen. Wir denken uns nämlich C_0 als starres Gebilde und verschieben es translatorisch so, daß es stets durch O hindurchgeht, und seine Translationsrichtung in jedem Augenblicke mit der Richtung seiner Tangente in O übereinstimmt¹⁾. Man sieht leicht, daß es gerade dieser Prozeß ist, der die C_0 in die successiven C_i überführt. Endlich wird jede C_i durch die Vertikale in O in die rechts befindliche V_i und die links befindliche N_i zerschnitten²⁾.

Diese Ueberlegungen verbinden wir mit der Formel 29). Dadurch gelangen wir zu einem Ausdrucke für den Differentialquotienten der Kraft nach der Zeit: $\frac{dK}{dt}$, den wir kurz K' schreiben und als Kraftanstieg bezeichnen.

Betrachten wir nämlich die beiden zu den benachbarten Zeiten 0 und δt gehörigen benachbarten Kurven V_0 und $V_{\delta t}$. Die Differenz der beiden ihnen entsprechenden K , die Größe δK läßt sich nach 29) durch ein Flächenintegral über den schmalen zwischen ihnen gelegenen Raum ausdrücken:

$$\delta K = m \int E \delta y \, dx.$$

Bezeichnet nun v_0 die zur Zeit 0 vorhandene Geschwindigkeit des Elektrons, oder die Neigung der Tangente der Kurve V_0 im Punkte $x = 0$, so ist klar, daß $V_{\delta t}$ aus V_0 durch eine Translation nach oben um $v_0 \delta t$ und nach rechts um δt entstanden ist. Es ist also

$$\delta y = v_0 \delta t - y' \delta t,$$

wo y resp. $y + \delta y$ die Ordinate von V_0 resp. $V_{\delta t}$ bedeutet, also

$$\delta K = m \int E (v_0 - y') \delta t \, dx$$

und daher:

$$K' = m \int_{v_0} E (v_0 - y') \, dx$$

oder auch

$$30) \quad K' = m [v_0 \int_{v_0} E \, dx - \int_{v_0} E \, dy].$$

Wir setzen nun

$$31) \quad \int_{v_0} E \, dx = a_0$$

1) Mechanisch: ein aus zwei sehr nahen Schienen bestehendes Gebilde gleitet translatorisch, nie rotatorisch über einen dazwischen befindlichen festen Stift.

2) Man hätte natürlich auch die Kurve fest lassen und das Koordinatensystem an ihr entlang gleiten lassen können.

$$32) \quad -\int_{V_0} E dy = b_0$$

und können dann auch schreiben

$$33) \quad K' = m[a_0 v_0 + b_0].$$

Die Integrationen in 31) und 32) sind über die Kurve V_0 zu erstrecken, und 33) liefert dann den Kraftanstieg zur Zeit 0. Will man $K'(t)$, den Kraftanstieg zur Zeit t , erhalten, so muß man natürlich über die Kurve V_t integrieren. Wir werden also setzen:

$$34) \quad \int_{V_t} E dx = a(t)$$

$$35) \quad -\int_{V_t} E dy = b(t)$$

$$36) \quad K'(t) = m[a(t) v(t) + b(t)].$$

Wir wollen nun unsere Kurvenintegrale wieder in Flächenintegrale verwandeln. Berechnen wir das über die X -Achse genommene Integral $\int E dx$ so erhalten wir nach 16) den Wert $\frac{16}{3}$, und finden daher unter Benutzung des Stokesschen Satzes, der in diesem Falle auf eine einfache Integration hinauskommt,

$$37) \quad a_0 = \frac{16}{3} + \int_{V_0, OX} \frac{\partial E}{\partial y} do$$

$$38) \quad b_0 = \int_{V_0, OX} \frac{\partial E}{\partial x} do,$$

wobei die Integrationen über den von den Kurven V_0 und OX umschlossenen Flächenraum zu erstrecken sind, und entsprechend

$$39) \quad a(t) = \frac{16}{3} + \int_{V_t, OX} \frac{\partial E}{\partial y} do$$

$$40) \quad b(t) = \int_{V_t, OX} \frac{\partial E}{\partial x} do.$$

Diese Formeln nötigen uns zu einer Diskussion der beiden Funktionen $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$.

Wir beginnen damit zu zeigen, daß diese Funktionen, überall dort, wo sie endlich sind, auch stetig sind. Für die Grenzen zwischen II und V und zwischen IV und VI folgt das aus 22) und 26), da nach 20) ψ an der Stelle 0 dreifach verschwindet. Um die Stetigkeit an der Grenze von II und IV zu erweisen, muß gezeigt werden, daß $\frac{\partial E}{\partial \eta}$ beim Ueberschreiten von DA stetig bleibt, $\frac{\partial E}{\partial \xi}$ aber auf beiden Seiten gleich, doch von entgegengesetzten Vor-

zeichen ist (weil ξ in II und IV nach verschiedenen Richtungen gerechnet wird). Auch das bestätigen die Gleichungen 22) und 26), wenn man noch bedenkt, daß $\psi'(-2) = 0$ ist. Aus 5)–8) erkennt man, daß beim Ueberschreiten von BC [wenn man von der Innenseite des Dreiecks OBC kommt], in dem Ausdrucke der E -Funktion der Summand

$$-\frac{2}{y^2} f'(x+y) + \frac{2}{y^2} f(x+y)$$

verloren geht. Hieraus, und aus $f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$ erkennt man die Stetigkeit der Funktionen $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ an BC , und in ganz ähnlicher Weise folgt ihre Stetigkeit an OD . Endlich kann auch an OX kein Sprung stattfinden, wie sich aus 16) und 28) ergibt. Wir haben also gefunden, daß die Funktionen $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ überall dort, wo sie endlich sind, auch stetig sind.

Ein Unendlichwerden dieser Funktionen ist nur an den Punkten O und C möglich. Wir haben in O und zwar in III nach 17)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{5y^2} \{(-60x^2 + 5x^4) + (60 - 30x^2)y^2 - 15y^4\}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{x}{5y^2} \{(60x^2 - 3x^4) + (-60 + 10x^2)y^2 - 15y^4\}.$$

Es sind also $\frac{\partial E}{\partial x}$ und $\frac{\partial E}{\partial y}$ in O nicht endlich, dagegen bleiben die Funktionen $x \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$ und $x \cdot \frac{\partial E}{\partial y}$ um O herum unter einer obern Grenze.

Ähnliches gilt für die Umgebung von C . Bilden wir nach 23) $\frac{\partial E}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial E}{\partial \eta}$. Die hierin auftretenden bei C unendlich werdenden Summanden sind — abgesehen von stetigen Faktoren, mit denen sie multipliziert sind —:

$$\frac{\xi^2}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^2}{(\xi + \eta)^3}, \frac{\xi \eta}{(\xi + \eta)^3}.$$

Setzen wir nun

$$41) \quad \bar{x} = x - 2$$

und untersuchen die Funktionen

$$-x \frac{\partial E}{\partial x}, y \frac{\partial E}{\partial x}, -x \frac{\partial E}{\partial y}, y \frac{\partial E}{\partial y}.$$

Diese enthalten, wenn man die Umrechnung nach 18) vornimmt, die Summanden:

$$\frac{\xi^4}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^3 \eta}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^2 \eta^2}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^2}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi^2 \eta}{(\xi + \eta)^4}, \frac{\xi \eta^2}{(\xi + \eta)^4},$$

jeden noch mit einer stetig bleibenden Funktion multipliziert. Alle diese Funktionen bleiben für positive ξ, η durchaus endlich, wie wir das auf $\frac{\xi^3}{(\xi + \eta)^4}$ bereits auf Seite 242 gesehen haben, und wie wir das von den andern Funktionen in genau entsprechender Weise zeigen mögen. Somit besitzen die Funktionen

$$-x \frac{\partial E}{\partial x}, y \frac{\partial E}{\partial x}, -x \frac{\partial E}{\partial y}, y \frac{\partial E}{\partial y}$$

in der Nähe von C eine obere Grenze.

Sei nun um O herum $\frac{g}{\sqrt{2}}$ größer als die gemeinsame obere Grenze der Funktionen

$$x \frac{\partial E}{\partial x}, y \frac{\partial E}{\partial x},$$

also:

$$\sqrt{2x^2} \frac{\partial E}{\partial x} < g$$

$$\sqrt{2y^2} \frac{\partial E}{\partial x} < g,$$

so folgt, wenn $x \geq y$ ist, aus der ersten, und wenn $x \leq y$ ist, aus der zweiten Ungleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial E}{\partial x} < g.$$

Entsprechendes gilt von $\frac{\partial E}{\partial y}$ bei O und von den Funktionen

$$\sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial E}{\partial x} \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial E}{\partial y}$$

bei Annäherung an C .

Damit ist gezeigt, daß in der Nähe von O und C die Funktionen $r \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$ und $r \cdot \frac{\partial E}{\partial y}$ endlich bleiben, unter r den Abstand von diesen Punkten verstanden. Und hieraus folgt, daß die nächste Umgebung von O und C keinen endlichen Beitrag zu den Integralen 37) und 38) liefern kann.

§ 5. Existenz und Eindeutigkeit einer Bewegung die zu einer vorgeschriebenen Kraft gehört.

Jetzt sind wir vorbereitet einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen, den wir zunächst genau formulieren wollen: Ein Elektron ruht zunächst. Darauf führt es eine endliche Zeit hindurch eine gegebene Bewegung aus mit stets endlicher Geschwindigkeit. Aus der Bewegung kann auch die Kraft berechnet werden. Von einem bestimmten Zeitpunkte an, ist die Bewegung nicht mehr gegeben, sondern eine Zeitfunktion, so jedoch, daß sie sich zeitlich stetig an die vorhin wirkende Kraft anschließt. Wir behaupten, daß wir eine kleine, wenn auch endliche Zeit hindurch die Bewegung auf eine und nur eine Weise so fortsetzen können, daß während dieser Zeit die aus ihr berechnete Kraft gerade die vorgeschriebene Zeitfunktion wird.

Zwei Einschränkungen müssen wir noch machen. Erstens soll das zur Anfangsvorgeschichte gehörige Integral α_0 von Null verschieden sein. Außerdem führen wir noch eine zweite Beschränkung ein, von der wir nicht wissen, ob sie notwendig ist. Wir setzen voraus, daß die gegebene Vorgeschichtskurve des Anfangszustandes nicht durch C geht.

Sei V_0 (Figur 3) die Anfangsvorgeschichtskurve. Wegen des horizontalen Astes, mit dem sie endet, muß sie CF oder deren Spiegelbild schneiden. Wir umgeben V_0 mit einem Schutzgebiete Γ , das von einem Stücke von CF oder deren Spiegelbild, einem Stücke der Vertikalen OY und zwei Grenzkurven γ' und γ'' begrenzt ist und den folgenden nach Voraussetzung erfüllbaren Bedingungen genügt:

- 1) V_0 hat keinen Punkt mit den beiden Grenzkurven von Γ gemein.
- 2) Γ enthält nicht den Punkt C .
- 3) Jede durch O gehende in Γ verlaufende Kurve liefert bei der Integration (37) ein von Null verschiedenes α_0 .

Nach der Bedingung 1) besitzt der Abstand in senkrechter Richtung der Grenzkurven von V_0 eine untere Grenze. Sei b eine positive Zahl, kleiner als diese. Ferner sei L größer als alle x in F , und G größer als der Absolutwert der Funktionen

$$x \frac{\partial E}{\partial x}, x \frac{\partial E}{\partial y}$$

in Γ . Endlich sei β größer als der absolute Wert aller Integrale b_0 , die nach 38) von Kurven durch O in Γ gebildet werden, und α sei eine von Null verschiedene positive Zahl, kleiner zu wählen, als der absolute Wert aller Integrale a_0 , die nach 37) zu Kurven durch O in Γ gehören.

Zu der so umgebenen Kurve V_0 suchen wir eine passende Nachgeschichtskurve N_0 . Für $t < 0$ ist die Geschwindigkeit $v(t)$ als Funktion der Zeit gegeben und damit indirekt auch: $K(t)$, $a(t)$, $b(t)$. Für $t > 0$ ist von diesen Funktionen nur $K(t)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $K'(t)$ gegeben, $v(t)$ dagegen gesucht. Unsere Methode besteht nun darin, die unbekannten Funktionen $v(t)$, $a(t)$, $b(t)$ zusammen zu bestimmen, wobei wir der Gleichung 36)

$$36) \quad K' = m[a(t)v(t) + b(t)]$$

Genüge leisten müssen. Diese Bestimmung gelingt mit Hilfe der von den Herrn H. A. Schwarz und E. Picard ¹⁾ ausgebildeten Methode der successiven Approximation.

Als erste Annäherung $v^{(1)}(t)$ für $v(t)$ wählen wir eine Konstante und zwar die zur Zeit 0 vorhandene Geschwindigkeit v_0 . Also:

$$42) \quad v^{(1)}(t) = v(0) = v_0.$$

Die dieser Annäherung entsprechende erste Annäherungskurve $N_0^{(1)}$ ist eine geneigte Gerade die sich ohne Knick in $x = 0$ an V_0 anschließt.

V_0 und $N_0^{(1)}$ zusammen bilden die erste Annäherungskurve $C_0^{(1)}$. „Schieben“ wir $C_0^{(1)}$ „durch“ O hindurch, so erhalten wir die Schaar der $C_i^{(1)}$, $V_i^{(1)}$, $N_i^{(1)}$. Wir nehmen nun t nicht größer als eine endliche Größe τ , und müssen τ rücksichtlich seiner Größe einer Reihe von Einschränkungen unterwerfen. Eine derselben sei bereits jetzt aufgestellt:

I) τ sei so klein, daß die $V_i^{(1)}$ alle in Γ enthalten sind.

Nach 39) und 40) liefern nun die Kurven $V_i^{(1)}$ Integrale $a^{(1)}(t)$, $b^{(1)}(t)$. Wir setzen nämlich

$$43) \quad \begin{cases} a^{(1)}(t) = \frac{16}{3} + \int_{V_i^{(1)}, OX} \frac{\partial E}{\partial y} do \\ b^{(1)}(t) = \int_{V_i^{(1)}, OX} \frac{\partial E}{\partial x} do. \end{cases}$$

Im Anschluß an 36) setzen wir sodann

$$44) \quad \begin{cases} v^{(1)}(t) = \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b^{(1)}(t)}{a^{(1)}(t)} \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. E. Picard, *Traité d'analyse*, 2 éd. tome II, p. 340.

und wissen wegen der Bedingung I für τ und der Bedingung 3) für Γ , daß $v^{(n)}(t)$ für t zwischen 0 und τ , stets endlich bleibt. Aus $v^{(n)}$ erhalten wir die Kurve $N_0^{(n)}$ und damit die Schaar der $C_i^{(n)}$, $V_i^{(n)}$, $N_i^{(n)}$. Wir nehmen nun

II) τ so klein, daß alle $V_i^{(n)}$ in Γ enthalten sind.

Sodann konstruieren wir, wie oben $a^{(n)}(t)$, $b^{(n)}(t)$ und $v^{(n)}(t)$, und wissen, daß $a^{(n)}(t)$ durchweg $\neq 0$ und daß $v^{(n)}(t)$ endlich ist. Weitere Beschränkungen dieser Art legen τ wir nicht auf. Zu $v^{(n)}(t)$ konstruieren wir die Schaar $V_i^{(n)}$ und, falls diese durchweg in Γ liegen sollte, was wir aber nicht wissen, können wir $v^{(n+1)}(t)$ bilden. So fahren wir fort und zwar solange, als wir noch durchweg von Null verschiedene $a(t)$ erhalten. Wir haben allgemein

$$45) \quad v^{(n+1)}(t) = \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b^{(n)}(t)}{a^{(n)}(t)}$$

$$46) \quad a^{(n)}(t) = \frac{16}{3} + \int_{V_i^{(n)}, OX} \frac{\partial E}{\partial y} d\sigma$$

$$47) \quad b^{(n)}(t) = \int_{V_i^{(n)}, OX} \frac{\partial E}{\partial x} d\sigma$$

vorausgesetzt daß $V_i^{(n)}$, $V_i^{(n)}$, ... $V_i^{(n)}$ für $0 < t < \tau$ in Γ enthalten sind, eine Voraussetzung die nach der Bedingung I) und II) wenigstens für $n = 2$ erfüllt ist.

Schätzen wir nun die Differenz $a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)$ ab. Dazu ist eine geometrische Hilfsbetrachtung erforderlich. Seien $v^{(n-1)}(t)$ und $v^{(n)}(t)$ zwei Funktionen aus der Reihe der Funktionen $v^{(1)}(t)$, $v^{(2)}(t)$, ... $v^{(n)}(t)$ und seien $y_i^{(n-1)}$ und $y_i^{(n)}$ die Ordinaten der zugehörigen $V_i^{(n-1)}$ und $V_i^{(n)}$. Wir wollen das Maximum der Differenz $|y_i^{(n-1)} - y_i^{(n)}|$ an einer gegebenen Stelle für alle t von 0 bis τ bestimmen, welches wir $M|y_i^{(n-1)} - y_i^{(n)}|$ schreiben, indem M allgemein ein Maximum für alle t von 0 bis τ bedeute.

Sei erstens

$$x > \tau.$$

Betrachten wir $V_i^{(n-1)}$ und $V_i^{(n)}$ an der Stelle $x - t$ zur Zeit 0. Sie fallen zusammen, weil zur Zeit 0 überhaupt alle V zusammenfallen, nämlich mit V_0 . Jetzt setzt der Durchschiebungsprozeß ein. Er bringt die vorhin zusammenfallenden Punkte um t nach rechts, also gerade nach x und entfernt sie um

$$\int_0^t \{v^{(n-1)}(t) - v^{(n)}(t)\} dt$$

in vertikaler Richtung. Es wird also sein

$$|y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq t \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

und a fortiori

$$48) \quad |y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq \tau \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|.$$

Sei zweitens

$$x < \tau.$$

Ist

a) $t < x$, so schließen wir, wie eben, daß

$$|y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq t \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|,$$

also a fortiori

$$|y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq x \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

ist. Ist dagegen

b) $t > x$, so betrachten wir $V_i^{(n')}$ und $V_i^{(n'')}$ zur Zeit $t-x$ an der Stelle O . Hier finden wir die Ordinatendifferenz 0, weil in O alle V_i zusammenfallen. Die Punkte, die sich zur Zeit $t-x$ an der Stelle O befinden, sind zur Zeit t um x nach rechts gerückt, befinden sich also in x , und sind um

$$\int_{t-x}^t \{v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)\} dt$$

senkrecht gegen einander verschoben, so daß man hat

$$49) \quad |y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq x M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|.$$

Wir dürfen also zusammenfassend behaupten: Für

$$48) \quad x > \tau \text{ ist } |y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq \tau \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|$$

und für

$$49) \quad x < \tau \text{ ist } |y_i^{(n')} - y_i^{(n'')}| \leq x \cdot M |v^{(n')}(t) - v^{(n'')}(t)|.$$

Setzen wir nun für n' und n'' die Indizes n und $n-1$ ein und berücksichtigen, daß in Γ nach Voraussetzung $\frac{\partial E}{\partial y} < \frac{G}{x}$ ist, so erhalten wir nach 46)

$$50) \quad \left\{ \begin{aligned} |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| &< \int_0^t \left\{ \frac{G}{x} \cdot x M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)| \right\} dx \\ &+ \int_\tau^L \left\{ \frac{G}{x} \cdot \tau M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)| \right\} dx \end{aligned} \right.$$

oder

$$|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| < \{M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\} G \cdot \left[\tau + \tau \ln \frac{L}{\tau} \right]$$

oder

$$51) \quad |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| < R \cdot \{M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\}$$

wo

$$52) \quad R = G \left[\tau + \tau \ln \frac{L}{\tau} \right]$$

ist.

Ebenso ist

$$53) \quad |b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| < R \cdot \{M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|\}.$$

Schätzen wir zweitens die Differenz $v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)$ ab. Zunächst wissen wir, da $V_1^{(1)}, V_1^{(2)} \dots V_1^{(n)}$ in Γ verlaufen, daß sowohl $v^{(n+1)}(t)$ als auch $v^{(n)}(t)$ im Intervalle 0 bis τ endlich bleiben. Sei κ größer als das Maximum von $\frac{1}{m} K'(t)$ im Intervalle 0 bis τ . Dann folgt aus 45) und den Festsetzungen auf S. 255

$$\begin{aligned} |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| &< \frac{\kappa}{\alpha^2} M |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| \\ &+ \frac{1}{\alpha} M |b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| \\ &+ \frac{\beta}{\alpha^2} M |a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| \end{aligned}$$

oder

$$54) \quad |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < SM \left\{ \begin{aligned} &|a^{(n)}(t) - a^{(n-1)}(t)| \\ &|b^{(n)}(t) - b^{(n-1)}(t)| \end{aligned} \right\},$$

wenn M das Maximum von den beiden Argumenten bedeutet und wenn

$$55) \quad S = \frac{\kappa}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

ist. Hierbei ist κ eine feste positive Zahl, und sollten wir später genötigt sein, τ noch weiter zu verkleinern, so werden wir doch κ und damit S ungeändert lassen. Verbinden wir 54) mit 51) und 53) so erhalten wir:

$$56) \quad |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < R \cdot S \cdot M |v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|,$$

und das gilt, wenn $V_1^{(1)} \dots V_1^{(n)}$ in Γ enthalten sind, also wenigstens noch für $n = 2$. Man hat also auch

$$|v^{(n)}(t) - v^{(n)}(t)| < R \cdot S \cdot M |v^{(n)}(t) - v^{(n)}(t)|$$

oder

$$|v^{(n)}(t) - v^{(n)}(t)| < R \cdot S \cdot w$$

wenn unter w das Maximum von $|v^{(n)}(t) - v^{(n)}(t)|$ im Intervalle 0 bis τ verstanden ist, und allgemein

$$57) \quad |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < (RS)^{n-1} w.$$

Nun unterwerfen wir τ einer dritten Bedingung. Nach 52) kann R durch Verkleinerung von τ beliebig klein gemacht werden. Wählen wir also

III) τ so klein, daß $RS < 1$ ist.

Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} |v^{(n+1)}(t) - v^{(1)}(t)| &\leq M |v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)| \\ &\quad + M |v^{(3)}(t) - v^{(2)}(t)| \\ &\quad + \dots + M |v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| \\ &< w + (RS)w + \dots + (RS)^{n-1}w \\ &< w(1 + RS + (RS)^2 + \dots) \\ &< \frac{w}{1 - RS}. \end{aligned}$$

Nun ist nach 48) und 49)

$$|y_i^{(n)} - y_i^{(n')}| < LM \cdot |v^{(n)}(t) - v^{(n')}(\tau)|$$

also

$$|y_i^{(n+1)} - y_i^{(1)}| < \frac{wL}{1 - RS}.$$

Bezeichnet $y^{(0)}$ die Ordinate von V_0 , so wissen wir schon, daß $|y_i^{(1)} - y^{(0)}| < b$ ist, denn wir hatten gleich zu Anfang τ so bestimmt, daß alle $V_i^{(1)}$ in Γ laufen. Sei $b^{(1)}$ eine feste Größe zwischen dem Maximum von $|y_i^{(1)} - y^{(0)}|$ und b , die bei etwaigen weiteren Verkleinerungen von τ nicht geändert werden soll, so hat man

$$|y_i^{(n+1)} - y^{(0)}| < b^{(1)} + \frac{wL}{1 - RS}.$$

Nun kann man w durch Verkleinerung von τ beliebig klein machen¹⁾. Wir wählen

IV τ so klein, daß

$$\frac{wL}{1 - RS} < b - b^{(1)}$$

ist.

Dann haben wir

$$|y_i^{(n+1)} - y^{(0)}| < b,$$

1) Also: Nach der Wahl von Γ sind b, L, G, α, β als feste Größen zu wählen, nach einer beliebigen vorläufigen Wahl von τ die Größen κ und S , und nach Wahl I von τ die Größe $b^{(1)}$. R und w dagegen sind Funktionen von τ .

d. h. unter der Voraussetzung daß noch die Kurve $V_i^{(n)}$ in Γ verläuft, haben wir gezeigt, daß auch $V_i^{(n+1)}$ in Γ bleibt. Für ein so klein bestimmtes τ schließen wir nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, daß alle V_i in Γ bleiben werden.

Wir sind jetzt somit zu einer unendlichen Reihe von Kurven V und Funktionen v gelangt. Bilden wir die Reihe

$$v^{(0)} + (v^{(1)} - v^{(0)}) + (v^{(2)} - v^{(1)}) + \dots$$

Wegen 57) und wegen $RS < 1$ wird sie gleichmäßig gegen eine Funktion konvergieren, die $v(t)$ heißen soll. Nach 51), 53) und 57) konvergieren ebenso die Reihen

$$a^{(1)} + (a^{(2)} - a^{(1)}) + (a^{(3)} - a^{(2)}) + \dots$$

und $b^{(1)} + (b^{(2)} - b^{(1)}) + (b^{(3)} - b^{(2)}) + \dots$

gleichmäßig gegen Grenzfunktionen $a(t)$ und $b(t)$.

Die Funktion $v(t)$ dient zur Konstruktion der Nachgeschichtskurve N_0 und diese liefert beim Hindurchschieben eine Schaar V_i . Mit wachsendem n konvergieren die $V_i^{(n)}$ gleichmäßig — d. h. unabhängig von t — gegen die V_i , eben weil $v^{(n)}(t)$ gleichmäßig gegen $v(t)$ strebt¹⁾. Aus dieser letzten Tatsache schließen wir nun weiter, daß

$$\int_{V_i^{(n)}, OX} \frac{\partial E}{\partial x} do \text{ und } \int_{V_i^{(n)}, OX} \frac{\partial E}{\partial y} do$$

mit wachsendem n gleichmäßig gegen

$$\int_{V_i, OX} \frac{\partial E}{\partial x} do \text{ und } \int_{V_i, OX} \frac{\partial E}{\partial y} do$$

konvergieren. Um nämlich z. B.

$$\int_{V_i^{(n)}} \frac{\partial E}{\partial x} do \text{ bis auf } \varepsilon \text{ an } \int_{V_i} \frac{\partial E}{\partial x} do$$

heranzubringen, schließen wir erst O durch einen Kreis von so kleinen r aus, daß das Integral $\int \frac{\partial E}{\partial x} do$ hierüber $< \frac{\varepsilon}{2}$ ²⁾ ist. Für das übrige Gebiet in Γ besitzt aber $\frac{\partial E}{\partial x}$ eine obere Grenze. Sei G^* diese und wählen wir n so groß daß $V_i^{(n)}$ und V_i für alle t um

1) Vgl. Formel 48) und 49).

2) Vgl. die Schlußbemerkung von § 4.

weniger als $\frac{\varepsilon}{2LG^*}$ unterschieden sind, so sind in der Tat die beiden in Rede stehenden Integrale auf weniger als ε einander angenähert.

Aus dem eben Bewiesenen, sowie den Gleichungen 45)–47) ergibt sich aber sofort:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\frac{1}{m} K'(t) - b(t)}{a(t)} \\ a(t) &= \frac{16}{3} + \int_{V_n} \frac{\partial E}{\partial y} d\sigma \\ b(t) &= \int_{V_i} \frac{\partial E}{\partial x} d\sigma. \end{aligned}$$

Bei einer $v(t)$ entsprechenden Bewegung wird also der nach 36), 39), 40) zu bestimmende Kraftanstieg gerade mit unserer vorgeschriebenen Funktion K' identisch, womit unser Existenzbeweis geführt ist.

Wir schließen hieran noch einen Eindeutigkeitsbeweis. Es kann nicht zwei verschiedene Funktionen v geben, die unser Problem lösen. In der Tat, wären \bar{v} und $\bar{\bar{v}}$ solche Funktionen, so wählen wir wieder τ so klein, daß $RS < 1$ ist, und daß bei der durch \bar{v} sowohl als durch $\bar{\bar{v}}$ erzeugten „Durchschiebung“ die V_i in Γ blieben.

Wir schließen dann in entsprechender Weise wie vorhin

$$58) \quad |\bar{v}(t) - \bar{\bar{v}}(t)| < RS \cdot M |\bar{v}(t) - \bar{\bar{v}}(t)|$$

oder

$$59) \quad M |\bar{v}(t) - \bar{\bar{v}}(t)| < RS \cdot M |\bar{v}(t) - \bar{\bar{v}}(t)|$$

was wegen $RS < 1$ ein offener Widerspruch wäre. Also läßt sich unsere Bewegung bei vorgeschriebenem Kraftverlauf nur auf eine Weise fortsetzen¹⁾.

Für den Fall, daß V_0 durch C geht, habe ich den Existenzbeweis nicht führen können. Ich habe für kleine τ nur die Ungleichung $|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)| < RS \sqrt{|v^{(n)}(t) - v^{(n-1)}(t)|}$ erhalten können, mit etwas veränderter Bedeutung des R , eine Ungleichung, auf die sich kein Konvergenzbeweis stützen läßt.

Unser Existenzbeweis und Eindeutigkeitsbeweis sind dagegen vollständig geführt, unter der Voraus-

1) Vgl. C. Jordan: Cours d'analyse 2. éd. tome III. § 80. p. 92.

setzung, daß V_0 nicht durch C geht und daß das zur Anfangsvorgeschichte gehörige Integral $a_0 = \int_{V_0} E dx$ von Null verschieden ist.

§ 6. Weitere Ausführungen zum Existenzsatz.

Wir nennen einen Bewegungszustand regulär, wenn erstens die Geschwindigkeit endlich ist und stets endlich war und zweitens das Integral $\int_{V_0} E dx \neq 0$ ist¹⁾, in allen andern Fällen heiße es singulär. Wir haben also eben den Satz bewiesen, daß bei gegebener Kraft ein regulärer Bewegungszustand sich eine endliche Zeit regulär fortsetzen läßt. Sei τ ein Zeitpunkt bis zu dem sich die Bewegung regulär fortsetzen läßt, so daß sie auch zur Zeit τ völlig regulär ist. Dann kann es erstens sein, daß die Menge der Zeitpunkte τ keine obere Grenze besitzt. Das bedeutet, daß die Bewegung dauernd regulär fortgesetzt werden kann. Zweitens kann sie eine obere Grenze besitzen; dann wird sie aber — um in der Sprache der Mengentheorie zu reden — keine abgeschlossene Menge sein. Denn wäre diese Grenze unter den τ enthalten, so entspräche ihr ein regulärer Bewegungszustand und nach dem Existenzsatz müßte sie sich doch noch über diesen hinaus fortsetzen lassen. Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder — immer bei einem gegebenen Kraftgesetz — dieser Grenzzeitpunkt wird nie erreicht, d. h. die Bewegung läßt sich auf keine Weise bis zu ihm fortführen, oder aber die Bewegung läßt sich bis zu ihm führen, aber hier wird der Bewegungszustand singulär. Wir können im zweiten Falle nicht mit Sicherheit sagen, daß die Bewegung sich nicht fortsetzen läßt. Nur unser Beweis, daß sie sich fortsetzen läßt, versagt hier.

Solche singulären Vorkommnisse treten auf, wenn die Vorgesichtskurve sehr nahe einer Kurve verläuft, für die $\int E dx = 0$ ist. Einen wichtigen Spezialfall dieser Kurven wollen wir hervorheben, nämlich diejenigen, für die teils $E = 0$, teils $dx = 0$ ist. Das sind die Kurven, von denen wir am Ende des 3. § geredet haben. Für sie gilt der Existenzsatz nicht mehr. Und das ist auch a priori einleuchtend, denn würde er gelten, so wäre es möglich diese extremen Kraftwerte zu überschreiten.

Eine wichtige Extremale ist z. B. die Gerade OY . Es ist

1) Außerdem muß vor der Hand noch verlangt werden daß V_0 nicht durch C geht. Vielleicht erweist eine spätere Untersuchung diese Einschränkung als überflüssig.

interessant, die Kurven in ihrer Nähe zu untersuchen. Schließt sich die Bewegung sehr nahe an OY an, so werden a sowohl wie b sehr klein, dagegen verschwindet nach 17) a von höherer Ordnung als b . Es wird also nicht möglich sein, den Maximalwert von K , den wir als $6m$ fanden, zu überschreiten. Sucht man das unter Anwendung eines konstanten Kraftanstieges zu erreichen, so wird sich zwar die Kurve mehr und mehr an OY anschließen, gleichzeitig wird aber v über alle Maßen wachsen. Oder, konstruieren wir bei einem zeitlich konstanten K' die Nachgeschichtskurve, so wird diese eine immer steilere Tangente erhalten, sich asymptotisch einer Vertikalen anschließen und daher die Bewegung über einen gewissen Zeitpunkt hinaus nicht definieren. So kommt es, daß, trotzdem K' konstant ist, doch das Integral $\int K' dt$ nicht unbegrenzt wachsen kann, sondern unter einer bestimmten Grenze bleibt. Will man andererseits das Unendlichwerden von v verhindern, so kann man sich K' mit abnehmendem a ebenfalls abnehmend denken. Dann wird unter Umständen die Bewegung dauernd möglich sein, aber wegen des abnehmenden K' wächst $\int K' dt$ wiederum nicht ins Unbegrenzte.

Es muß aber bemerkt werden, daß die Fälle in denen E und dx einzeln Null sind, nicht die einzigen singulären Fälle sind, sondern daß jedesmal wenn $\int E dx$ verschwindet, eine Singularität vorliegt. Während wir oben den Fall besprachen, daß eine Bewegung sich einem singulären Bewegungszustande nähert, kann auch der Fall eintreten, daß ein solcher wirklich erreicht wird. Dann wird $v = \infty$; wenn aber gerade $K' = mb$ geworden ist, kann v auch endlich sein. In diesem letzten Falle tritt wahrscheinlich eine Vieldeutigkeit auf: Man wird die Bewegung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit fortsetzen können. Solche Fälle vieldeutiger Lösungen der Bewegungsgleichungen sind ja auch aus der alten Mechanik bekannt¹⁾. Im allgemeinen braucht die Geschwindigkeit nicht stetig zu sein, sie ist vielmehr stetig oder unstetig je nachdem der Kraftanstieg stetig ist oder nicht²⁾. Eine einfache physikalische Interpretation kommt dem Integrale b zu. Es ist proportional dem Kraftanstieg, welcher die Hemmung des Elektrons bewirkt.

Endlich sei bemerkt, daß sich unsere Methode auch verwenden läßt zur numerischen Ausrechnung der einem gewissen Kraftgesetz

1) Z. B. ein materieller Punkt auf der Spitze eines Kegels.

2) Anm. bei der Korrektur: Vgl. die auf S. 237 erwähnte Note des Herrn Van der Waals.

entsprechenden Bewegung. Jedoch bedienen wir uns hierzu am besten der Cauchy-Lipschitzschen Methode: Die Kurve V_0 werde ein wenig in der Richtung ihrer Tangente in O durch O hindurchgeschoben und das an O anliegende Stück werde geradlinig angenommen. Dann berechne man die neuen Integrale a und b und zwar wohl besser nach 34) und 35) als nach 39) und 40), daraus wird wieder das neue v berechnet, dann wieder geschoben und so weiter. Man erhält schließlich einen polygonalen Zug, der eine Annäherung an die gesuchte Bewegung darstellt.

§ 7. Flächenladung.

Bei Annahme oberflächlicher Ladung treten wesentlich andere Verhältnisse auf. Zu ihrer Betrachtung wollen wir jetzt übergehen. Hier beziehn wir uns auf eine andere Sommerfeldsche Formel¹⁾. Wir setzen wieder $\bar{x} = x - 2$ und verstehn wieder unter m eine Konstante des Elektrons — natürlich nicht dieselbe wie im Falle der Volumenladung — dann haben wir

$$60) \quad \frac{1}{m} K = \left[\left(1 - \frac{1}{v^2} \right) \ln \frac{1+v}{1-v} + \frac{2}{v} \right] + \ln \frac{y_1}{y_2} + \int_{(1)}^{(3)} \frac{\bar{x}}{y^2} dx.$$

Hier bezeichnet v die augenblickliche Geschwindigkeit, y_1 und y_2 die Ordinaten der Vorgeschichtskurven in ihren Schnittpunkten mit BC und CF (Figur 1), und die Integration ist nur über das Stück der Vorgeschichtskurve zu erstrecken, das zwischen den letzt genannten Geraden liegt. Indem wir abkürzend

$$61) \quad \left(1 - \frac{1}{v^2} \right) \ln \frac{1+v}{1-v} + \frac{2}{v} = \Phi(v)$$

setzen, können wir auch schreiben

$$62) \quad \frac{K}{m} = \Phi(v) + \ln \frac{y_1}{y_2} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{\bar{x}}{y^2} dx.$$

Diese Formel ist nur gültig, wenn die Vorgeschichte nicht durch C geht. Geht sie durch diesen Punkt, so leiten wir aus 62) durch Grenzübergang eine für diesen Fall gültige Formel ab. Wir denken uns zunächst die Kurve im Gebiet DCF geradlinig mit der Neigung \bar{v} laufen. Die sehr einfache Rechnung ergibt dann für das zweite und dritte Glied in 62) zusammen $-\Phi(\bar{v})$.

1) Zweite Note S. 397, Formel 64).

Läuft die Kurve jetzt durch C , so behalten wir dieselbe Formel bei, in der wir jedoch unter \bar{v} die C entsprechende Geschwindigkeit verstehen, d. h. die vor zwei Zeiteinheiten vorhandene.

Wir setzen also in diesem Falle:

$$63) \quad \frac{K}{m} = \Phi(v) - \Phi(\bar{v}).$$

Damit haben wir den Satz gewonnen: Besitzt ein flächenhaftes Elektron dieselbe Geschwindigkeit und nimmt es denselben Ort ein, wie vor zwei Zeiteinheiten, so bedarf es zur Aufrechterhaltung seiner Bewegung keiner äußern Kraft. Und hieraus folgt weiter: Eine ganz beliebige periodische Translationsbewegung eines flächenhaften geladenen Elektrons mit der Schwingungszeit: Elektronendurchmesser dividiert durch Lichtgeschwindigkeit, d. h. eine Bewegung bei der sich die Lagen des Elektrons nach einer solchen Zeit wiederholen, kann sich ohne äußere Kraftwirkung vollziehen. Die hier geschilderten longitudinalen Schwingungen sind als ein Vibrieren des Elektrons zu bezeichnen. Dabei besitzen die größtmöglichen Elongationen die Länge des Elektronenradius, weil Ueberlichtgeschwindigkeit bei Flächenladung nach den Untersuchungen des Herrn A. Sommerfeld ausgeschlossen ist¹⁾.

Wir wollen für das Folgende aber den Fall ausschließen, daß die Vorgeschichtskurven durch C gehn. Dann führen wir in sehr einfacher Weise unsern Existenzbeweis. Zunächst schreiben wir 62):

$$64) \quad \frac{K}{m} = \Phi(v) - 2 \int \frac{dx}{y^2}.$$

Dabei ist die Integration über den Flächenraum zu erstrecken, der von der Vorgeschichtskurve, von Stücken von CD und CF und von einer beliebigen Horizontalen begrenzt wird, die, ohne die Vorgeschichtskurve zu schneiden, zwischen ihr und C verläuft. Wir bemerken, daß $\Phi(-v) = -\Phi(v)$, daß für kleine v die Funktion $\Phi(v) = 0$, und daß $\Phi(1) = 2$ ist. Ferner ist

$$64) \quad \frac{d\Phi}{dv} = -\frac{4}{v^3} + \frac{2}{v^3} \ln \frac{1+v}{1-v}.$$

1) Ueber Rotationsschwingungen vgl. G. Herglotz Götting. Nachr. 1908, Heft 6, S. 1; A. Sommerfeld, 2. Note und Verhandl. des 3. intern. Math.-Kongr. z. Heidelberg, 1905, S. 417. Diese Arbeiten behandeln also die zweite im § 1 erwähnte Fragestellung.

Diese Funktion hat für $v = 0$ den Wert $\frac{4}{3}$ und verschwindet niemals, weil sonst

$$2v = \ln \frac{1+v}{1-v}$$

oder

$$1 = 1 + \frac{v^2}{3} + \dots$$

sein müßte, während doch die rechte Seite nur positive Glieder enthält. Gleichfalls sieht man daß die genannte Funktion im betrachteten Intervalle mit $|v|$ wächst.

Also ist $\Phi(v)$ eine im Intervalle -1 bis $+1$ eindeutige und umkehrbare Funktion, und bezeichnet Ψ die inverse Funktion, so ist

$$65) \quad v = \Psi\left(\frac{K}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma\right),$$

und es ist im Intervalle -2 bis $+2$

$$\Psi' \leq \frac{3}{4}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß für unsere gegebene V_0 und für den momentanen Wert der Kraft $K(0)$

$$\left| \frac{K(0)}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma \right| < 2$$

ist. Wieder umgeben wir V_0 mit einem Schutzgebiet Γ , derart, daß für alle in Γ laufenden Kurven

$$\left| \frac{K(0)}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma \right| < 2$$

ist. Ferner wählen wir τ so klein, daß für alle Kurven in Γ und alle $t \leq \tau$

$$\left| \frac{K(t)}{m} + \int \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma \right| < 2$$

ist. Endlich konstruieren wir die unendliche Reihe der Funktionen:

$$66) \quad v^{(1)}(t) = v_0$$

$$67) \quad \bar{a}^{(1)}(t) = \int_{V_0^{(1)}} \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma$$

$$68) \quad v^{(2)}(t) = \Psi\left\{\bar{a}^{(1)}(t) + \frac{K(t)}{m}\right\}$$

\vdots

$$69) \quad \bar{a}^{(n)}(t) = \int_{V_0^{(n)}} \frac{2\bar{x}}{y^2} d\sigma$$

$$70) \quad v^{(n+1)}(t) = \Psi \left\{ \bar{a}^{(n)}(t) + \frac{K(t)}{m} \right\}.$$

$$\vdots$$

Berücksichtigen wir noch, daß Ψ' im Intervalle -2 bis $+2$ eine obere Grenze besitzt, so können wir unsere frühere Beweismethode unverändert beibehalten und Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis führen. Die Bewegung wird solange fortgesetzt werden können als

$$\left| \frac{K}{m} + \bar{a} \right| < 2$$

ist.

Dabei sind auch unstetige Kräfte zulässig. Sie bedingen eine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit. Nachstehende Tabelle diene dazu den Unterschied zwischen Volumen- und Flächenladung zu veranschaulichen:

| | Volumenladung | Flächenladung |
|------|--|---------------|
| K | schon durch die Vorgeschichte bestimmt | v |
| K' | v | v, v' |

Der Sinn dieser Tabelle ist folgender: Ist die entferntere Vorgeschichte gegeben, so kann man sich die Bewegung noch in Bezug auf die nächste Vorgeschichte in mannigfacher Weise abgeändert denken. Speziell kann man sich v und v' variiert denken, entweder durch direkte Unstetigkeiten, oder indem man, die entferntere Vorgeschichte konstant lassend, erst in großer Nähe von O die Kurve zu den beabsichtigten v und v' überleitet. Dabei werden denn auch K und K' variiert. Die Zusammenstellung besagt, daß bei Volumenladung K durch solche Variationen nicht zu verändern ist, K' jedoch mit v variiert, bei Flächenladung dagegen K mit v und K' mit v und v' variiert.

Die vorstehende Theorie ist weit davon entfernt erschöpfend zu sein. Eine Reihe von Fragen drängen sich auf:

- 1) Wäre es wünschenswert in ähnlicher Weise auch die nicht geradlinigen Bewegungen zu behandeln.
- 2) Wäre es wichtig zu wissen, ob der für Ueberlichtgeschwindigkeit geltende Maximalwert der Kraft auch der Maximalwert für allgemeine Bewegungen ist oder welches andere Maximum dafür gilt.
- 3) Wäre eine eingehendere Diskussion der Elektronenbewegung in der Nähe singulärer Bewegungszustände erforderlich.

- 4) Ferner kann man wünschen, die vorstehende Theorie zur numerischen Berechnung bestimmter Fälle zu verwerten, wie das im vorigen Paragraphen angedeutet wurde. Beispielsweise wäre der Fall zu behandeln, daß sich das Elektron erst unter dem Einflusse einer bestimmten Kraft auf Ueberlichtgeschwindigkeit hält und die Kraft dann nach einem gegebenen Gesetze auf Null sinkt.
- 5) Wäre zu untersuchen, ob und inwiefern man sich von den bisher gemachten Einschränkungen befreien kann: daß das Elektron früher einmal geruht haben muß und daß V_0 nicht durch C gehen darf.
- 6) Die Theorie des unter dem Einflusse einer äußern Kraft bewegten Elektrons hat ergeben, daß zu gewissen Kraftverläufen keine Bewegung existiert. Jedoch verdanken diese Absonderlichkeiten ihr Auftreten wahrscheinlich nur dem Umstande, daß wir mit der äußern Kraft ein der strengen elektromagnetischen Auffassung fremdes Element eingeführt haben. Eine vollkommenere Behandlung würde statt eines von einer äußern Kraft getriebenen Elektrons die kräftefreie Bewegung eines Systemes von beliebig vielen Elektronen untersuchen und die „äußere“ Kraft nur als mathematische Rechnungsgröße anerkennen — als Wirkung von $n-1$ Elektronen auf das n te. Bei einer solchen Betrachtung würden wohl alle scheinbaren Paradoxa verschwinden, und es würde von selbst dafür gesorgt sein, daß die sogenannte äußere Kraft jene Bedingungen nicht verletzt, die unsere unvollkommenere Behandlung ihr hat künstlich auferlegen müssen. Die Bearbeitung dieses Problems erscheint als eine lohnende Aufgabe, und in Bezug auf sie hat die vorstehende Untersuchung nur als erste Vorbereitung zu gelten.

Hamburg, den 23. April 1906.

Physik ohne Apparate: Anziehung und Abstoßung unelektrischer Körper.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Vorgelegt von Herrn Ehlers in der Sitzung am 31. März 1906.

Rechnet man zur Physik ohne Apparate solche Experimente, welche man mit den überall oder in jedem Haushalt befindlichen Hilfsmitteln anstellen kann, so gehören die nachstehend verzeichneten ihrer Mehrzahl nach auch dahin.

Während in der Luft alle Stoffe von einem elektrischen Körper angezogen werden, ist dies nicht der Fall, wenn sie auf Wasser schwimmen, wo die meisten wohl auch eine Anziehung, sehr viele aber eine Abstoßung erfahren. Um dies zu zeigen, genügt eine geriebene Siegelstange, ein mit Wasser gefüllter Teller und eine Reihe von Stoffen, die überall vorrätig sind. Da die meisten Stoffe schwerer sind als Wasser, so darf man sie im Allgemeinen nur in kleinen Stücken verwenden und muß sie behutsam fallen lassen, damit sie mit Hilfe der verdichteten Wasseroberfläche und der ihnen anhaftenden Luftschicht schwimmen und nicht untergehen. Die nachfolgende Tabelle sagt, welche Stoffe von dem elektrischen Körper (sei es Glas-, sei es Siegellackstange) abgestoßen und welche angezogen werden.

Abgestoßen:

Erbsen, ungeschälte
Linsen
Bohnen
Reis
Gerst- und Hafergrütze
Muskatblüte- und Nuß

Angezogen:

Mandeln (Schale und Kern)
Nüsse (Schale und Kern)
Kaffeebohnen
Cardemum
Buchweizengrütze
Pfeffer und Engl. Gewürz

| | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| Kolophonium | Nelken, Kümmel, Fenchel |
| Wachskitt (Koloph. und Wachs) | Brod, Zimmt, Tee |
| Schwefel | Wachs |
| Ebonit | Paraffin |
| Bernstein | Holz, Papier |
| Gummiarabikum | Kampher |
| Tischlerleim | Kautschuk, rein u. vulkanisiert |
| Glimmer | Fischblase |
| Schiefer | Woll- und Seidenzeug |
| Asbest | Pelz, Watte |
| Nähnadeln | Leder, Kork |
| Kupfer- und Silberdrähte | Hollundermark |
| Platin | Glas |
| Stanniol | Schellack |

Hierzu muß ich aber noch folgende Bemerkungen machen:

Anziehung und Abstoßung sind nicht bei allen Stoffen gleich stark d. h. die Stücke bewegen sich bei gleich stark elektrischer Stange nicht alle gleich schnell. Schwefel bewegt sich abgestoßen schneller als Kolophonium, Hollundermark angezogen schneller als Kork. Bei der Anziehung möchte ich sagen, daß sich die Stoffe im Allgemeinen um so schneller bewegen, je leichter sie sind. Längliche Metallstücke (Drähte und Streifen) bewegen sich am schnellsten, wenn man den elektrischen Körper einem ihrer Enden gegenüber hält. Bei einem Holzsplitter ist mehr das Umgekehrte der Fall. Ein Aluminium- und oft auch ein Stanniolstreifen wird angezogen, wenn die Stange auf eins der Enden, abgestoßen, wenn sie auf die der Seitenkanten wirkt. Auch ein Ebonitstreifen wird nur in letzterem Falle abgestoßen, während er sich in ersterem Falle garnicht bewegt. Ein Papierstreifen geht unter, wenn beide Seiten naß sind, bis dahin krümmt er sich und ist damit fast unbeweglich geworden. Schwer beweglich ist auch sehr dünnes Stanniol, und ganz unbeweglich scheint ein Stückchen Goldblatt zu sein.

Es dürfte noch interessieren, wie sich längliche Körper bei Anwendung zweier elektrischer Stangen verhalten. Ein Holzsplitter stellt sich bei zwei entgegengesetzt elektrischen Stangen zwar axial, aber so, daß die Mitte unter der einen Stange liegt. Eine Nähnadel stellt sich bei solchen, aber auch bei zwei gleichartig elektrischen Stangen im Allgemeinen äquatoreal, doch muß man mit diesen ein wenig mitgehen, da sie sich von beiden zu entfernen sucht.

Andere Flüssigkeiten an Stelle von Wasser kann man kaum benutzen, da fast alle Stoffe in denselben untergehen. Nur bei

Olivenöl gelingen die Versuche bei einer Reihe von Stoffen, und es scheint, daß hier alle von dem elektrischen Körper angezogen werden. Aber es ist bemerkenswert, daß sie sich demselben hier nicht völlig annähern, sondern in gewisser Entfernung Halt machen und in dieser Lage beharren.

Was die Theorie betrifft, so bedarf es für die Anziehung keiner weiteren Erklärung, wohl aber muß eine solche für die Abstoßung gegeben werden. Eine wirkliche direkte Abstoßung wäre nach bisherigen Grundsätzen überhaupt unerklärlich. Sie dürfte daher nur eine scheinbare sein, dadurch hervorgerufen, daß der elektrische Körper stärker auf die Wasserfläche als auf die schwimmenden Stoffe wirkt. Auf dieser Grundlage könnten folgende Erklärungen gegeben werden.

1. Die stärker angezogene Masse verdrängt die andere. Für die stärkere Anziehung möchten aber nicht bloß die Leitungsfähigkeit und die Dielektrizitätskonstante, sondern auch die Schwere in Betracht kommen, da die schwimmenden Stoffe voraussichtlich um so weniger angezogen werden, je tiefer sie in Wasser tauchen. Gegen diese Erklärung spricht, daß von einer kleinen Hebung der Oberfläche abgesehen, sonst keine Verschiebung der Wasserteilchen wahrzunehmen ist.

2. Der elektrische Körper erregt auf dem Wasser unter sich die entgegengesetzte Elektrizität, also dieselbe, welche er in dem ihm zugewandten Ende des schwimmenden Stoffes erzeugt. Dies könnte eine Abstoßung zur Folge haben, wenn die Anziehung zwischen ihm und dem elektrischen Körper eine schwächere ist. Hiergegen spricht, daß eine an einem Coconfaden dicht über der Wasserfläche aufgehängte Erbse nicht abgestoßen, sondern angezogen wird, was freilich die Anziehung des Coconfadens bedingen könnte. Aber auch sonst ist es fraglich, ob die auf dem Wasser erzeugte Influenzelektrizität von der Stange abwärts überhaupt eine Abstoßung äußern kann.

3. Es ist die Hebung des Wasserspiegels allein, welche eine scheinbare Abstoßung solcher Stoffe zur Folge hat, welche nur schwach angezogen werden, weil sie auf der schrägen Wasserfläche niederwärts gleiten. Bei den schwereren Stoffen geschieht dies auch um deswillen eher, weil sie tiefer im Wasser liegend schwächer angezogen werden. Die Hebung des Wasserspiegels ist freilich nur gering. Um sie festzustellen, klebte ich auf den Tellerboden mit Wachs eine kleine Glasspitze, welche die Wasserfläche eben überragte, und fand, daß sie durch die elektrische Einwirkung eben bedeckt wurde. Die Hebung kann hiernach höchstens 1 mm

betragen, was aber für die Fallbewegung auch schon genügen dürfte. Bei Olivenöl ist die Hebung viel größer. Wenn hier trotzdem alle Stoffe angezogen werden, so geschieht dies wohl wegen des größeren Unterschiedes der Leitungsfähigkeit, in Folge dessen die Stoffe ihrer ganzen Größe nach und nicht bloß, soweit sie die Flüssigkeit überragen, angezogen und deshalb stärker angezogen werden. Wegen der größeren Hebung aber, und weil die Schräge nach dem Erreger hin zunimmt, machen sie Halt, sobald der Abtrieb gleich der Anziehung wird. Bei zwei Erregern haben wir zwei Wasserberge; und längliche Stoffe, welche sonst den Erreger fliehen, stellen sich in die Richtung des Thals; die anderen stellen sich, auch bei entgesetzten Polen, unter den stärkeren, weil der zweite Wasserberg sie vorwärts treibt. Das Nadeln und Drähte sich schneller in der Längsrichtung bewegen, kann eine einfache Folge des geringeren Widerstandes sein. Daß Goldblatt ruhen bleibt, ist wohl zu verstehen, weil es mit seiner ganzen Fläche am Wasser haftend bei der Bewegung einen zu großen Widerstand finden würde.

Einzelnes spricht freilich auch gegen diese Erklärung. So werden Erbsen durch eingebaute Löcher wohl leichter, aber doch nach wie vor abgestoßen. Auch begreift man nicht, weshalb Gerst- und Hafergrütze abgestoßen, Buchweizengrütze aber angezogen wird, oder weshalb Aluminium- oder Ebonitstreifen sich so verhalten, wie angegeben ist.

Vielleicht kommt neben den genannten Faktoren auch noch die Kapillaritätskonstante in Betracht, welche in der dem Erreger zugewandten Seite der Stoffe voraussichtlich eine Aenderung erfährt.

Elektrische Versuche mit einer Tischfläche.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Vorgelegt von Herrn Ehlers in der Sitzung vom 31. März 1906.

Ich rieb eine polierte Tischfläche mit der Hand, um zu versuchen, ob man die Politurschicht wohl als Kuchen eines Elektrophors benutzen könne. Das Resultat war negativ; ich konnte dem aufgehobenen Deckel keinen Funken entlocken, sondern höchstens einem Elektroskop damit eine Ladung erteilen. Bei der Wiederholung fand ich jedoch etwas Anderes, das ich garnicht erwartet hatte. Ich sah nämlich allemal, daß das Elektroskop momentan ausschlug, so oft ich die Hand über die Tischfläche gleiten ließ, und ich sah es auch dann noch ausschlagen, als ich es ganz an das Ende des Tisches stellte. Durch jeden Handstrich wurde also so viel Elektrizität erzeugt, daß die Tischfüße diese nicht ebenso schnell auf den Fußboden übertragen konnten, so daß die Platte auf kurze Zeit elektrisch blieb und durch Influenz den fraglichen Ausschlag bewirkte.

Bei abermaliger Wiederholung berührte ich, während ich mit der rechten Hand die Tischfläche rieb, mit der linken den Knopf des Elektroskops. Ich erhielt nun einen sehr grossen und zugleich bleibenden Ausschlag von positiver Elektrizität. Ich lade seitdem mein Elektroskop immer auf diesem Wege, da man so leicht demselben ganz nach Belieben eine kleinere oder größere Ladung mitteilen kann, was auf anderem Wege viel schwerer zu erreichen ist. An dieser Ladung aber haben gleichzeitig zwei Umstände Schuld. Erstens leitet der Finger die durch Influenz abgestossene negative Elektrizität ab, zweitens überträgt er auf das Elektroskop einen Teil der positiven, die in der rechten Hand durch Reibung erregt nicht schnell genug in den Fußboden fließen kann.

Daß beide Umstände zugleich wirken, zeigte sich darin, daß das Elektroskop auch, aber schwächer geladen wurde, als ein Anderer, während ich selber rieb, seinen Knopf berührte, und auch geladen wurde, als ich es auf einen isolierten Nebentisch stellte und es mit der Linken berührte, während ich mit der Rechten die andere Tischfläche rieb.

Auch eine bleibende negative Ladung konnte ich dem Elektroskope mitteilen, wenn ich, den Fuß mit der Linken fassend, den Knopf an die unpolierte Unterseite der Platte hielt. Ich benutzte diese Methode auch, um zu sehen, wie lange letztere elektrisch blieb, indem ich in diesem Falle nicht während des Reibens, sondern eine oder einige Sekunden später beide kurz einander berühren ließ. Noch zwei Sekunden nach der Reibung nahm das Elektroskop eine schwache Ladung an.

Ich legte nun ein Papierstück auf den Tisch und auf dieses meine linke Hand, während ich mit der rechten, wie gewöhnlich, die Tischfläche rieb. Beim Aufheben zeigte sich das Papier positiv elektrisch und besonders stark, wenn ich öfter hintereinander die Tischfläche gerieben hatte. Als ich dasselbe Experiment statt des Papieres mit dem Elektrophordeckel wiederholte, konnte ich aus diesem beim Aufheben 1—2 cm lange Funken ziehen. Auch Wasser in einem Porzellanteller konnte ich auf gleiche Weise elektrisieren, so daß ein auf dem Wasser schwimmendes Hollunderkügelchen nachträglich dem Finger folgte.

Es interessierte mich noch zu erfahren, ob die durch die Tischfüße dem Boden zufließende Elektrizität wohl durch andere Tischfüße teilweise wieder aufwärts steigen würde. Ich stellte das Elektroskop auf einen zweiten Tisch, der von ersterem 1 m abstand, und ließ, während ich letzteren rieb, eine andere Person den Knopf des Instrumentes berühren. Es konnte wirklich bei jedem Handstrich ein Zucken der Goldblättchen wahrgenommen werden, das ausblieb, als ich den Nebentisch vom Boden isolierte.

Sind die Tische mit Oelfarbe gestrichen oder nur gehobelt, so sind alle Erscheinungen weniger eklatant, desgleichen wenn sie, wie Auditoriumtische, mit Gas- und Wasserleitung verbunden sind. Aber selbst dann noch können Elektroskope durch gleichzeitige Berührung des Knopfes leicht geladen werden.

Ueber die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Funktion.

Von

A. Hurwitz.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 5. Mai 1906.

Wenn man die Gauß'sche Reihe

$$(1) \quad F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l \cdot m}{1 \cdot n} x + \frac{l(l+1) \cdot m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot n(n+1)} x^2 + \dots$$

über ihren Convergenzkreis hinaus analytisch fortsetzt, so erhält man bekanntlich eine in der ganzen Ebene der complexen Veränderlichen x reguläre analytische Funktion, falls man nur diejenigen reellen Werte der Veränderlichen ausschließt, die der Bedingung $x \geq 1$ genügen. Diese Funktion will ich hier als „hypergeometrische Funktion mit den Parametern l, m, n “ bezeichnen. Für den Fall reeller Parameter hat Herr Klein¹⁾ gezeigt, wie man die Anzahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion aus den Werten der Parameter berechnen kann. Ich habe nun neuerdings gefunden, daß man auch die Anzahl ihrer imaginären Nullstellen in verhältnißmäßig einfacher Weise bestimmen kann. In den folgenden Zeilen möchte ich die Resultate, welche ich in dieser Hinsicht erhalten habe, mittheilen.

Die absoluten Beträge von $1-n$, $l-m$, $n-l-m$ bezeichne ich bez. mit λ, μ, ν , setze also

$$(2) \quad \lambda = |1-n|, \quad \mu = |l-m|, \quad \nu = |n-l-m|.$$

1) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, Math. Annalen Bd. 37, S. 573. Vgl. auch meine unter gleichem Titel erschienene Arbeit in Bd. 38 der Math. Annalen (1890), sowie L. Gegenbauer, „Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe“, Berichte der Akademie zu Wien (1891) und „Ueber die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe“, Monatshefte f. Mathematik Bd. 2.

Aus λ, μ, ν bilde ich ferner die Größen

$$(3) \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda - \mu - \nu + 1), & \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu - \nu - \lambda + 1), & \nu_1 = \frac{1}{2}(\nu - \lambda - \mu + 1), \\ & \varrho = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu + 1). \end{cases}$$

Wie in Herrn Kleins Abhandlung möge $E(r)$ die größte ganze Zahl bedeuten, die von r überschritten wird, falls r positiv ist; dagegen sei $E(r) = 0$ für jeden nicht positiven Wert von r . Hiernach wird, wenn r einen positiven nicht ganzzahligen Wert besitzt, $E(r)$ mit der größten ganzen Zahl zusammenfallen, die in r enthalten ist.

Bezüglich der Größen $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \varrho$ will ich voraussetzen, daß keine derselben eine ganze Zahl ist. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so erfahren die nachstehenden Angaben leicht festzustellende Modificationen.

Es gelten nun, je nachdem $n > 1$ oder $n < 1$ ist, die folgenden Anzahlbestimmungen.

1. Fall: $n > 1$.

Die Anzahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion beträgt

$$\begin{aligned} E(\nu_1) & \text{ im Intervall } -\infty \dots 0, \\ E(\mu_1) & \text{ im Intervall } 0 \dots 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl ihrer imaginären Nullstellen beträgt

$$\pm (E(\lambda_1) + \frac{1}{2}) - \operatorname{sgn} \lambda_1 (E(\lambda_1) + E(1 - \lambda_1)) - E(\nu_1) - E(\mu_1) - \frac{1}{2},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $E(\nu_1) + E(\mu_1) + E(1 - \lambda_1)$ gerade oder ungerade ist. Das Symbol $\operatorname{sgn} \lambda_1$ bedeutet, wie üblich, $+1$ oder -1 je nachdem λ_1 positiv oder negativ ist.

Der hier auftretende Ausdruck $\operatorname{sgn} \lambda_1 (E(\lambda_1) + E(1 - \lambda_1))$ stellt, wie man sich leicht überzeugt, die größte ganze Zahl vor, welche in λ_1 enthalten ist.

2. Fall: $n < 1$.

Die Anzahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Funktion beträgt

$$\begin{aligned} E(\nu_1) + \varepsilon & \text{ im Intervall } -\infty \dots 0, \\ E(\mu_1) + \eta & \text{ im Intervall } 0 \dots 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl ihrer imaginären Nullstellen beträgt

$$E(\varrho) - \frac{1}{2} \pm (E(\lambda_1) + \frac{1}{2}) - E(\nu_1) - \varepsilon - E(\mu_1) - \eta.$$

Hier gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem $E(1-\mu_1) + E(1-\nu_1) + E(\lambda_1) + E(\rho)$ gerade oder ungerade ist. Ferner hat ε den Wert 0 oder 1, je nachdem $E(\nu_1) + E(1-\mu_1) + E(\lambda_1) + E(\lambda)$ gerade oder ungerade, sowie η den Wert 0 oder 1, je nachdem $E(1-\nu_1) + E(\mu_1) + E(\lambda_1) + E(\lambda)$ gerade oder ungerade ist.

Die Anzahl der imaginären Nullstellen wird in jedem Falle infolge der Vorzeichenbestimmungen eine gerade Zahl, wie es sein muß, da die hypergeometrische Funktion sich selbst conjugirt ist. Die auf die reellen Nullstellen bezüglichen Angaben sind leicht der erwähnten Abhandlung von Herrn Klein zu entnehmen. Was die imaginären Nullstellen angeht, so habe ich ihre Anzahl

durch eine eigentümliche Umformung des Integrales $\frac{1}{2\pi i} \int \text{d} \lg f(x)$

bestimmt. Diese Umformung gestattet es, allgemein die Anzahl der imaginären Nullstellen einer beliebigen Lösung einer regulären Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche lauter reelle Fundamentallösungen besitzt, auf die Anzahlen der reellen Nullstellen der letzteren zurückzuführen. In dem speziellen Falle der hypergeometrischen Differentialgleichung ergeben sich so unter anderem die oben mitgeteilten Resultate. Eine nähere Begründung der letzteren behalte ich mir für eine ausführlichere Arbeit vor, in welcher ich auch einen neuen, sehr einfachen Beweis für die auf die reellen Nullstellen bezüglichen Sätze mitzuteilen beabsichtige.

Zürich, 24. März 1906.

Calorimetrische Studien. I.

Von

Emil Bose.

**Spezifische Wärmebestimmungen an reinen Alkoholen,
sowie Gemischen von Wasser und Alkoholen und von
Alkoholen unter einander, nach Versuchen von E. Bose
und A. Müller.**

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 16. Juni 1906.

Bekanntlich besteht zwischen Mischungswärmen und spezifischen Wärmen ein thermodynamischer Zusammenhang derart, daß die Differenz der Wärmekapazitäten der ungemischten und gemischten Substanzen gleich ist der Aenderung der beim Mischen stattfindenden Wärmetönung mit der Temperatur.

Bisher ist weder dieser Zusammenhang noch die von Nernst abgeleitete Gleichung, welche den Zusammenhang angibt zwischen dem Werte der Mischungswärme und den Dampfspannungen der Komponenten über den ungemischten Substanzen und über der Mischung, einer eingehenden Prüfung unterzogen worden. Die hiermit in ihrem ersten Teile vorliegenden calorimetrischen Studien stellen sich die Aufgabe, an möglichst geeignet gewählten Beispielen diese Lücke auszufüllen, soweit das durch calorimetrische Messungen möglich ist. Bei der Wahl der Substanzen mußte erstlich darauf gesehen werden, daß die Wärmekapazität der Gemische möglichst verschieden von der der Komponenten vor der Mischung sei, oder, was dasselbe besagt, daß der Verlauf der Kurve der spezifischen Wärmen der Gemische möglichst von der geraden Verbindungslinie zwischen den Werten der reinen Komponenten abweiche. Nur bei solchen Gemischen war ja eine erhebliche Abhängigkeit der Mischungswärme von der Temperatur vorauszusehen. Schon die wenigen Angaben über spezifische Wärmen von wasser-

haltigen Alkoholen, die bisher vorliegen (Vergl. Landolt und Börnstein, 3. Aufl., wo auch Literatur zusammengestellt ist) ließen in dieser Hinsicht interessante Verhältnisse bei den Wasser-alkoholgemischen voraussehen. Andererseits standen auch Partialdruckmessungen, soweit sich im voraus übersehen ließ, keine prinzipiellen Schwierigkeiten entgegen, sodaß auch in dieser Hinsicht die Gemenge von Wasser mit den niedrigsten Alkoholen günstige Objekte für ein eingehenderes Studium nach den erwähnten Richtungen zu sein schienen. Im vorliegenden ersten Teile meiner Studien seien zunächst die spezifischen Wärmebestimmungen gebracht, ein zweiter Teil wird alsdann die gleichfalls schon abgeschlossenen Versuche über Mischungswärmen enthalten; im Anschluß an diese beiden Teile kann dann das Beobachtungsmaterial bezüglich der Beziehung zwischen spezifischen und Mischungswärmen diskutiert werden. Herr stud. Adolf Müller aus Bremen, der einen großen Teil der spezifischen Wärmebestimmungen nach der von mir ausgearbeiteten Methode ausgeführt hat, ist zur Zeit damit beschäftigt, die Dampfdrucke, speziell die Partialdrucke von Alkohol und Wasser über den Gemischen zu bestimmen und wird späterhin seine Resultate im Anschluß an die vorliegenden Untersuchungen zur Prüfung der Nernstschen Beziehung verwerten.

1. Methode der spezifischen Wärmebestimmungen.

Die Methode, nach welcher die Bestimmungen der spezifischen Wärme ausgeführt wurden, war eine Modifikation der bekannten elektrischen Methode¹⁾. Die Abänderungen bezweckten in erster Linie die Ausführung der Messung möglichst bequem zu gestalten und die Bestimmungen bei beliebigen Temperaturen (also nicht nur in der Gegend von Zimmertemperatur) vornehmen zu können. Deshalb befand sich das eigentliche Calorimeter in einer fast völlig geschlossenen Hülle, welche mit Hilfe einer Wassercirkulation während der kurzen Versuchsdauer auf beliebiger konstanter Temperatur gehalten werden konnte. Diesen Wassermantel sieht man in den Figuren 1 und 2 dargestellt. Er bestand aus drei einzelnen von Wasser durchflossenen Teilen, nämlich erstens dem doppelwandigen Cylindergefäß, welches den Boden und die Seiten des eigentlichen Calorimeters umgibt, und das mit einer seitlichen Zuführungsröhre versehen ist, welche gleichzeitig zur Temperaturmessung des Circulationswassers dient; ferner aber aus dem zweiteiligen auseinanderklappbaren Deckel, dessen beide Hälften sich um den

1) S. Pfaundler, Wiener Ber., 1891, 352, sowie Kohlrausch, prakt. Physik.

oberen Teil des Zuführungsrohres für das Mantelgefäß drehen konnten. Die Schlauchverbindungen waren genügend lang, daß

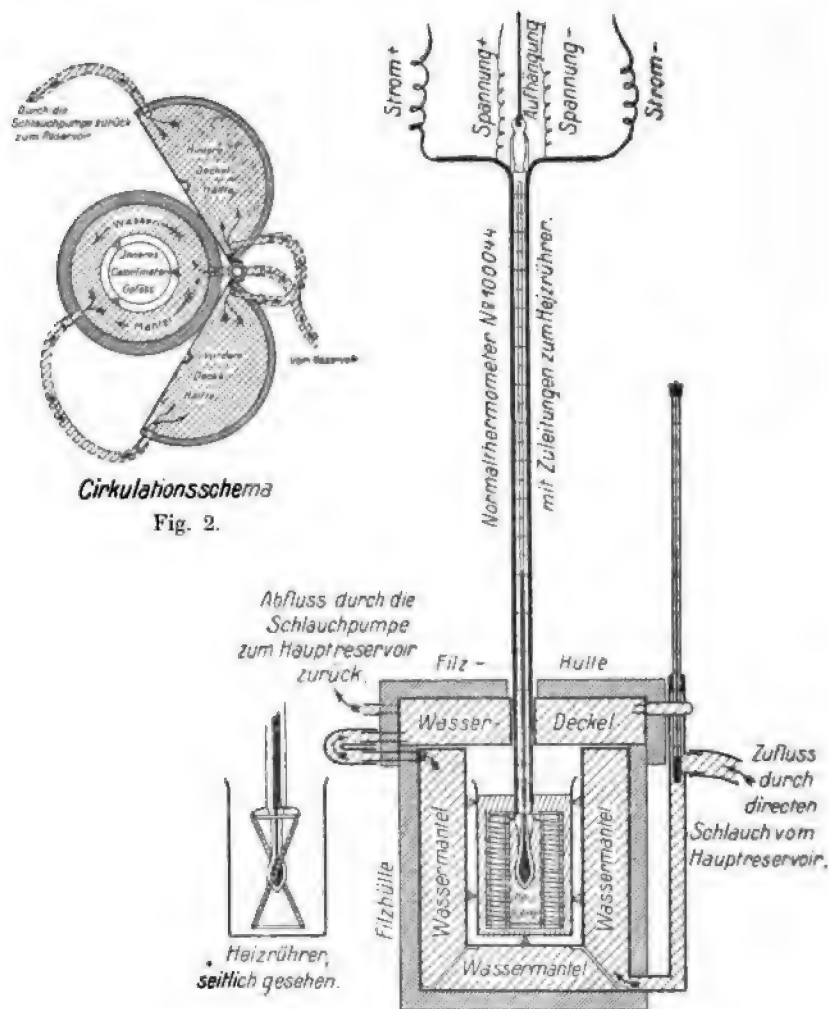


Fig. 1.

während des ungestörten Ganges der Cirkulation das innere Calorimeter bequem herausgenommen und wieder an seine Stelle gebracht werden konnte. Die Wassercirkulation wurde durch eine Prytzsche Schlauchpumpe¹⁾ betrieben, welche das Wasser aus einem großen Vorratsgefäß durch die drei Teile der Wärmeschutz-einrichtung hindurch ansaugte und es dann in das Vorratsreservoir

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1904.

zurücktrieb. Figur 2 zeigt genau den Verlauf der Cirkulation. Die Prytzsche Schlauchpumpe hat sich auch hier und bei anderen Anordnungen, die bei nächster Gelegenheit beschrieben werden sollen, als ein überaus nützlicher und vielseitig verwendbarer Apparat gezeigt, der für ähnliche Zwecke nur bestens empfohlen zu werden verdient. Bei den bei Zimmertemperatur ausgeführten Versuchen ruhte die Cirkulation des Wassers, desgleichen wurde bei den Versuchen von Null Grad ein etwas abweichendes Verfahren eingeschlagen.

Um möglichst wenig Zugänge zu dem eigentlichen Calorimeter nötig zu haben, wurden Thermometer, Rührer und Heizvorrichtung zu einem Ganzen vereinigt, und es entstand so der thermometrische Heizrührer, welcher in Figur 1 deutlich in seinen Einzelheiten erkennbar ist. Ein geaichtes Normalthermometer, das in $\frac{1}{10}$ Grade geteilt war, erhielt als Stromzuführungen zwei Kupferblechstreifen, welche seiner ganzen Länge nach daran herunter bis in das eigentliche Calorimeter führten und hier den aus einem Glasgerüst und Konstantandrähten bestehenden Heizrührer trugen. Dieser konnte bei der Ausführung der Messungen vermittels der linken Hand des Beobachters in gleichmäßige Hin- und Herbewegung um die Thermometeraxe versetzt werden, während die rechte Hand die Voigtsche Thermometerlupe hielt und die Beobachtungen notierte. Was die eigentliche Ausführung der Messungen betrifft, so ist diesbezüglich folgendes zu bemerken. Um den nicht völlig zu vernachlässigenden Einfluß der Zuleitungen, sowie den das Spannungsmeißinstrument passierenden Strom in ihrem störenden Einfluß auf die Messungen zu eliminieren, wurde derart verfahren, daß von den Angaben der beiden Meßinstrumente die eine, in unserem Falle die des Voltmeters (Präzisionsinstrument von Siemens und Halske), als richtig angesehen wurde, und daß nun durch Aichversuche mit reinem Wasser eine Tabelle für das zweite Meßinstrument, also in unserem speziellen Falle für das Ampèremeter aufgestellt wurde, welche in dem benutzten Skalenbereich für jede Ablesung dieses Instrumentes diejenige Zahl von Ampère angab, welche, mit der gleichzeitigen Angabe des Voltmeters multipliziert, den augenblicklichen wahren Wattverbrauch des Calorimeters ergab. Auf diese Weise ist die ganze Meßvorrichtung gewissermaßen mit reinem Wasser geaicht, ein Verfahren, das natürlich für jedes verwandte Temperaturbereich wiederholt wurde. Die Beziehung zwischen der Angabe des Strommessers und der an ihrer Stelle in Rechnung zu setzenden Ampèrezahl wurde in der Regel mit

Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate zu einer Gleichung zusammengefaßt, welche dann bei jedem Versuch zur Ermittlung der einzusetzenden Stromstärke diente. Zu Zeitmessungen diente ein Chronoskop, das häufiger auf die Richtigkeit seiner Angaben kontrolliert wurde.

Die auf der nächsten Seite folgende Tabelle gibt eine Reihe von solchen Eichversuchen und deren Verwertung zur Berechnung der Formel für die korrigierten Ampèremeterangaben. Daß die am Strommeßinstrument abgelesenen Zahlen und die zugehörigen Ampèrewerte so sehr verschieden sind, beruht einfach darauf, daß das Instrument einen willkürlichen nicht abgeglichenen Nebenschluß trug und also überhaupt nicht direkte Ampèreablesungen ergab. Die ganze Schaltungsanordnung ist in Figur 3

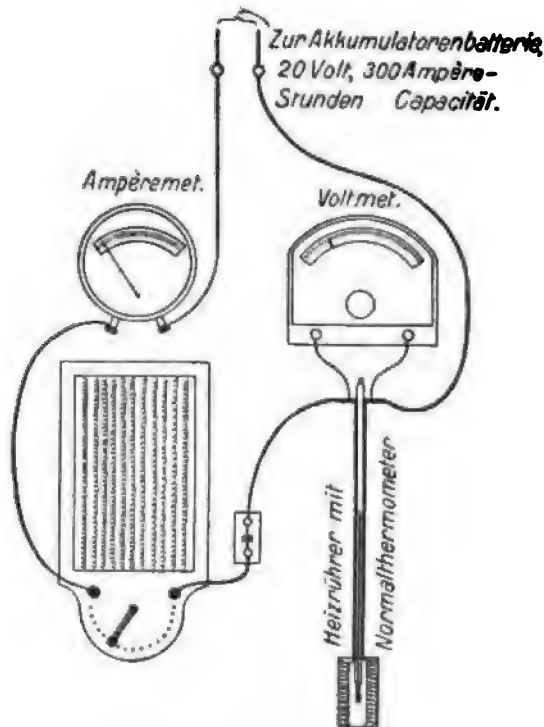


Fig. 3.

skizziert. Die Benutzung verschiedener Stromstärken hatte namentlich den Zweck bei stark verschiedenen Wärmekapazitäten der Calorimeterfüllung nicht allzuverschiedene Versuchsdauern zu ergeben. Es wurde natürlich streng darauf geachtet, daß für die eigentlichen Messungen nur das Bereich von Stromstärken benutzt

wurde, für welches die Aichversuche angestellt waren, sodaß also jede Extrapolation mittels der Aichgleichung vermieden wurde. Die Aichtabelle giebt auch zugleich einen Anhalt betreffs der Genauigkeit der Versuche, es wurde in 18 Versuchen nur zweimal ein Fehler von ein wenig über $\frac{1}{2}\%$ begangen.

Tabelle 1.

Aichversuche mit Wasser nahe bei 0°.

| No. | Wasserwert von Calorimeter etc. Rührer u. Wasser | Korrigierte Anfangstemperatur | Korrigierte Endtemperatur | Temperaturanstieg | Zeit des Stromdurchgangs | Mittlere Spannung am Rührer in Volt | Mittlere Ablesung am Dosengalvanometer | Entsprechende Anzahl Ampère aus dem Versuch | Ampères berechnet nach der ausge- glichenen Formel | Differenz der bei- den Ampèrewerte |
|---------------------------|--|----------------------------------|------------------------------|-------------------|-----------------------------|--|--|---|--|---------------------------------------|
| 78 | 368,25 | + 2,61 | + 6,97 | + 4,36 | 179,9 | 8,096 | 6,455 | 4,612 | 4,608 | + 0,009 |
| 79 | 368,6 | 3,24 | 7,71 | 4,47 | 179,9 | 8,204 | 6,541 | 4,671 | 4,660 | + 0,011 |
| 80 | 373,1 | 3,21 | 8,86 | 5,65 | 179,9 | 9,272 | 7,401 | 5,288 | 5,262 | + 0,026 |
| 81 | 365,5 | 2,38 | 8,36 | 5,98 | 183,1 | 9,338 | 7,494 | 5,349 | 5,330 | + 0,019 |
| 82 | 385,9 | 2,23 | 7,75 | 5,52 | 180,1 | 9,318 | 7,483 | 5,311 | 5,322 | — 0,011 |
| 83 | 372,4 | 2,71 | 8,49 | 5,78 | 182,6 | 9,303 | 7,478 | 5,302 | 5,318 | — 0,016 |
| 84 | 381,8 | 1,87 | 6,67 | 5,80 | 180,0 | 9,062 | 7,287 | 5,191 | 5,180 | + 0,011 |
| 85 | 390,2 | 0,99 | 7,54 | 6,55 | 360,0 | 7,176 | 5,702 | 4,140 | 4,121 | + 0,019 |
| 86 | 408,8 | 0,79 | 6,98 | 6,19 | 360,0 | 7,163 | 5,695 | 4,106 | 4,117 | — 0,011 |
| 87 | 379,9 | 1,03 | 7,65 | 6,62 | 360,2 | 7,145 | 5,688 | 4,089 | 4,112 | — 0,023 |
| 88 | 406,2 | 0,80 | 7,43 | 6,63 | 359,8 | 7,403 | 5,845 | 4,230 | 4,210 | + 0,020 |
| 89 | 397,2 | 0,90 | 9,32 | 8,42 | 360,2 | 8,260 | 6,606 | 4,708 | 4,704 | — 0,004 |
| 90 | 401,7 | 0,61 | 4,75 | 4,14 | 180,0 | 5,238 | 6,599 | 4,693 | 4,700 | — 0,007 |
| 91 | 397,7 | 0,58 | 4,75 | 4,17 | 180,0 | 8,218 | 6,585 | 4,691 | 4,690 | + 0,001 |
| 92 | 398,0 | 0,98 | 6,06 | 5,08 | 180,0 | 9,099 | 7,299 | 5,165 | 5,188 | — 0,023 |
| 93 | 397,4 | 0,80 | 5,82 | 5,02 | 180,0 | 8,990 | 7,224 | 5,168 | 5,134 | + 0,034 |
| 94 | 401,8 | 0,90 | 5,79 | 4,89 | 180,0 | 8,978 | 7,203 | 5,088 | 5,119 | — 0,031 |
| 95 | 398,8 | 1,60 | 5,50 | 3,90 | 179,8 | 7,971 | 6,383 | 4,541 | 4,555 | — 0,014 |
| $\Sigma \Delta = + 0,003$ | | | | | | | | | | |

Aus den Versuchen folgt durch Ausgleichsrechnung die Aichgleichung:

$$y = 1,69508 + 0,235711x + 0,033276x^2,$$

gültig zwischen $x = 5,6$ bis $x = 7,5$.

Der mittlere Fehler einer einzelnen Messung beträgt hier 0,017, ist also sicher kleiner als $\frac{1}{2}\%$.

2. Spezifische Wärmebestimmungen an reinen Alkoholen.

a. Aethylalkohol.

Messungen über die spezifische Wärme reinen Aethylalkohols liegen in großer Zahl vor. Stellt man die Resultate derselben zusammen, so bemerkt man zunächst, daß sich jedenfalls in dem bisher untersuchten Gebiete von -20 bis $+80$ Grad die spezifische Wärme des Aethylalkohols sehr nahe geradlinig mit der Tempe-

ratur ändert. Dies ermöglicht es, die verschiedenen Bestimmungen übersichtlich in ein Diagramm zusammenzufassen, indem man jede einzelne Bestimmung unter der Mitteltemperatur des untersuchten Intervalles einträgt. Auf diese Weise ist Figur 4 gewonnen

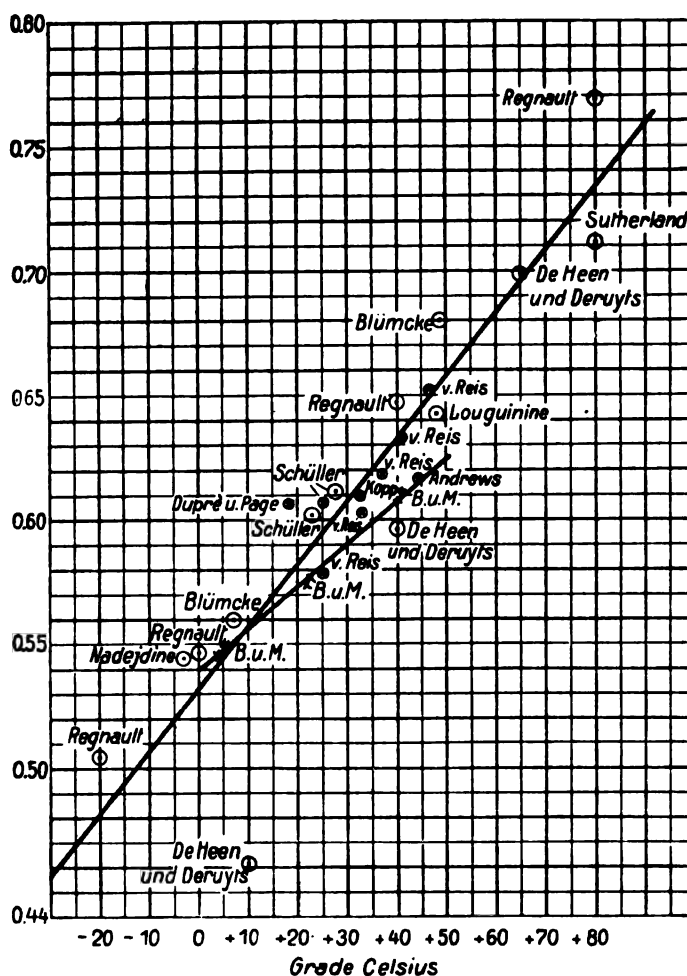


Fig. 4.

worden. Zunächst geht die geradlinige Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur daraus zur Evidenz hervor. Im übrigen aber gehen die Werte bei nahe gleichen Temperaturen oft um viele Prozente auseinander.

Tabelle 2.

Spezifische Wärme des Aethylalkohols. (Ältere Bestimmungen.)

| Temperatur | Spezifische Wärme | Beobachter. | Temperatur | Spezifische Wärme | Beobachter. |
|------------|-------------------|------------------------------------|------------|-------------------|-----------------------------|
| — 20° | 0,505 | Regnault ¹⁾ . | (+ 37,7°) | (0,6193) | v. Reis. |
| — 2,5° | 0,545 | Nadejdine ²⁾ . | + 40° | 0,597 | De Heen u. Deruyts. |
| 0 | 0,547 | Regnault. | + 40° | 0,648 | Regnault. |
| + 7,5° | 0,560 | Blümcke ³⁾ . | (+ 40,4°) | (0,6330) | v. Reis. |
| + 10° | 0,462 | De Heen u. Deruyts ⁴⁾ . | (+ 45°) | (0,617) | Andrews ⁵⁾ . |
| (+ 18,5°) | (0,658) | Dupré u. Page ⁶⁾ . | (+ 47,0°) | (0,6519) | v. Reis. |
| + 23° | 0,602 | Schüller ⁷⁾ . | + 48° | 0,643 | Louguinine ¹⁰⁾ . |
| (+ 25,4°) | (0,5788) | v. Reis ⁷⁾ . | + 49° | 0,680 | Blümcke. |
| (+ 25,5°) | (0,607) | Schüller. | + 65° | 0,699 | De Heen u. Deruyts. |
| + 28,2° | 0,612 | " | + 80° | 0,712 | Sutherland ¹¹⁾ . |
| (+ 33°) | (0,615) | Kopp ⁸⁾ . | + 80° | 0,769 | Regnault. |
| (+ 33,2°) | (0,6037) | v. Reis. | | | |

Legt man den in der Figur 3 mit \odot bezeichneten und in Tabelle 2 zahlenmäßig ohne Klammer ¹²⁾ angegebenen Werten gleiches Gewicht bei und faßt sie durch Ausgleichsrechnung in eine lineare Gleichung zusammen, so ergibt sich, daß für Aethylalkohol nach den älteren Bestimmungen

$$c_s = 0,5323 + 0,002518t$$

ist. Gegen diese Art der Zusammenfassung läßt sich meines Erachtens nur einwenden, daß aller Wahrscheinlichkeit nach der de Heen und Deruyts'sche Wert für +10 Grad wohl zweifellos unrichtig sein muß, und daß andererseits den Regnault'schen Werten vielleicht ein höheres Gewicht beigelegt werden müsse. Dagegen habe ich nur zu erwidern, daß im allgemeinen für die spezifische Wärme der Alkohole nur zu leicht zu hohe Werte gefunden werden können, da schon ein geringer Wassergehalt die Werte beträchtlich erhöht. Es verdienen demnach im allgemeinen die niedrigeren Werte mehr Vertrauen als die höheren. Aus diesem Grunde glaubte ich einerseits den Regnault'schen Bestimmungen nicht höheres Gewicht beilegen zu sollen, andererseits aber auch den recht stark aus der Reihe fallenden Wert von De Heen und

1) Mém. de l'Acad. 26, 262 (1862).

2) J. d. russ. phys.-chem. Ges. 16, 222 (1884); Exner, Repert. 20, 446 (1884).

3) Wied. Ann. 25, 154 (1885).

4) Bull. de Belg. (3) 15, 168 (1888).

5) Phil. Trans. London 159, 1, 591 (1869); Pogg. Ann. Erg. 5, 221 (1871).

6) Pogg. Ann. Erg. 5, 116, 192 (1871).

7) Wied. Ann. 13, 447 (1881).

8) Pogg. Ann. 75, 98 (1848).

9) Quart. J. of the Chemical Soc. of London (1848); Pogg. Ann. 75, 501 (1848).

10) Ann. chim. phys. (7) 13, 289 (1898).

11) Phil. Mag. (5) 26, 293 (1888).

12) Vgl. folgende Seite Zeile 5—8.

Deruyts nicht ausschließen zu sollen. Im Grunde kommt ja auch wenig darauf an, da die ganze Zusammenfassung nur den Wert beanspruchen kann, das ältere Beobachtungsmaterial zu einem einigermaßen wahrscheinlichen Werte zu vereinigen.

Uebrigens habe ich späterhin noch eine Reihe anderer Angaben aufgefunden, die in der Figur 3 mit \oplus bezeichnet und in der Tabelle 2 eingeklammert angegeben sind, welche das Bild kaum wesentlich ändern.

Die vom Verfasser, sowie unter dessen Anleitung von Herrn A. Müller mit großer Sauberkeit ausgeführten Versuche beziehen sich auf drei Temperaturintervalle und ergeben ebenfalls eine sehr nahe geradlinige Abhängigkeit von der Temperatur in dem untersuchten Gebiete. Die einzelnen Versuche sind in Tabelle 3 zusammengestellt und lassen sich in vorzüglicher Weise durch eine lineare Gleichung darstellen, wobei der mittlere Fehler eines Einzelversuches sogar noch etwas kleiner ausfällt als bei den Aichversuchen mit Wasser. Diesem erfreulichen Resultate, hier und beim Propylalkohol, stehen dagegen bei den später mitzuteilenden Versuchen an Mischungen leider des öfteren Fälle gegenüber, wo zwischen Versuchen bei demselben Prozentgehalt oft erheblich größere Abweichungen gefunden wurden.

Tabelle 3.

Spezifische Wärme des Aethylalkohols bei verschiedenen Temperaturen. (Eigene Beobachtungen.)

| Numer des Versuches | Ins Calorimeter eingewogene Menge Alkohol | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- suche | Spezifische Wärme aus der Messung | Spezifische Wärme aus der Gleichung berechnet | Differenz beider, Δ |
|------------------------|---|---|--|--|---|---|--------------------------------------|---|----------------------------|
| 159 | 304,9 | 8,285 | 4,696 | 180,0 | 9,11 | 5,65 | 0,5501 | 0,5492 | + 0,0009 |
| 160 | 302,7 | 7,262 | 4,174 | 179,8 | 7,13 | 5,07 | 0,5506 | 0,5482 | + 0,0024 |
| 161 | 316,4 | 7,116 | 4,078 | 179,8 | 6,60 | 4,76 | 0,5465 | 0,5477 | — 0,0012 |
| 7 | 279,8 | 7,506 | 4,196 | 149,8 | 6,37 | 22,09 | 0,5754 | 0,5761 | — 0,0007 |
| 16 | 290,9 | 9,267 | 5,152 | 120,0 | 7,44 | 23,12 | 0,5773 | 0,5789 | — 0,0016 |
| 138 | 285,6 | 7,243 | 4,061 | 180,2 | 6,64 | 41,71 | 0,6119 | 0,6104 | + 0,0015 |
| 139 | 295,7 | 7,248 | 4,059 | 180,1 | 6,44 | 41,88 | 0,6121 | 0,6107 | + 0,0014 |
| 140 | 293,3 | 7,222 | 4,044 | 180,6 | 6,49 | 40,52 | 0,6077 | 0,6084 | — 0,0007 |

Die Resultate lassen sich in die lineare Gleichung zusammenfassen:

$$c_t = 0,5396 + 0,001698 t.$$

Mittlerer Fehler des Einzelversuchs: 0,0015.

b. Propylalkohol.

Zunächst sei hervorgehoben, daß unter der Bezeichnung Propylalkohol in der vorliegenden Veröffentlichung stets der normale Propylalkohol, also n-Propylalkohol und niemals Isopropylalkohol zu verstehen ist. Von Bestimmungen der spezifischen Wärme dieser Substanz liegen nur vier vor, aus denen a priori nicht viel über den Verlauf der spezifischen Wärme als Funktion der Temperatur zu schließen ist. Es fanden nämlich:

| | | | | | |
|--------------------------|----------|------|-----|-----------|-----------|
| Nadejdine ¹⁾ | zwischen | – 20 | und | + 12 Grad | 0,5186 |
| Pagliani ²⁾ | " | + 21 | " | + 23 | " 0,659 |
| Louguinine ³⁾ | " | + 21 | " | + 90 | " 0,675 |
| v. Reis ⁴⁾ | " | 16,5 | " | 42,2 | " 0,5882 |
| " | " | 20,6 | " | 53,4 | " 0,6113 |
| " | " | 20,4 | " | 65,2 | " 0,6296 |
| " | " | 19,5 | " | 78,5 | " 0,6481 |
| " | " | 20,7 | " | 90,8 | " 0,6677. |

Aus unseren Versuchen scheint unzweifelhaft hervorzugehen, daß der Wert von Pagliani ganz erheblich zu hoch ist. Die von uns gefundenen Werte sind erheblich niedriger als diejenigen von Pagliani und Louguinine, auch kleiner als die Zahlen von v. Reis, stimmen dagegen vorzüglich mit dem Werte Nadejdines, da sich für dessen Mitteltemperatur aus unserer Formel 0,5211 berechnet. Vergl. auch die Darstellung in Figur 5 (S. 288).

Im übrigen besteht nach unseren Resultaten auch beim Propylalkohol zweifellos ein proportionales Ansteigen der spezifischen Wärme mit der Temperatur. Die folgende Tabelle giebt eine Uebersicht über unsere Versuche und deren Ergebnisse und über die Genauigkeit, mit welcher der geradlinige Verlauf der spezifischen Wärme für das untersuchte Temperaturintervall erfüllt zu sein scheint.

1) J. d. russ. phys.-chem. Ges. 16, 222 (1884); Exner, Repert. 20, 446 (1884).

2) Cim. (3) 11, 229 (1882).

3) Ann. chim. phys. (7) 13, 289 (1898).

4) Wied. Ann. 13, 447 (1881).

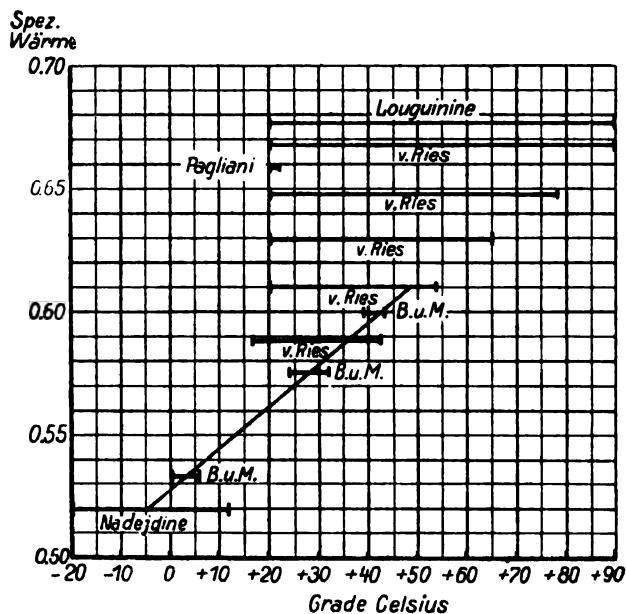


Fig. 5.

Tabelle 4.

Spezifische Wärme des Propylalkohols bei verschiedenen Temperaturen. (Eigene Beobachtungen.)

| Nummer des Versuches | Ins Calorimeter eingewogene Menge Propylalkohol | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Spezifische Wärme aus der Messung | Spezifische Wärme aus der Gleichung berechnet | Differenz beider, Δ |
|-------------------------|---|---|--|--|--|--|--------------------------------------|---|----------------------------|
| 133 | 291,3 | 7,211 | 4,112 | 149,9 | 6,20 | 3,52 | 0,5332 | 0,5338 | — 0,0006 |
| 134 | 297,3 | 7,161 | 4,104 | 150,3 | 6,07 | 3,10 | 0,5312 | 0,5331 | — 0,0019 |
| 135 | 298,5 | 7,096 | 4,110 | 151,4 | 6,01 | 3,14 | 0,5346 | 0,5332 | + 0,0014 |
| 45 | 288,1 | 8,107 | 4,544 | 180,0 | 8,58 | 27,66 | 0,5754 | 0,5747 | + 0,0007 |
| 46 | 289,3 | 7,230 | 4,020 | 180,0 | 6,85 | 27,32 | 0,5755 | 0,5741 | + 0,0014 |
| 151 | 301,4 | 7,148 | 3,946 | 179,9 | 6,20 | 40,26 | 0,5959 | 0,5960 | — 0,0001 |
| 152 | 306,0 | 7,154 | 3,944 | 179,8 | 6,09 | 41,91 | 0,5983 | 0,5988 | — 0,0005 |
| 153 | 299,0 | 6,542 | 3,605 | 180,0 | 5,18 | 44,23 | 0,6015 | 0,6027 | — 0,0012 |

Durch Ausgleichsrechnung ergibt sich die Gleichung:

$$c_p = 0,5279 + 0,001692 t.$$

Mittlerer Fehler des Einzelversuchs: 0,0012.

Vergleicht man die Werte der spezifischen Wärme beim Aethyl- und Propylalkohol mit einander, so zeigt sich, daß bei gleichen Temperaturen die spezifische Wärme des letzteren stets etwas mehr als zwei Prozent kleiner ist als die des ersteren. Auffallend ist aber besonders, in welchem Grade die Temperaturkoeffizienten der spezifischen Wärme bei den beiden Stoffen übereinstimmen. Dagegen zeigt der nächst niedrigere Repräsentant der Reihe der Alkohole, der Methylalkol, schon ein erheblich komplizierteres Verhalten. Die Kurve der spezifischen Wärme verläuft durchaus nicht geradlinig. Es ist eine bekannte Erscheinung, für die sich die mannigfaltigsten Beispiele anführen lassen, daß die ersten Glieder homologer Reihen organischer Verbindungen ganz erheblich abweichende Eigenschaften zeigen; dies zeigt sich also auch hier wieder bestätigt, da Wasser und Methylalkohol völlig von den nächst höheren Gliedern Aethyl- und Propylalkohol abweichen.

c. Methylalkohol.

Von älteren Bestimmungen der spezifischen Wärme des reinen Methylalkohols liegen mir folgende Werte vor; es findet

| | | |
|------------------------|----------------------------|--------|
| Regnault ¹⁾ | zwischen + 5 und + 10 Grad | 0,5901 |
| " | " 10 " 15 " | 0,5868 |
| " | " 15 " 20 " | 0,6009 |
| Lecher ²⁾ | " 5 " 13 " | 0,624 |
| Kopp ³⁾ | " 23 " 43 " | 0,645 |
| Dupré ⁴⁾ | " 18 " 60 " | 0,583 |
| v. Reis ⁵⁾ | " 15,5 " 34,9 " | 0,6187 |
| " | " 19,6 " 45,0 " | 0,6308 |
| " | " 18,1 " 50,3 " | 0,6400 |
| " | " 20,5 " 62,3 " | 0,6583 |
| Andrews ⁶⁾ | " 12 " 60 " | 0,613. |

In der folgenden Tabelle sind die von uns gefundenen Werte zusammengestellt und es scheint uns danach zweifellos, daß die von Lecher und von Kopp angegebenen Werte bei weitem zu hoch sind, während die Regnaultschen Werte sich gut um die

1) Ann. de chim. (3) 1, 129 (1841).

2) Wien. Ber. 76, (2) 937 (1877).

3) Pogg. Ann. 75, 98 (1848).

4) Proc. Roy. Soc. 20, 336 (1872); Pogg. Ann. 118.

5) Wied. Ann. 13, 447 (1881).

6) Quart. J. of the Chem. Soc. of London 1848; Pogg. Ann. 75, 501 (1848).

unsrigen gruppieren (Vergl. Tabelle 5). Es gilt auch hier wie bei den anderen Alkoholen, daß die Substanzen vorwiegend nur mit solchen Verunreinigungen auftreten, welche die spezifische Wärme erheblich zu hoch ausfallen lassen; so daß im allgemeinen die niedrigsten Werte bei gegebener Temperatur die größte Wahrscheinlichkeit für sich haben. Auf den Verlauf der spezifischen Wärme in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur lassen sich aus den alten Versuchen keinerlei Schlüsse ziehen. Die von uns für drei verschiedene Temperaturbereiche gefundenen Werte sind neben den älteren Zahlwerten als Mittelwerte in die Skizze Figur 6 eingezeichnet und im einzelnen in Tabelle 5 zusammen-

Spez.
Wärme

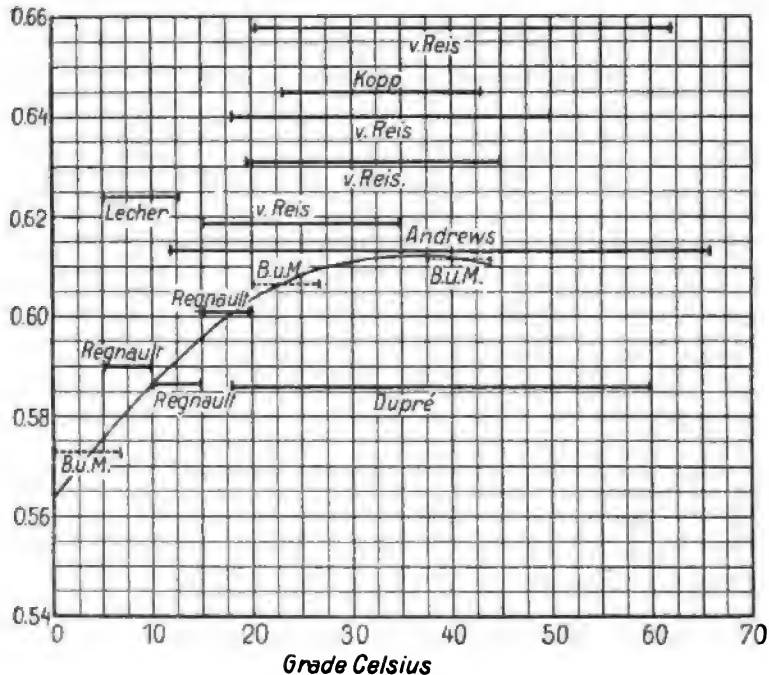


Fig. 6.

gestellt. Die geradlinige Abhängigkeit von der Temperatur ist hier völlig verschwunden, vielmehr scheint der Verlauf im weiteren ein ausgeprägtes Maximum zeigen zu wollen. Ueber eigenartige Erscheinungen, welche dieser Verlauf der spezifischen Wärme bei den Mischungswärmen bedingt, wird späterhin in einem anderen Teile dieser Untersuchungen zu berichten sein.

Tabelle 5.

Spezifische Wärme des Methylalkohols als Funktion der Temperatur. (Eigene Beobachtungen.)

| Numer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Methylalkohol | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Spezifische Wärme aus der Messung | Spezifische Wärme aus der Gleichung berechnet | Differenz beider, Δ |
|-----------------------|---|---|--|--|--|--|--------------------------------------|---|----------------------------------|
| 129 | 293,2 | 7,203 | 4,160 | 180,0 | 6,84 | 3,64 | 0,5727 | 0,5728 | — 0,0001 |
| 131 | 285,0 | 7,210 | 4,114 | 149,8 | 5,91 | 4,05 | 0,5742 | 0,5738 | + 0,0004 |
| 132 | 289,0 | 7,206 | 4,103 | 149,7 | 5,84 | 3,20 | 0,5714 | 0,5717 | — 0,0003 |
| 24 | 288,1 | 7,308 | 4,080 | 180,0 | 6,74 | 23,39 | 0,6050 | 0,6064 | — 0,0014 |
| 25 | 291,1 | 7,305 | 4,078 | 180,0 | 6,60 | 23,46 | 0,6081 | 0,6065 | + 0,0016 |
| 172 | 272,2 | 6,311 | 3,573 | 180,4 | 5,33 | 41,51 | 0,6112 | 0,6114 | — 0,0002 |
| 173 | 274,6 | 6,974 | 3,903 | 180,1 | 6,37 | 40,52 | 0,6115 | 0,6117 | — 0,0002 |
| 174 | 281,8 | 7,022 | 3,900 | 179,7 | 6,24 | 39,93 | 0,6120 | 0,6119 | + 0,0001 |
| | | | | | Reg- nault | 7,5 12,5 17,5 | 0,5901 0,5868 0,6009 | 0,5816 0,5915 0,5994 | + 0,0095 — 0,0047 + 0,0015 |

Ich fasse die Beobachtungen zusammen in die Gleichung:

$$c_t = 0,5634 + 0,002715 t - 0,0000376 t^2.$$

Der mittlere Fehler fällt bei den Methylversuchen im ganzen noch erheblich kleiner aus als bei den beiden anderen Alkoholen. Ich messe dem Umstande aber keine Bedeutung bei und möchte vielmehr der Ueberzeugung Ausdruck geben, daß hier eher etwas größere einseitige Fehler anzunehmen sind, die in der ausgeglichenen Formel, zumal diese notgedrungen dreikonstantig gewählt werden mußte, nicht zum Vorschein kommen können. Der Grund zu dieser Annahme wird späterhin bei der zusammenfassenden Diskussion mit den Resultaten der Mischversuche zu Tage treten. Im ganzen aber glaube ich weder unvorsichtig noch unbescheiden zu sein, wenn ich annehme, daß die durch die drei zusammenfassenden Formeln für die spezifischen Wärmen der drei untersuchten Alkohole gegebenen Werte in keinem Falle mit mehr als $\frac{1}{2}$ Prozent Fehler behaftet sein können; höchstens möchte ich den Werten für Methylalkohol bei höheren Temperaturen etwas größere Fehlermöglichkeit offenhalten, da wegen der Flüchtigkeit dieser Substanz zumal ziemlich in der Nähe des Siedepunktes die Schwierigkeiten dort erheblich größer sich gestalten. Ich kann im übrigen nur nochmals betonen, daß ich meine eigenen Werte

eher immer noch für etwas zu hoch als für zu niedrig ansehe, wofür ebenfalls bei der späteren Erörterung der Mischungswärmen der Grund sich ergeben wird.

3. Spezifische Wärmebestimmungen an Aethylalkohol-Wassergemischen.

Im Nachfolgenden sind zunächst die Versuche für die einzelnen Temperaturbereiche und Alkohol-Wassergemische tabellarisch zusammengestellt. Da der Verlauf der Kurven für die spezifischen Wärmen als Funktion der Zusammensetzung ein recht komplizierter ist, mußte auf die Zusammenfassung in eine Gleichung vorerst verzichtet werden.

a. Versuche zwischen 0 und 6 Grad Celsius.

Tabelle 6.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke am Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchgangs in Sekunden | Gewichts- prozente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifi- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|---|-----------------------|--------|---|--|----------------------------------|
| | | | | | Aethyl- alkohol | Wasser | | | |
| 165 | 362,5 | 8,203 | 4,673 | 180,2 | 8,55 | 91,45 | 4,21 | 2,19 | 1,0377 |
| 166 | 360,1 | 8,187 | 4,687 | 179,8 | " | " | 4,23 | 2,43 | 1,0381 |
| 162 | 344,4 | 8,228 | 4,701 | 180,6 | 16,35 | 83,65 | 4,46 | 2,53 | 1,0405 |
| 163 | 352,2 | 8,254 | 4,704 | 149,2 | " | " | 3,60 | 2,65 | 1,0466 |
| 164 | 346,9 | 9,247 | 5,270 | 119,9 | " | " | 3,69 | 3,42 | 1,0449 |
| 167 | 356,5 | 8,170 | 4,675 | 180,2 | 24,43 | 75,57 | 4,32 | 2,28 | 1,0233 |
| 168 | 364,1 | 8,160 | 4,673 | 180,1 | " | " | 4,23 | 2,21 | 1,0217 |
| 169 | 355,6 | 8,129 | 4,651 | 180,1 | 33,52 | 66,48 | 4,49 | 2,38 | 0,9743 |
| 170 | 350,9 | 7,302 | 4,215 | 181,5 | " | " | 3,70 | 2,85 | 0,9826 |
| 171 | 335,9 | 8,123 | 4,630 | 180,1 | 48,70 | 51,30 | 5,27 | 2,71 | 0,8670 |
| 172 | 330,2 | 7,294 | 4,195 | 180,6 | " | " | 4,33 | 2,32 | 0,8754 |
| 173 | 331,8 | 7,301 | 4,193 | 179,9 | 71,49 | 28,51 | 5,10 | 2,92 | 0,7297 |
| 174 | 319,1 | 7,303 | 4,194 | 119,8 | " | " | 3,50 | 3,81 | 0,7351 |
| 175 | 309,9 | 7,336 | 4,194 | 182,6 | 83,62 | 16,38 | 6,11 | 3,71 | 0,6575 |
| 176 | 312,7 | 7,289 | 4,182 | 180,1 | " | " | 5,92 | 3,19 | 0,6575 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 2,77°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Aethylalkohols: 0,5443.

Mittlerer Temperaturanstieg bei den Versuchen: 4,48°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Versuchsreihe: 0,53° bis 5,01°.

b. Versuche zwischen 20 und 26 Grad Celsius.

Tabelle 7.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- prozente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifi- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|-----------------------|--------|---|--|----------------------------------|
| | | | | | Aethyl- alkohol | Wasser | | | |
| 23 | 366,4 | 9,266 | 5,170 | 180,0 | 6,04 | 93,96 | 5,35 | 21,61 | 1,0076 |
| 12 | 353,4 | 9,144 | 5,113 | 180,0 | 16,67 | 83,33 | 5,32 | 22,10 | 1,0246 |
| 20 | 354,2 | 9,180 | 5,120 | 239,8 | " | " | 7,07 | 23,07 | 1,0305 |
| 19 | 355,1 | 9,173 | 5,126 | 179,7 | 24,01 | 75,99 | 5,27 | 22,83 | 1,0341 |
| 11 | 349,0 | 9,172 | 5,128 | 180,0 | 34,98 | 65,02 | 5,59 | 22,29 | 0,9914 |
| 18 | 348,4 | 9,209 | 5,138 | 180,0 | " | " | 5,66 | 22,24 | 0,9862 |
| 21 | 337,7 | 8,126 | 4,580 | 180,0 | 39,91 | 60,09 | 4,65 | 22,72 | 0,9722 |
| 10 | 337,8 | 8,120 | 4,567 | 180,0 | 51,17 | 48,83 | 5,00 | 21,90 | 0,8973 |
| 13 | 335,6 | 8,073 | 4,558 | 180,0 | " | " | 4,92 | 23,19 | 0,9109 |
| 15 | 311,2 | 9,204 | 5,140 | 180,0 | 63,24 | 36,76 | 7,35 | 24,87 | 0,8384 |
| 14 | 320,6 | 8,201 | 4,620 | 180,0 | 66,45 | 33,55 | 5,98 | 22,29 | 0,8004 |
| 8 | 312,0 | 7,896 | 4,134 | 180,0 | 76,63 | 23,37 | 5,30 | 23,65 | 0,7446 |
| 17 | 298,2 | 9,223 | 5,143 | 180,0 | 86,41 | 13,59 | 9,35 | 24,77 | 0,6781 |
| 22 | 298,2 | 7,179 | 4,010 | 150,0 | " | " | 4,66 | 25,22 | 0,6891 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 23,05°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Aethylalkohols: 0,5787.

Mittlerer Temperaturanstieg bei den Versuchen: 5,82°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 20,14° bis 25,96°.

c. Versuche zwischen 38 und 43 Grad Celsius.

Tabelle 8.

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 119 | 383,3 | 6,472 | 3,617 | 179,9 | 5,02 | 94,98 | 2,48 | 41,84 | 1,0170 |
| 120 | 381,4 | 7,146 | 3,943 | 180,1 | 13,57 | 86,43 | 2,99 | 39,62 | 1,0216 |
| 121 | 360,3 | 6,543 | 3,676 | 180,1 | 20,12 | 79,88 | 2,69 | 39,24 | 1,0239 |
| 122 | 356,6 | 7,231 | 4,052 | 179,7 | " | " | 3,28 | 42,00 | 1,0309 |
| 123 | 346,6 | 7,178 | 4,018 | 179,9 | 33,27 | 66,73 | 3,39 | 43,04 | 1,0092 |
| 124 | 357,3 | 6,487 | 3,649 | 179,2 | " | " | 2,71 | 40,32 | 1,0021 |
| 125 | 353,9 | 6,478 | 3,642 | 180,1 | 39,45 | 60,55 | 2,79 | 40,25 | 0,9831 |
| 126 | 341,2 | 7,292 | 4,087 | 180,1 | 49,64 | 50,36 | 3,90 | 38,87 | 0,9168 |
| 127 | 340,3 | 6,554 | 3,682 | 180,0 | " | " | 3,15 | 40,14 | 0,9214 |
| 128 | 328,9 | 6,522 | 3,663 | 179,6 | 60,12 | 39,88 | 3,43 | 39,14 | 0,8604 |
| 129 | 339,8 | 7,171 | 4,012 | 180,1 | " | " | 4,03 | 39,16 | 0,8570 |
| 130 | 320,9 | 7,241 | 4,084 | 180,2 | 73,27 | 26,73 | 4,67 | 42,05 | 0,7999 |
| 133 | 331,8 | 7,243 | 4,079 | 179,7 | " | " | 4,52 | 41,38 | 0,7979 |
| 131 | 321,7 | 7,197 | 4,040 | 179,8 | 78,48 | 21,52 | 4,81 | 39,92 | 0,7576 |
| 132 | 321,9 | 6,508 | 3,666 | 180,2 | " | " | 3,85 | 44,56 | 0,7794 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 40,77°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Aethylalkohols: 0,6088.

Mittlerer Temperaturanstieg bei den Versuchen: 3,51°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 39,02° bis 42,52°.

4. Spezifische Wärmebestimmungen an Propylalkohol-Wassergemischen.

Auch hier ist zunächst nur das Beobachtungsmaterial zusammengestellt; Bemerkungen dazu sollen späterhin gemacht werden.

a. Versuche zwischen 0 und 5 Grad Celsius.

Tabelle 9.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- procente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (Wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifi- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|-----------------------|--------|---|--|----------------------------------|
| | | | | | Propyl- alkohol | Wasser | | | |
| 140 | 360,8 | 7,941 | 4,548 | 180,0 | 7,08 | 92,92 | 3,97 | 2,89 | 1,0404 |
| 141 | 358,0 | 8,981 | 5,119 | 179,8 | " | " | 5,10 | 2,65 | 1,0373 |
| 138 | 361,8 | 8,962 | 5,102 | 180,1 | 14,22 | 85,78 | 4,91 | 2,55 | 1,0637 |
| 139 | 363,6 | 8,981 | 5,112 | 180,1 | " | " | 4,92 | 2,61 | 1,0606 |
| 136 | 368,1 | 8,946 | 5,092 | 180,1 | 17,90 | 82,10 | 4,80 | 2,47 | 1,0809 |
| 137 | 361,8 | 8,952 | 5,107 | 180,1 | " | " | 4,84 | 2,52 | 1,0796 |
| 156 | 336,0 | 7,927 | 4,549 | 179,7 | 22,78 | 77,22 | 4,05 | 2,15 | 1,0906 |
| 157 | 349,1 | 7,901 | 4,527 | 180,1 | " | " | 3,90 | 1,99 | 1,0850 |
| 158 | 343,6 | 7,896 | 4,519 | 180,1 | " | " | 3,92 | 2,03 | 1,0938 |
| 146 | 345,0 | 7,884 | 4,501 | 180,2 | 29,99 | 70,01 | 4,12 | 2,26 | 1,0289 |
| 147 | 341,6 | 7,879 | 4,501 | 180,1 | " | " | 4,11 | 2,26 | 1,0404 |
| 144 | 359,2 | 7,931 | 4,518 | 180,0 | 38,44 | 61,56 | 4,23 | 2,27 | 0,9701 |
| 145 | 336,8 | 7,887 | 4,501 | 180,3 | " | " | 4,50 | 2,30 | 0,9619 |
| 142 | 346,5 | 9,004 | 5,118 | 180,5 | 48,86 | 51,14 | 6,20 | 3,24 | 0,8792 |
| 143 | 344,7 | 7,907 | 4,514 | 180,1 | " | " | 4,77 | 2,39 | 0,8879 |
| 150 | 315,7 | 7,164 | 4,071 | 179,9 | 58,20 | 41,80 | 4,54 | 2,50 | 0,8242 |
| 151 | 324,3 | 7,097 | 4,064 | 180,0 | " | " | 4,39 | 2,39 | 0,8222 |
| 148 | 324,4 | 7,131 | 4,069 | 180,5 | 69,59 | 30,41 | 4,88 | 2,68 | 0,7496 |
| 149 | 318,5 | 7,124 | 4,059 | 180,0 | " | " | 4,90 | 2,56 | 0,7468 |
| 154 | 319,8 | 7,039 | 4,063 | 180,1 | 74,80 | 25,20 | 5,04 | 2,66 | 0,7138 |
| 155 | 305,2 | 7,031 | 4,059 | 180,1 | " | " | 5,23 | 2,78 | 0,7171 |
| 152 | 308,3 | 7,049 | 4,069 | 179,7 | 84,26 | 15,74 | 5,69 | 2,95 | 0,6501 |
| 153 | 307,8 | 7,058 | 4,069 | 180,1 | " | " | 5,72 | 2,99 | 0,6503 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 2,53°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Propylalkohols: 0,5322.

Mittlerer Temperaturanstieg während der Versuche: 4,73°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 0,19 bis 4,89°.

b. Versuche zwischen 21 und 27 Grad Celsius.

Tabelle 10.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- prozente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifi- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|-----------------------|--------|---|--|----------------------------------|
| | | | | | Propyl- alkohol | Wasser | | | |
| 51 | 356,3 | 8,246 | 4,640 | 180,0 | 10,94 | 89,06 | 4,23 | 22,00 | 1,0471 |
| 53 | 349,0 | 9,313 | 5,175 | 180,0 | " | " | 5,49 | 24,00 | 1,0364 |
| 60 | 352,6 | 9,373 | 5,189 | 180,0 | 19,48 | 80,52 | 5,41 | 24,03 | 1,0516 |
| 62 | 356,2 | 9,147 | 5,102 | 179,8 | " | " | 5,09 | 24,54 | 1,0612 |
| 50 | 334,2 | 8,304 | 4,662 | 180,0 | 31,86 | 68,14 | 4,72 | 22,07 | 1,0078 |
| 54 | 344,8 | 9,292 | 5,170 | 180,0 | " | " | 5,75 | 24,10 | 1,0200 |
| 63 | 333,8 | 9,149 | 5,106 | 180,0 | 44,31 | 55,69 | 6,12 | 25,00 | 0,9359 |
| 61 | 333,7 | 9,266 | 5,155 | 179,8 | " | " | 6,30 | 24,73 | 0,9284 |
| 52 | 321,9 | 8,227 | 4,605 | 180,0 | 58,75 | 41,25 | 5,62 | 23,74 | 0,8512 |
| 56 | 322,8 | 9,249 | 5,146 | 180,2 | " | " | 7,10 | 23,76 | 0,8448 |
| 55 | 306,3 | 7,289 | 4,044 | 180,0 | 74,83 | 26,17 | 5,22 | 22,58 | 0,7408 |
| 57 | 316,3 | 7,231 | 4,015 | 180,0 | " | " | 4,96 | 23,78 | 0,7443 |
| 58 | 299,2 | 7,302 | 4,044 | 180,0 | 89,41 | 10,59 | 6,08 | 23,68 | 0,6447 |
| 59 | 302,8 | 7,261 | 4,017 | 180,0 | " | " | 5,89 | 24,16 | 0,6506 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 23,87°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Propylalkohols: 0,5680.

Mittlerer Temperaturanstieg während der Versuche: 5,57°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 21,09° bis 26,65°.

c. Versuche zwischen 38 und 43 Grad Celsius.

Tabelle 11.

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 141 | 364,6 | 6,323 | 3,612 | 180,1 | 10,09 | 89,91 | 2,54 | 42,65 | 1,0177 |
| 142 | 364,7 | 6,992 | 3,936 | 180,6 | " | " | 3,07 | 40,59 | 1,0170 |
| 143 | 347,9 | 6,981 | 3,941 | 181,0 | 20,11 | 79,89 | 3,18 | 39,72 | 1,0301 |
| 144 | 342,1 | 6,301 | 3,607 | 179,9 | 30,08 | 69,92 | 2,77 | 40,38 | 0,9848 |
| 145 | 346,9 | 7,029 | 3,956 | 180,1 | " | " | 3,37 | 40,35 | 0,9777 |
| 146 | 328,1 | 6,967 | 3,952 | 180,1 | 40,20 | 59,80 | 3,65 | 39,90 | 0,9408 |
| 147 | 328,5 | 6,387 | 3,607 | 180,1 | " | " | 3,02 | 40,77 | 0,9510 |
| 148 | 289,4 | 6,413 | 3,599 | 179,9 | 49,88 | 50,12 | 3,59 | 39,87 | 0,8998 |
| 149 | 290,8 | 7,046 | 3,937 | 180,1 | " | " | 4,34 | 39,96 | 0,8910 |
| 150 | 336,9 | 7,009 | 3,960 | 179,9 | 59,98 | 40,02 | 3,95 | 39,36 | 0,8493 |
| 151 | 311,7 | 7,029 | 3,963 | 180,0 | 85,55 | 14,45 | 5,06 | 40,33 | 0,7084 |
| 152 | 313,8 | 7,040 | 3,959 | 179,8 | " | " | 5,01 | 40,49 | 0,7108 |
| 153 | 319,0 | 6,472 | 3,602 | 180,3 | " | " | 4,09 | 41,66 | 0,7197 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 40,46°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Propylalkohols: 0,5964.

Mittlerer Temperaturanstieg während eines Versuchs: 3,66°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 38,63° bis 42,29°.

5. Spezifische Wärmebestimmungen an Methylalkohol-Wassergemischen.

a. Versuche zwischen 0 und 6 Grad Celsius.

Tabelle 12.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- prozent | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezif- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|----------------------|--------|--|--|---------------------------------|
| | | | | | Methyl- alkohol | Wasser | | | |
| 119 | 364,8 | 7,871 | 4,532 | 180,1 | 3,68 | 96,32 | 3,96 | 2,12 | 1,0183 |
| 113 | 347,7 | 8,992 | 5,153 | 182,8 | 5,36 | 94,64 | 5,44 | 2,81 | 1,0243 |
| 117 | 351,9 | 7,897 | 4,561 | 180,0 | 8,32 | 91,68 | 4,12 | 2,10 | 1,0233 |
| 118 | 348,8 | 7,838 | 4,514 | 180,0 | " | " | 4,09 | 2,14 | 1,0212 |
| 96 | 344,5 | 8,113 | 4,653 | 179,9 | 10,00 | 90,00 | 4,45 | 2,23 | 1,0123 |
| 97 | 341,6 | 8,102 | 4,656 | 180,2 | " | " | 4,46 | 2,36 | 1,0195 |
| 115 | 358,5 | 8,977 | 5,137 | 180,1 | 13,95 | 86,05 | 5,27 | 2,73 | 1,0060 |
| 100 | 346,5 | 8,082 | 4,619 | 180,2 | 20,10 | 79,90 | 4,57 | 2,41 | 0,9691 |
| 101 | 357,4 | 8,076 | 4,622 | 180,0 | " | " | 4,44 | 2,52 | 0,9672 |
| 102 | 335,8 | 8,039 | 4,620 | 180,1 | 29,03 | 70,97 | 4,86 | 2,49 | 0,9320 |
| 103 | 348,5 | 8,040 | 4,620 | 180,1 | " | " | 4,68 | 2,48 | 0,9343 |
| 104 | 345,3 | 8,043 | 4,623 | 180,0 | " | " | 4,74 | 2,45 | 0,9310 |
| 105 | 346,8 | 8,035 | 4,616 | 179,9 | " | " | 4,70 | 2,60 | 0,9323 |
| 106 | 333,3 | 8,068 | 4,624 | 179,8 | 40,31 | 59,69 | 5,28 | 2,73 | 0,8660 |
| 107 | 338,7 | 8,064 | 4,620 | 180,1 | " | " | 5,21 | 2,75 | 0,8615 |
| 108 | 345,5 | 8,048 | 4,613 | 180,0 | " | " | 5,07 | 2,74 | 0,8655 |
| 109 | 337,5 | 8,053 | 4,615 | 180,1 | " | " | 5,20 | 2,75 | 0,8641 |
| 110 | 327,2 | 8,006 | 4,581 | 180,1 | 50,10 | 49,90 | 5,60 | 2,90 | 0,8126 |
| 111 | 329,8 | 7,969 | 4,566 | 179,9 | " | " | 5,40 | 3,00 | 0,8299 |
| 112 | 323,1 | 7,964 | 4,565 | 180,1 | " | " | 5,59 | 2,89 | 0,8169 |
| 120 | 328,3 | 9,229 | 5,313 | 149,6 | 60,75 | 39,25 | 6,59 | 3,54 | 0,7616 |
| 121 | 330,5 | 7,151 | 4,131 | 180,3 | " | " | 4,72 | 2,40 | 0,7676 |
| 122 | 321,8 | 7,144 | 4,128 | 180,1 | 71,66 | 28,34 | 5,19 | 2,67 | 0,7104 |
| 123 | 324,3 | 7,127 | 4,113 | 180,1 | " | " | 5,09 | 2,61 | 0,7151 |
| 125 | 315,2 | 7,053 | 4,078 | 180,1 | 80,23 | 19,77 | 5,43 | 2,87 | 0,6725 |
| 127 | 311,6 | 7,030 | 4,076 | 180,1 | 90,01 | 9,99 | 5,85 | 3,02 | 0,6253 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 2,68°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Methylalkohols: 0,5703.

Mittlerer Temperaturanstieg beim Versuch: 5,00°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 0,13° bis 5,13°.

b. Versuche zwischen 21 und 28 Grad Celsius.

Tabelle 13.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampere | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- prozente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifische Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|-----------------------|--------|--|--|--------------------------------|
| | | | | | Methyl- alkohol | Wasser | | | |
| 36 | 867,1 | 9,446 | 5,250 | 181,2 | 12,18 | 87,82 | 5,63 | 23,96 | 0,9973 |
| 37 | 870,9 | 9,368 | 5,196 | 179,6 | " | " | 5,43 | 24,68 | 0,9938 |
| 42 | 843,9 | 7,214 | 4,015 | 240,0 | 23,44 | 76,56 | 4,69 | 26,34 | 0,9834 |
| 43 | 853,7 | 9,173 | 5,119 | 180,2 | " | " | 5,66 | 26,65 | 0,9830 |
| 32 | 849,2 | 9,224 | 5,144 | 180,0 | 34,46 | 65,54 | 5,76 | 24,34 | 0,9691 |
| 33 | 844,6 | 9,213 | 5,145 | 180,0 | " | " | 5,81 | 25,45 | 0,9721 |
| 38 | 866,8 | 9,343 | 5,200 | 180,0 | " | " | 5,71 | 24,66 | 0,9542 |
| 39 | 845,4 | 9,330 | 5,195 | 180,2 | 46,63 | 53,37 | 6,54 | 25,19 | 0,8778 |
| 30 | 820,9 | 9,238 | 5,160 | 180,2 | 61,85 | 38,15 | 7,56 | 23,61 | 0,7965 |
| 31 | 837,0 | 9,238 | 5,160 | 180,0 | " | " | 7,19 | 23,45 | 0,7988 |
| 28 | 813,4 | 7,290 | 4,060 | 180,0 | 74,65 | 25,35 | 5,29 | 22,20 | 0,7170 |
| 40 | 809,4 | 7,294 | 4,052 | 180,2 | " | " | 5,23 | 25,13 | 0,7350 |
| 26 | 804,3 | 7,298 | 4,072 | 180,0 | 86,03 | 13,97 | 5,81 | 22,59 | 0,6704 |
| 27 | 812,0 | 6,552 | 3,600 | 179,8 | " | " | 4,52 | 22,16 | 0,6673 |
| 41 | 802,2 | 7,296 | 4,051 | 180,0 | " | " | 5,79 | 25,49 | 0,6734 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 24,39°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Methylalkohols: 0,6072.

Mittlerer Temperaturanstieg beim Versuch: 5,77°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 21,41° bis 27,27°.

c. Versuche zwischen 38 und 43 Grad Celsius.

Tabelle 14.

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 154 | 865,5 | 6,284 | 3,582 | 180,1 | 10,02 | 89,97 | 2,54 | 39,96 | 0,9999 |
| 155 | 850,1 | 6,913 | 3,906 | 180,1 | " | " | 3,22 | 40,22 | 0,9850 |
| 156 | 845,6 | 6,939 | 3,916 | 180,2 | 19,97 | 80,03 | 3,34 | 39,89 | 0,9675 |
| 157 | 857,5 | 6,284 | 3,582 | 180,0 | " | " | 2,61 | 39,92 | 0,9929 |
| 158 | 840,9 | 6,282 | 3,585 | 179,9 | 29,98 | 70,02 | 2,80 | 40,55 | 0,9675 |
| 159 | 841,4 | 6,950 | 3,926 | 180,1 | " | " | 3,46 | 40,20 | 0,9473 |
| 160 | 832,1 | 6,314 | 3,589 | 179,9 | 39,96 | 60,04 | 3,02 | 39,66 | 0,9231 |
| 161 | 820,5 | 6,978 | 3,937 | 180,1 | " | " | 3,85 | 39,82 | 0,9085 |
| 162 | 816,6 | 6,296 | 3,588 | 179,8 | 50,01 | 49,99 | 3,31 | 39,89 | 0,8758 |
| 163 | 835,6 | 6,966 | 3,922 | 180,3 | " | " | 3,81 | 39,73 | 0,8731 |
| 164 | 827,4 | 7,018 | 3,963 | 180,9 | 60,14 | 39,86 | 4,25 | 39,45 | 0,8152 |
| 165 | 817,8 | 6,320 | 3,594 | 180,0 | " | " | 3,51 | 39,91 | 0,8256 |
| 166 | 812,2 | 6,967 | 3,907 | 180,1 | 70,02 | 29,98 | 4,57 | 40,17 | 0,7697 |
| 167 | 810,2 | 6,342 | 3,566 | 180,3 | " | " | 3,75 | 40,28 | 0,7851 |
| 168 | 805,2 | 6,356 | 3,564 | 180,7 | 80,05 | 19,95 | 4,12 | 40,34 | 0,7256 |
| 169 | 296,9 | 7,016 | 3,909 | 180,2 | " | " | 5,14 | 39,91 | 0,7198 |
| 170 | 288,2 | 6,989 | 3,905 | 180,5 | 90,39 | 9,61 | 5,67 | 40,22 | 0,6647 |
| 171 | 282,6 | 6,370 | 3,581 | 180,5 | " | " | 4,75 | 42,14 | 0,6763 |

Mitteltemperatur der ganzen Reihe: 40,13°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des reinen Methylalkohols: 0,6122.

Mittlerer Temperaturanstieg beim Versuch: 3,76°.

Mittleres Gültigkeitsbereich der Reihe: 38,25° bis 42,01°.

6. Spezifische Wärmebestimmungen an Gemischen zweier Alkohole.

Der Vollständigkeit wegen wurden auch eine Reihe von Bestimmungen ausgeführt, bei denen es galt, die spezifische Wärme von Gemischen zweier Alkohole zu bestimmen. Auch von diesen sei zunächst hier nur das reine Beobachtungsmaterial vorgelegt. Es beschränken sich die Bestimmungen, da Versuche bei höheren Temperaturen schwierig so genau auszuführen sind, um für die thermodynamisch interessanten Fragestellungen Bedeutung zu gewinnen, auf das Gebiet etwas über Zimmertemperatur und auf das Gebiet um Null Grad.

a. Versuche mit Aethyl- und Propylalkoholgemischen.

Tabelle 15.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Stromstärke im Heizrührer in Ampere | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichtsprozent | | Beobachtete Temperatursteigerung (wegen Wärmeaustauschkorrigiert) | Mittlere Temperatur beim Versuch | Gefundene spezifische Wärme |
|---------------------|--|---|--|--|-----------------|---------------|---|----------------------------------|-----------------------------|
| | | | | | Propylalkohol | Aethylalkohol | | | |
| 189 | 290,9 | 7,240 | 4,185 | 180,1 | 23,75 | 76,25 | 7,46 | 3,91 | 0,5460 |
| 190 | 304,4 | 7,221 | 4,182 | 180,1 | " | " | 7,13 | 3,79 | 0,5463 |
| 187 | 298,8 | 7,227 | 4,183 | 180,2 | 46,88 | 53,12 | 7,31 | 3,79 | 0,5426 |
| 188 | 298,6 | 7,220 | 4,185 | 180,2 | " | " | 7,32 | 3,82 | 0,5417 |

Mitteltemperatur der Reihe 3,83°.

Spezifische Wärmen der reinen Alkohole bei dieser Temperatur:

Aethylalkohol: 0,5461.

Propylalkohol: 0,5344.

| | | | | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 70 | 284,4 | 7,041 | 3,908 | 179,7 | 17,45 | 82,55 | 6,60 | 23,19 | 0,5735 |
| 75 | 292,0 | 7,298 | 4,058 | 180,2 | " | " | 6,88 | 23,70 | 0,5798 |
| 71 | 300,1 | 7,062 | 3,915 | 180,2 | 38,49 | 61,51 | 6,38 | 22,79 | 0,5685 |
| 74 | 291,8 | 7,300 | 4,054 | 180,0 | " | " | 6,96 | 23,57 | 0,5720 |
| 67 | 297,4 | 7,224 | 4,018 | 180,0 | 57,25 | 42,75 | 6,74 | 23,06 | 0,5693 |
| 68 | 282,6 | 7,177 | 3,980 | 180,0 | " | " | 7,00 | 23,02 | 0,5644 |

Mitteltemperatur der Reihe: 23,22°.

Spezifische Wärmen der reinen Alkohole bei dieser Temperatur:

Aethylalkohol: 0,5790.

Propylalkohol: 0,5672,

b. Versuche mit Aethyl- und Methylalkoholgemischen.

Tabelle 16.

| Nummer des Versuchs | Ins Calorimeter eingewogene Menge Mischung | Mittlere Spannung am Heizrührer in Volt | Mittlere Strom- stärke im Heiz- rührer in Ampère | Zeitdauer des Stromdurchganges in Sekunden | Gewichts- procente | | Beobachtete Tempe- ratursteigerung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Mittlere Tempe- ratur beim Ver- such | Gefundene spezifi- sche Wärme |
|------------------------|--|---|--|--|-----------------------|--------------------|---|--|----------------------------------|
| | | | | | Aethyl- alkohol | Methyl- alkohol | | | |
| 185 | 308,3 | 7,239 | 4,182 | 179,8 | 34,57 | 65,43 | 6,81 | 4,67 | 0,5770 |
| 186 | 298,1 | 7,234 | 4,182 | 180,0 | " | " | 6,94 | 4,62 | 0,5754 |
| 188 | 290,4 | 7,249 | 4,182 | 180,0 | 68,21 | 31,79 | 7,33 | 3,97 | 0,5576 |
| 185 | 296,2 | 7,250 | 4,187 | 180,2 | " | " | 7,19 | 3,88 | 0,5598 |

Mitteltemperatur der Reihe: 4,27°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des Aethylalkohols: 0,5469.

" " " " " " " " Methylalkohols: 0,5743.

| | | | | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 48 | 282,0 | 7,277 | 4,044 | 180,0 | 29,83 | 70,17 | 6,84 | 24,73 | 0,5996 |
| 47 | 288,1 | 7,280 | 4,044 | 180,0 | 55,00 | 45,00 | 6,76 | 24,28 | 0,5948 |
| 49 | 288,8 | 7,280 | 4,047 | 180,0 | 76,98 | 23,02 | 6,78 | 24,89 | 0,5918 |

Mitteltemperatur der Reihe: 24,63°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des Aethylalkohols: 0,5814.

" " " " " " " " Methylalkohols: 0,6075.

c. Versuche mit Propyl- und Methylalkoholgemischen.

Tabelle 17.

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|---------------------|-------|------|------|--------|
| 181 | 301,8 | 7,254 | 4,183 | 180,1 | 22,48 ¹⁾ | 75,52 | 6,92 | 4,00 | 0,5724 |
| 182 | 300,1 | 7,260 | 4,183 | 179,9 | " | " | 7,00 | 3,66 | 0,5674 |
| 179 | 295,9 | 7,251 | 4,182 | 180,0 | 44,59 | 55,41 | 7,19 | 3,68 | 0,5591 |
| 180 | 296,6 | 7,231 | 4,182 | 180,1 | " | " | 7,16 | 3,65 | 0,5589 |
| 177 | 295,7 | 7,277 | 4,181 | 180,0 | 58,71 | 41,29 | 7,26 | 3,75 | 0,5556 |
| 178 | 298,2 | 7,251 | 4,182 | 180,1 | " | " | 7,24 | 4,00 | 0,5509 |

Mitteltemperatur der Reihe: 3,77°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des Propylalkohols: 0,5343.

" " " " " " " " Methylalkohols: 0,5731.

| | | | | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|
| 64 | 288,3 | 7,273 | 4,046 | 180,0 | 24,35 | 75,65 | 6,75 | 24,70 | 0,5949 |
| 65 | 291,0 | 7,277 | 4,048 | 180,0 | " | " | 6,77 | 22,89 | 0,5883 |
| 72 | 290,1 | 7,298 | 4,058 | 180,0 | 36,86 | 63,14 | 6,83 | 23,81 | 0,5881 |
| 77 | 295,2 | 7,297 | 4,052 | 180,2 | " | " | 6,68 | 24,68 | 0,5911 |
| 73 | 280,9 | 7,050 | 3,910 | 180,2 | 47,73 | 52,27 | 6,69 | 23,21 | 0,5749 |
| 76 | 292,6 | 7,301 | 4,058 | 180,0 | " | " | 6,84 | 24,02 | 0,5820 |
| 66 | 289,0 | 7,247 | 4,029 | 180,0 | 70,80 | 29,20 | 6,94 | 22,88 | 0,5709 |
| 69 | 291,6 | 7,168 | 3,978 | 180,2 | " | " | 6,71 | 23,26 | 0,5727 |

Mitteltemperatur der Reihe: 23,68°.

Dazu gehöriger Wert der spezifischen Wärme des Propylalkohols: 0,5680.

" " " " " " " " Methylalkohols: 0,6066.

1) Kopf der Tabelle wie oben, nur ist an Stelle von Aethylalkohol Propylalkohol zu setzen.

Vergleiche mit Resultaten älterer Versuche an Gemischen verschiedener Alkohole miteinander können leider nicht angestellt werden, da meines Wissens bisher keinerlei Beobachtungen von anderer Seite darüber vorliegen.

7. Vergleich der Resultate für Alkohol-Wassergemische mit älteren Beobachtungen.

Es liegen für Mischungen von den untersuchten drei Alkoholen mit Wasser eine ganze Reihe von Bestimmungen vor, welche jedoch nur zum Teile mit den unsrigen einigermaßen vergleichbar sind, da sie oft Mittelwerte über sehr breite Temperaturbereiche darstellen. So weit sich eine Vergleichung ermöglichen läßt, sind die von anderen Beobachtern ausgegebenen Werte sowie unsere, so gut als möglich, auf die betreffenden anderen Bedingungen umgerechneten Werte nebeneinander in folgenden Tabellen dargestellt.

Tabelle 18 (a—k).

A. Äthylalkohol-Wassergemische.

Hier liegen eine große Reihe Bestimmungen vor, von denen im allgemeinen zu sagen ist, daß sie mit Ausnahme von Zettermans Resultaten stets durchschnittlich zu etwas höheren Werten führen als die von uns angeführten Messungen. Diese einseitige Abweichung beträgt im Mittel bei Zettermann 0,0 %, bei Regnault 0,2 %, bei Schüller 0,5 %, bei Dupré und Page 0,6 %, bei Magie 0,8 % und bei Blümcke 1,7 %. Da aber unser reiner Alkohol ebenfalls eine sehr deutlich niedrigere spezifische Wärme aufweist, als die reinen Alkohole der genannten Forscher, so ist das im allgemeinen erklärlich.

18a. Vergleich mit Schüller¹⁾.

| Gew.- Proz. | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|-------------------|--------------------|--------------------------------|---|
| | zwischen 20—41° | bei 30,5° Bose u. Müller | |
| Äthyl- alkohol | Schüller | Müller | |
| 14,90 | 1,0391 | 1,025 | Schüllers Resultate sind durchschnittlich 0,5 % höher als die unsrigen; die Differenzen betragen für den einzelnen Versuch im Mittel 1,1 %. |
| 20,00 | 1,0456 | 1,028 | |
| 22,56 | 1,0436 | 1,024 | |
| 28,56 | 1,0354 | 1,011 | |
| 35,22 | 1,0076 | 0,996 | |
| 44,35 | 0,9610 | 0,950 | |
| 49,46 | 0,9162 | 0,920 | |
| 49,93 | 0,9096 | 0,919 | |
| 54,09 | 0,8826 | 0,889 | |
| 54,45 | 0,8796 | 0,886 | |
| 58,17 | 0,8590 | 0,868 | |
| 73,90 | 0,7771 | 0,775 | |
| 83,00 | 0,7168 | 0,715 | |

18b. Vergleich mit Magie²⁾.
Versuchstemperatur etwas über Zimmer-
temperatur

| Gew.- Proz. | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|-------------------|-------------------|--------------------------------|--|
| | Magie | zwischen 20—26° B. u. M. | |
| Äthyl- alkohol | Magie | | |
| 0,8 | 1,0009 | 1,001 | Mittlere Abweichung 0,8 %. Magies Zahlen meist größer als die von B. u. M. |
| 1,7 | 1,0026 | 1,002 | |
| 2,5 | 1,0074 | 1,003 | |
| 4,8 | 1,0194 | 1,007 | |
| 17,0 | 1,0509 | 1,027 | |

1) Pogg. Ann. Erg. 5, 116, 192 (1871).

2) Phys. Rev. 9 (1899)

18c. Vergleich mit Regnault¹⁾.

| Gew.- Proz. | Spezifische Wärme zwischen | | | | | | Bemerkungen |
|--------------------|----------------------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---|
| | 5—10° | | 10—15° | | 15—20° | | |
| Aethyl- alkohol | Reg- nault | B. u. M. | Reg- nault | B. u. M. | Reg- nault | B. u. M. | |
| 42 | 0,9752 | 0,935 | 0,9682 | 0,947 | 0,9770 | 0,956 | Die Zahlen von Regnault liegen im Durchschnitt um 0,2 % höher als die unse- ren. Die mittlere Abwei- chung beträgt für den ein- zelnen Versuch: 2,5 %. |
| 56 | 0,8518 | 0,847 | 0,8429 | 0,862 | 0,8523 | 0,873 | |
| 84 | 0,6725 | 0,665 | 0,6651 | 0,676 | 0,6588 | 0,687 | |

18d. Vergleich mit Zettermann²⁾.
Versuche bei 20°.

| Gew.- Proz. Aethyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|--------------------------------------|-------------------|-----------------------|---|
| | Zetter- man | Bose und Müller | |
| 10 | 1,052 | 1,021 | Zettermans Zahlen sind durchschnittl. genau ebenso hoch wie unsere Werte. Im einzelnen beträgt die Abweichung durchschnittlich 2 %. |
| 20 | 1,043 | 1,030 | |
| 30 | 1,012 | 1,008 | |
| 40 | 0,946 | 0,965 | |
| 50 | 0,878 | 0,910 | |

18e. Vergleich mit Dupré und Page³⁾. Versuche bei 18—19°.

| Gew.- Proz. Aethyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|--------------------------------------|----------------------|-----------------------|--|
| | Dupré und Page | Bose und Müller | |
| 5 | 1,015 | 1,009 | Die Zahlen von Dupré und Page sind im Durchschnitt um 0,6 % höher als unsere Werte. Die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Versuche beträgt 0,9 %. |
| 10 | 1,036 | 1,020 | |
| 20 | 1,044 | 1,030 | |
| 30 | 1,026 | 1,007 | |
| 40 | 0,968 | 0,967 | |
| 45 | 0,942 | 0,940 | |
| 50 | 0,906 | 0,914 | |
| 60 | 0,843 | 0,849 | |
| 70 | 0,784 | 0,780 | |
| 80 | 0,717 | 0,714 | |
| 90 | 0,658 | 0,650 | |

18f. Vergleich mit Blümcke⁴⁾.

| Gew.- Proz. Aethyl- alkohol | Spezifische Wärme | | | | | | Bemerkungen |
|--------------------------------------|---------------------|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------|---|
| | zw. 0—15° | bei 7,5° | zw. 15—30° | zw. 20—26° | zw. 30—45° | bei 37,5° | |
| | Blümcke | B. u. M. | Blümcke | B. u. M. | Blümcke | B. u. M. | |
| 10 | 1,100 | 1,036 | 1,008 | 1,017 | 1,042 | 1,021 | Blümckes Zahlen sind durchschnittlich um 1,7 % höher als unsere Werte. Im Mittel beträgt die Abweichung der einzelnen Versuche ca. 3 %. |
| 20 | 1,100 | 1,035 | 1,030 | 1,028 | 1,055 | 1,028 | |
| 30 | 1,058 | 1,001 | 1,024 | 1,009 | 1,002 | 1,013 | |
| 40 | 0,992 | 0,947 | 0,950 | 0,971 | 0,962 | 0,978 | |
| 50 | 0,922 ⁵⁾ | 0,885 | 0,890 | 0,917 | 0,912 | 0,917 | |

1) Ann. chim. phys. (3) 9, 348 (1843).

2) A. Zettermann, Studien öfver specifilet Wärme.

3) Phil. Trans. London 159, 1, 591 (1869); Pogg. Ann. Erg. 5, 221 (1871).

4) Wied. Ann. 25, 154 (1885)

5) Im Original steht fälschlich 0,992.

B. Propylalkohol-Wassergemische.

Bei diesen habe ich nur eine Versuchsreihe älteren Datums ausfindig machen können, die ebenfalls einseitig höhere Resultate gegenüber unseren Versuchen aufweist. Die Vergleichung ist durch die folgende kleine Tabelle ermöglicht.

18g. Vergleich mit Zetterman¹⁾. Versuche bei 20°.

| Gewichts-Prozente Propyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|---|-------------------|-----------------------|---|
| | Zetter- man | Bose und Müller | |
| 10 | 1,055 | 1,042 | Zettermans Zahlen sind durchschnittlich um 1,2 % höher als unsere Werte. Im einzeln beträgt die Abweichung durchschnittlich 1,2 %. |
| 20 | 1,082 | 1,061 | |
| 80 | 1,082 | 1,028 | |
| 40 | 0,972 | 0,960 | |
| 50 | 0,908 | 0,897 | |

C. Methylalkohol-Wassergemische.

Hier liegen drei verschiedene ältere Versuchsreihen vor, von denen die eine im Mittel sich mit unseren Werten in Uebereinstimmung erweist, während die beiden andern durchschnittlich um gleich viel nach oben und unten sich von unseren Zahlen entfernen. Vergleiche die drei folgenden Zusammenstellungen:

18h. Vergleich mit Zetterman¹⁾. Versuche bei 20°.

| Gewichts-Prozente Methyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|---|-------------------|-----------------------|--|
| | Zetter- man | Bose und Müller | |
| 10 | 1,018 | 1,000 | Zettermans Zahlen sind durchschnittl. genau ebenso hoch wie unsere Werte. Im einzeln beträgt die Abweichung durchschnittlich 1,0 %. |
| 20 | 0,989 | 0,987 | |
| 30 | 0,966 | 0,962 | |
| 40 | 0,902 | 0,916 | |
| 50 | 0,841 | 0,852 | |

1) A. Zetterman, Studier öfver specifik Wärme. Dissertation Helsingfors (1880).

18i. Vergleich mit Lecher¹⁾
(dessen Werte durch Division mit 1,004
auf den 15° Cal. umgerechnet sind).

| Gew.- Proz. Methyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|--------------------------------------|-------------------|-----------------------|---|
| | Lecher | Bose und Müller | |
| 12,32 | 1,069 | 1,006 | Die mittlere Differenz be- trägt 3,3 ‰, und Lechers Zahlen sind durchschnitt- lich um etwa 2,9 ‰ höher als unsere Werte. |
| 20,42 | 1,069 | 0,979 | |
| 30,57 | 0,976 | 0,945 | |
| 36,62 | 0,914 | 0,922 | |
| 42,64 | 0,875 | 0,878 | |
| 51,64 | 0,823 | 0,828 | |
| 63,43 | 0,778 | 0,763 | |
| 91,14 | 0,644 | 0,626 | |

18k. Vergleich mit Dupré²⁾.

| Gew.- Proz. Methyl- alkohol | Spezifische Wärme | | Bemerkungen |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------------------|---|
| | zwischen 18°—60° Dupré | bei 39° Bose u. Müller | |
| 10 | 0,986 | 0,994 | Die Werte Duprés sind sämtlich nie- driger als die unsrigen und zwar im Mittel um 2,8 ‰. |
| 20 | 0,959 | 0,981 | |
| 30 | 0,927 | 0,959 | |
| 40 | 0,892 | 0,920 | |
| 50 | 0,846 | 0,872 | |
| 60 | 0,802 | 0,822 | |
| 70 | 0,755 | 0,774 | |
| 80 | 0,700 | 0,720 | |
| 90 | 0,643 | 0,663 | |

Was im allgemeinen die Werte betrifft, die wir für Mischungen von Alkohol und Wasser, sowie für Mischungen zweier Alkohole gefunden haben, so glaube ich, daß den bei etwa Null Grad und den bei Zimmertemperatur beobachteten Zahlen etwa eine Genauigkeit von $\frac{1}{2}$ Prozent zukommt, und daß die Ungenauigkeit der graphisch interpolierten Werte (Tabelle 19—21) der spezifischen Wärmen keinesfalls 1 Prozent überschreitet. Dagegen glaube ich, daß die für Temperaturen über 40 Grad gefundenen Werte erheblich weniger genau sind. Die Schwierigkeiten der Messungen werden hier erheblich größer, wegen der schnell anwachsenden Dampfdrucke und der durch sie bedingten Fehlerquellen. Dies ist auch der Grund, weshalb ich die Werte für Propylalkohol und für Aethylalkohol im allgemeinen für erheblich besser halte als die für Methylalkohol gefundenen Zahlen. Bei den Methylalkohol-Wassergemischen können die Fehler bei über 40 Grad meines Erachtens leicht 1 Prozent überschreiten. Belege für die hiermit ausgesprochenen Fehlerabschätzungen werden sich bei der demnächst erfolgenden Veröffentlichung des Beobachtungsmaterials über Mischungswärmen und deren Abhängigkeit von der Temperatur ergeben.

In den nunmehr folgenden Schlußtabellen habe ich in möglichst übersichtlicher Form zusammengestellt:

1) Wien. Ber. 76 [2], 937 (1877).

2) Proc. Royl. Soc. 20, 336 (1872).

1. für die Alkohol-Wassergemische aus den verschiedenen Versuchsreihen interpolierte Werte für die spezifischen Wärmen von 5 zu 5 Prozent Alkoholgehalt.
2. für dieselben Gemische diejenigen Werte, welche die spezifische Wärme haben müßte, wenn sich dieselbe aus der der Komponenten nach der Mischungsregel berechnete.
3. die Abweichungen beider Zahlengruppen von einander, also jene Größe, welche thermodynamisch von besonderem Interesse ist, da sie direkt mit dem Temperaturkoeffizienten der Mischungswärme in Beziehung zu setzen ist. (Siehe Figur 7.) (Hierbei sei bemerkt, daß in dieser Differenz die Fehler der spezifischen Wärmebestimmungen leider besonders stark zur Geltung kommen müssen, da die Differenz im Durchschnitt weniger als $\frac{1}{10}$ der spezifischen Wärmen beträgt.)

Aehnliche Zusammenstellungen für die Gemische zweier Alkohole zu machen verbietet einerseits die ziemlich geringe Zahl von Versuchen, andererseits der Umstand, daß hier die Abweichungen vom geradlinigen Verlauf derart kleine sind, daß dieselben überaus unsicher bleiben. Im Sinne der Thermodynamik hat man hieraus zu schließen, daß bei diesen Gemischen der Temperaturkoeffizient der Wärmetönungen beim Mischen sehr kleine Werte besitzen muß.

Tabelle 19.
Aethylalkohol-Wassergemische.

| Gewichtsprocente | | Spezifische Wärme des Gemisches aus den Versuchswerten interpoliert von 5 zu 5 % | | Spezifische Wärme des Gemisches, falls dieselbe nach der Mischungsregel berechenbar wäre. (Geradliniger Verlauf zwischen den Werten für die Komponenten) | | Abweichung der spezifischen Wärme vom geradlinigen Verlauf zwischen den Werten der reinen Komponenten | |
|------------------|--------|--|-----------------|--|---------------|---|-----------------|
| Aethylalkohol | Wasser | 0,5° bis 5,0° | 20,1° bis 26,0° | 39,0° bis 42,5° | 0,5° bis 5,0° | 20,1° bis 26,0° | 39,0° bis 42,5° |
| 0 | 100 | 1,005 | 0,999 | 0,999 ¹⁾ | 1,005 | 0,999 | 0,000 |
| 5 | 95 | 1,026 | 1,007 | 1,012 | 0,982 | 0,978 | 0,044 |
| 10 | 90 | 1,042 | 1,017 | 1,022 | 0,958 | 0,957 | 0,084 |
| 15 | 85 | 1,046 | 1,025 | 1,027 | 0,936 | 0,936 | 0,080 |
| 20 | 80 | 1,057 | 1,028 | 1,028 | 0,913 | 0,915 | 0,089 |
| 25 | 75 | 1,019 | 1,023 | 1,024 | 0,890 | 0,894 | 0,109 |
| 30 | 70 | 0,998 | 1,009 | 1,014 | 0,867 | 0,873 | 0,124 |
| 35 | 65 | 0,971 | 0,992 | 0,999 | 0,844 | 0,852 | 0,129 |
| 40 | 60 | 0,934 | 0,971 | 0,979 | 0,821 | 0,831 | 0,136 |
| 45 | 55 | 0,896 | 0,945 | 0,952 | 0,798 | 0,810 | 0,140 |
| 50 | 50 | 0,863 | 0,917 | 0,917 | 0,774 | 0,789 | 0,140 |
| 55 | 45 | 0,832 | 0,886 | 0,886 | 0,751 | 0,768 | 0,135 |
| 60 | 40 | 0,802 | 0,855 | 0,853 | 0,728 | 0,747 | 0,128 |
| 65 | 35 | 0,772 | 0,822 | 0,836 | 0,705 | 0,726 | 0,118 |
| 70 | 30 | 0,741 | 0,788 | 0,814 | 0,682 | 0,705 | 0,108 |
| 75 | 25 | 0,710 | 0,756 | 0,789 | 0,659 | 0,684 | 0,096 |
| 80 | 20 | 0,679 | 0,723 | 0,760 | 0,636 | 0,663 | 0,088 |
| 85 | 15 | 0,648 | 0,693 | 0,729 | 0,613 | 0,642 | 0,082 |
| 90 | 10 | 0,615 | 0,660 | 0,696 | 0,590 | 0,621 | 0,072 |
| 95 | 5 | 0,582 | 0,623 | 0,660 | 0,567 | 0,600 | 0,060 |
| 100 | 0 | 0,544 | 0,579 | 0,609 | 0,544 | 0,579 | 0,051 |
| | | | | | | | 0,043 |
| | | | | | | | 0,036 |
| | | | | | | | 0,026 |
| | | | | | | | 0,015 |
| | | | | | | | 0,000 |

1) Mittel aus den Werten von Lüdén und Barnes. Vgl. Kohlrausch, prakt. Physik, 10. Aufl., S. 195.

Tabelle 20.
Propylalkohol-Wassergemische.

| Gewichtsprocente | | Spezifische Wärme des Gemisches aus den Versuchswerten interpoliert von 5 zu 5 ^{0,0} | | | Spezifische Wärme des Gemisches, falls dieselbe nach der Mischungsregel berechenbar wäre. (Geradliniger Verlauf zwischen den Werten für die reinen Komponenten) | | | Abweichung der spezifischen Wärme von geradlinigen Verlauf zwischen den Werten der reinen Komponenten | | |
|--------------------|--------|---|-----------------|-----------------|---|-----------------|-----------------|---|-----------------|-----------------|
| Propyl- alkohol | Wasser | 0,2° bis 4,9° | 21,1° bis 26,6° | 38,6° bis 42,3° | 0,2° bis 4,9° | 21,1° bis 26,6° | 38,6° bis 42,3° | 0,2° bis 4,9° | 21,1° bis 26,6° | 38,6° bis 42,3° |
| 0 | 100 | 1,006 | 0,999 | 0,999 | 1,006 | 0,999 | 0,999 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 95 | 1,031 | 1,021 | 1,012 | 0,982 | 0,977 | 0,979 | 0,049 | 0,044 | 0,033 |
| 10 | 90 | 1,052 | 1,040 | 1,022 | 0,959 | 0,956 | 0,959 | 0,098 | 0,084 | 0,063 |
| 15 | 85 | 1,069 | 1,053 | 1,028 | 0,935 | 0,934 | 0,939 | 0,134 | 0,119 | 0,089 |
| 20 | 80 | 1,086 | 1,066 | 1,029 | 0,911 | 0,913 | 0,918 | 0,175 | 0,143 | 0,111 |
| 25 | 75 | 1,082 | 1,048 | 1,011 | 0,888 | 0,891 | 0,898 | 0,194 | 0,167 | 0,113 |
| 30 | 70 | 1,086 | 1,026 | 0,989 | 0,864 | 0,870 | 0,878 | 0,172 | 0,156 | 0,111 |
| 35 | 65 | 0,993 | 0,994 | 0,966 | 0,840 | 0,848 | 0,858 | 0,153 | 0,146 | 0,108 |
| 40 | 60 | 0,953 | 0,962 | 0,943 | 0,816 | 0,827 | 0,838 | 0,137 | 0,135 | 0,105 |
| 45 | 55 | 0,913 | 0,928 | 0,920 | 0,793 | 0,805 | 0,818 | 0,120 | 0,123 | 0,102 |
| 50 | 50 | 0,876 | 0,899 | 0,898 | 0,769 | 0,784 | 0,798 | 0,107 | 0,115 | 0,100 |
| 55 | 45 | 0,844 | 0,870 | 0,874 | 0,745 | 0,762 | 0,777 | 0,099 | 0,108 | 0,097 |
| 60 | 40 | 0,812 | 0,840 | 0,850 | 0,722 | 0,740 | 0,757 | 0,090 | 0,100 | 0,098 |
| 65 | 35 | 0,779 | 0,809 | 0,822 | 0,698 | 0,719 | 0,737 | 0,081 | 0,090 | 0,085 |
| 70 | 30 | 0,746 | 0,776 | 0,786 | 0,674 | 0,697 | 0,717 | 0,072 | 0,079 | 0,079 |
| 75 | 25 | 0,713 | 0,743 | 0,759 | 0,651 | 0,676 | 0,697 | 0,062 | 0,067 | 0,072 |
| 80 | 20 | 0,680 | 0,708 | 0,748 | 0,627 | 0,654 | 0,677 | 0,053 | 0,054 | 0,066 |
| 85 | 15 | 0,645 | 0,676 | 0,716 | 0,603 | 0,633 | 0,656 | 0,042 | 0,043 | 0,060 |
| 90 | 10 | 0,610 | 0,643 | 0,686 | 0,579 | 0,611 | 0,636 | 0,031 | 0,032 | 0,049 |
| 95 | 5 | 0,572 | 0,608 | 0,649 | 0,556 | 0,590 | 0,616 | 0,016 | 0,018 | 0,038 |
| 100 | 0 | 0,532 | 0,568 | 0,596 | 0,532 | 0,568 | 0,596 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Emil Bose,

Tabelle 21.
Methylalkohol-Wassergemische.

| Gewichtsprozente | | Spezifische Wärme des Gemisches aus den Versuchswerten interpoliert von 5 zu 5 % | | Spezifische Wärme des Gemisches, falls dieselbe nach der Mischungs- regel berechenbar wäre. (Geradliniger Verlauf zwischen den Werten für die Komponenten) | | Abweichung der spezifischen Wärme vom geradlinigen Verlauf zwischen den Werten der reinen Komponenten | |
|--------------------|--------|--|-----------------|--|---------------|---|-----------------|
| Methyl- alkohol | Wasser | 0,1° bis 5,1° | 21,4° bis 27,3° | 38,9° bis 42,0° | 0,1° bis 5,1° | 21,4° bis 27,3° | 38,9° bis 42,0° |
| 0 | 100 | 1,006 | 0,999 | 0,999 | 1,006 | 0,999 | 0,000 |
| 5 | 95 | 1,023 | 0,998 | 0,997 | 0,984 | 0,980 | 0,017 |
| 10 | 90 | 1,019 | 0,996 | 0,993 | 0,962 | 0,960 | 0,083 |
| 15 | 85 | 0,999 | 0,992 | 0,987 | 0,941 | 0,941 | 0,046 |
| 20 | 80 | 0,973 | 0,988 | 0,980 | 0,919 | 0,922 | 0,058 |
| 25 | 75 | 0,947 | 0,981 | 0,971 | 0,897 | 0,901 | 0,069 |
| 30 | 70 | 0,921 | 0,972 | 0,958 | 0,875 | 0,881 | 0,075 |
| 35 | 65 | 0,894 | 0,958 | 0,940 | 0,853 | 0,862 | 0,076 |
| 40 | 60 | 0,869 | 0,928 | 0,919 | 0,832 | 0,842 | 0,075 |
| 45 | 55 | 0,844 | 0,892 | 0,898 | 0,810 | 0,823 | 0,073 |
| 50 | 50 | 0,818 | 0,861 | 0,874 | 0,788 | 0,803 | 0,068 |
| 55 | 45 | 0,793 | 0,834 | 0,848 | 0,766 | 0,783 | 0,062 |
| 60 | 40 | 0,768 | 0,807 | 0,824 | 0,744 | 0,764 | 0,057 |
| 65 | 35 | 0,744 | 0,779 | 0,800 | 0,723 | 0,744 | 0,053 |
| 70 | 30 | 0,720 | 0,750 | 0,777 | 0,701 | 0,725 | 0,049 |
| 75 | 25 | 0,696 | 0,725 | 0,751 | 0,679 | 0,706 | 0,042 |
| 80 | 20 | 0,673 | 0,699 | 0,723 | 0,657 | 0,685 | 0,034 |
| 85 | 15 | 0,649 | 0,676 | 0,698 | 0,635 | 0,666 | 0,028 |
| 90 | 10 | 0,625 | 0,653 | 0,672 | 0,614 | 0,646 | 0,021 |
| 95 | 5 | 0,600 | 0,631 | 0,644 | 0,592 | 0,627 | 0,013 |
| 100 | 0 | 0,570 | 0,607 | 0,612 | 0,570 | 0,607 | 0,000 |

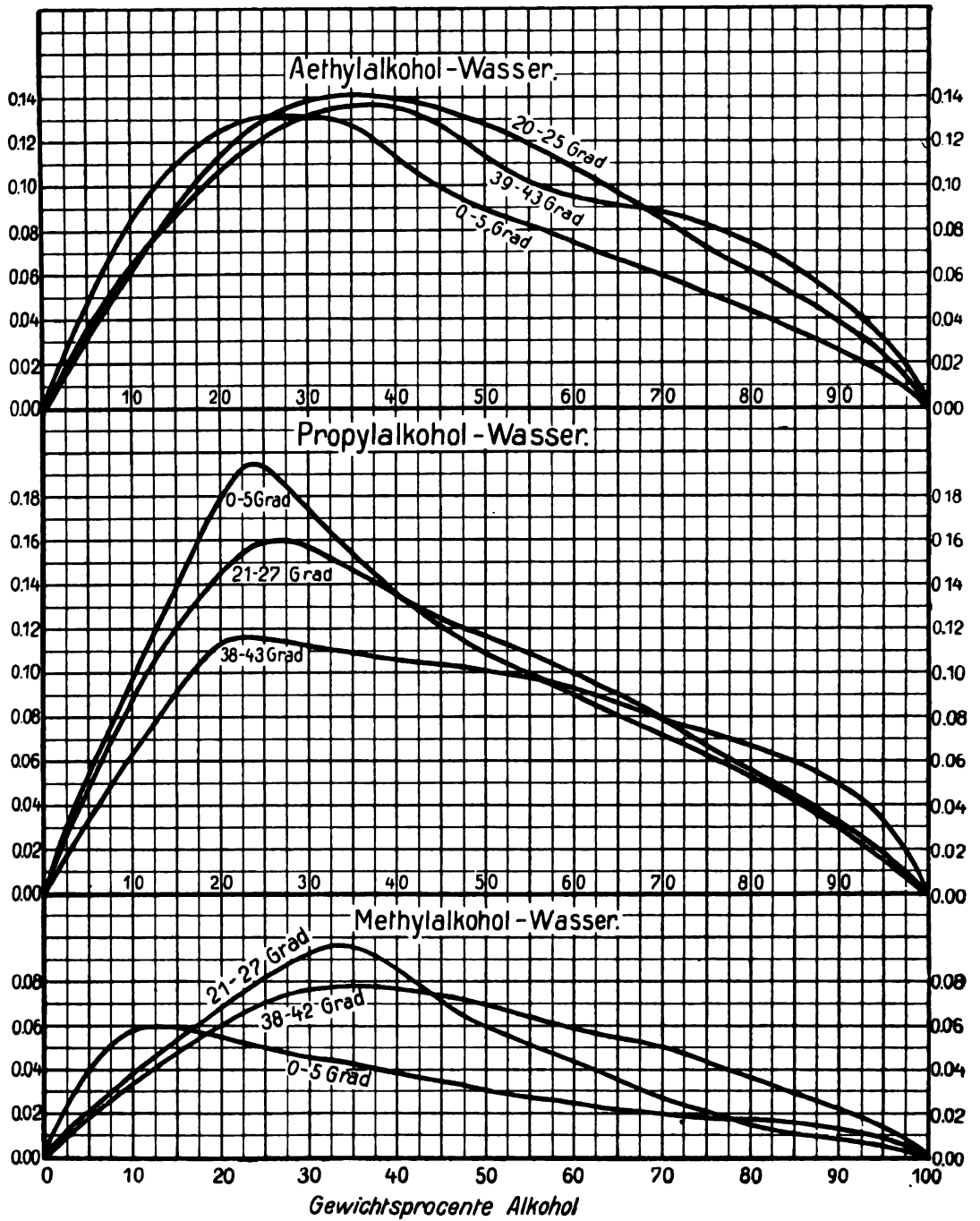


Fig. 7.

Calorimetrische Studien. II.

Von

Emil Bose.

**Wärmetönungen beim Mischen von Alkoholen mit Wasser
und beim Vermischen zweier Alkohole, nach Versuchen von
Emil und Margrete Bose.**

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 28. Juli 1906.

Die im ersten Teile der calorimetrischen Studien mitgeteilten Bestimmungen der spezifischen Wärme von Wasseralkoholgemischen und von Gemischen zweier Alkohole waren in erster Linie unternommen, um als Hilfsmittel für die Bestimmung der Mischungswärmen zu dienen und des weiteren eine umfassende Prüfung der thermodynamischen Beziehung zu ermöglichen, wonach die Abweichung der spezifischen Wärme eines Gemisches von der sogenannten Mischungsregel entgegengesetzt gleich sein soll der Aenderung der beim Mischen auftretenden und auf ein Gramm Mischung bezogenen Wärmetönung mit der Temperatur. Die Verwendung der Werte für die spezifischen Wärmen des Gemisches für die Bestimmung der Mischungswärmen kann auf verschiedene Weise umgangen werden, z. B. durch Verwendung des isotherm arbeitenden Eiscalorimeters, (dann ist man aber an die Verwendung ziemlich geringer Substanzmengen gebunden), oder dadurch, daß man die Mischung in einem Gefäße sich vollziehen läßt, welches in ein mit Wasser gefülltes Calorimeter eintaucht. Ist alsdann die Wassermasse im Calorimeter groß gegen die beim Mischen verwendete Substanzmenge, so spielt der Wasserwert des Gemisches nur die Rolle einer Korrektion, und es genügt alsdann in den meisten Fällen, statt der Wärmekapazität des Gemisches die der Komponenten zu setzen. Dies Verfahren hat aber den Nachteil, daß es nur bei sehr großen

Wärmetönungen verwendet werden kann. falls man nicht zur thermoelektrischen Temperaturmessung greifen will, andernfalls werden die auftretenden Temperaturänderungen ihrer Kleinheit wegen nur ungenau meßbar. Ich habe es deshalb für richtig gehalten, in meinem Falle, wo die Wärmetönungen nicht sehr groß waren, und wo andererseits die spezifischen Wärmen der Gemische ganz erheblich von der Mischungsregel abwichen, einen anderen Weg einzuschlagen, zumal die Beschaffung reiner Substanzen in größeren Quantitäten in den untersuchten Fällen keine unerschwinglichen Kosten verursachte. Das Eiscalorimeter zu verwenden, wäre ja nur bei Null Grad zugänglich gewesen und es lag mir gerade daran, bei verschiedenen Temperaturen nach der gleichen Methode arbeiten zu können. Nun läßt sich zwar das Prinzip des Bunsenschen Eiscalorimeters auch auf andere Temperaturen verallgemeinern, indem zum Beispiel Naphtalin eine sehr geeignete Substanz ist, die in genügender Reinheit leicht erhältlich ist und ein ganz analoges Instrument für eine Temperatur von ca. 80 Grad zu schaffen gestattet, zumal eine ganz erhebliche Volumänderung beim Schmelzen stattfindet und die Schmelzwärme überdies klein ist¹⁾. Erheblich einfacher und allgemeiner verwendbar dagegen ist das Verfahren, welches ich hier eingeschlagen habe. Dasselbe besteht einfach darin, calorimetrisch die Temperaturänderung beim Mischen zu ermitteln und dann außerdem die spezifische Wärme eines Gemisches der gleichen Zusammensetzung zu bestimmen.

Beschreibung der Versuchsanordnung.

Das Grundprinzip der Anordnung ist wieder wie bei meinen spezifischen Wärmebestimmungen, die ganze calorimetrische Anordnung in einer Hülle unterzubringen, welche auf beliebiger aber genügend konstanter Temperatur gehalten werden kann. Figur 1 zeigt zunächst, daß der Hauptteil des Ganzen ein großes doppelwandiges Gefäß ist, welches sowohl im Innenraum wie zwischen den beiden Wänden mit Wasser gefüllt ist. Die Wassermasse des Mantels wird mit Hilfe einer Prytzschen Schlauchpumpe durch die drei Teile des Deckels getrieben, welcher das große Gefäß bedeckt. Da die Temperatur des Deckels stets nach Möglichkeit ein wenig höher sein soll, als die des offenen Wassers im

1) Für die Untersuchung kostbarer Substanzen in Bezug auf spezifische Wärmen, Mischungswärmen etc. bei höherer Temperatur dürfte die Durcharbeitung des Naphtalin-Calorimeters eine lohnende Aufgabe sein.

Innenräume, damit keine Kondensation am Deckel stattfindet, so wird das cirkulierende Wasser an der Stelle entnommen, wo

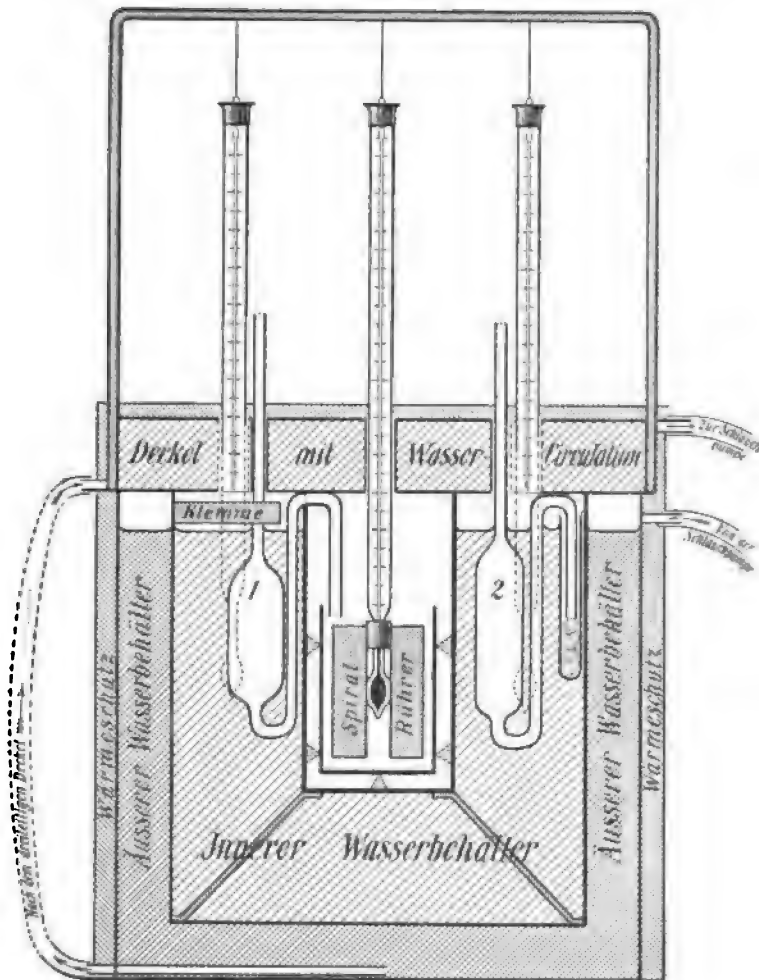


Fig. 1.

der ganzen Anordnung die Wärme zugeführt wird, nämlich von der Mitte des Bodens, unter welchem sich die meist kleine Heizflamme befindet, die ausreicht das Ganze um die gewünschte Anzahl von Graden über Zimmertemperatur zu halten. Das Entnahmerohr ist seitlich eingelötet und zwar unmittelbar am Boden, bis an dessen Mitte es reicht. Von hier wird also das Wasser entnommen, strömt von dort der Reihe nach durch alle drei Teile des Deckels und darauf durch die Schlauchpumpe zurück zur Hauptwassermasse. Es wird durch diese Anordnung erreicht,

daß die Wassertemperatur im mittleren Deckelteil über dem eigentlichen Calorimeter um etwa 0,1 Grad höher ist, wie die der übrigen Umgebung desselben, was durch zwei Thermometer kontrolliert wird, die beim Eintritt und Austritt des Wassers in den Deckel angebracht sind. Der Inhalt des inneren Wasserbehälters wird durch zwei Turbinen durchgerührt, welche einander gegenüber darin angebracht wird und deren obere Lager sich in den beiden festen Teilen des Deckels befinden.

Der Deckel besteht nämlich aus zwei einander gleichen festen Kreissegmenten und einem zwischen ihnen abgegrenzten beweglichen Stück. (Vergl. die punktierten geraden Linien der Figur 2.) Dieses

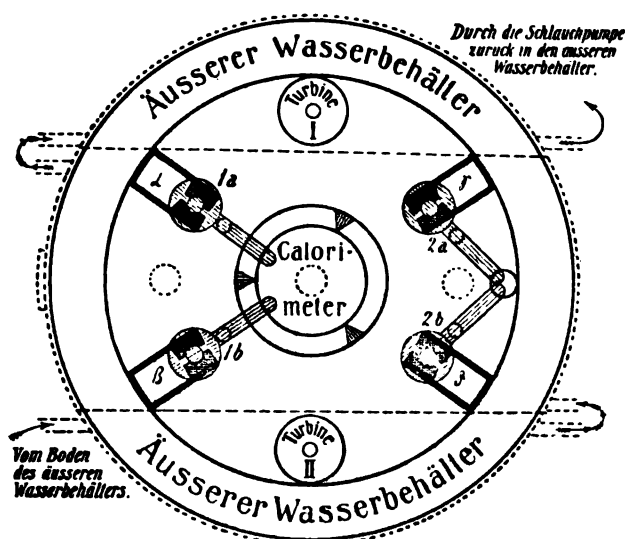


Fig. 2.

1a und 1b, Pipettenpaar I [in Ausblasestellung, Mündung in das Calorimeter reichend. Siehe Figur 1 links].

2a und 2b, Pipettenpaar II [Mündung in ein schwimmendes Reagenzglas tauchend, vergl. Figur 1 links].

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Klemmen z. Halten d. 4 Pipetten. Die punktierte Linie geben die Begrenzungen des Deckels, dessen mittlerer Teil mit den Thermometern herausgehoben werden kann; die beiden äußeren segmentförmigen Teile sind fest und tragen je eine Turbine zum Durchrühren des inneren Wasserbades.

bewegliche mittlere Stück des Deckels ist derartig an der Decke des Zimmers aufgehängt, daß es vermittels zweier über Rollen geführter dünner Drahtseile mit passenden Gegengewichten ausbalanciert ist und trotz seines wegen des Wasserinhaltes ganz erheblichen Gewichtes doch spielend bewegt werden kann. An diesem Mittelstück hängen an einem soliden Eisenbandbügel (siehe Figur 1) drei Thermometer, von denen das mittlere, mit Spiralrührer versehene, in das eigentliche Mischungs-calorimeter taucht, während die beiden seitlichen zur Bestimmung der Temperatur der Flüssigkeiten vor dem Mischen dienen. Um ohne großen Zeitverlust zwei Mischversuche hintereinander machen zu können, ist das innere Gefäß zur Aufnahme von 4 Pipetten eingerichtet, von denen also stets

je zwei für einen Mischversuch gebraucht werden. Die zwei für den ersten Versuch bestimmten Pipetten sind derart eingesetzt, daß ihre Ausblaseöffnungen in das eigentliche Mischungs-calorimeter hineinreichen. Nachdem durch vorherige Temperaturablesungen die Temperaturen der Flüssigkeiten wie des Calorimeters ermittelt worden sind (Vorperiode), werden die beiden Pipetten in das Calorimeter hinein ausgeblasen (mit Hilfe zweier kleiner Gummihandgebläse) und es erfolgt nunmehr in diesem die Durchmischung und die Bestimmung der beim Mischen stattfindenden Temperaturänderung durch Beobachtung des mittleren Thermometers, wobei selbstredend in der üblichen Weise die Nachperiode zur Berücksichtigung des Wärmeaustausches mit der Umgebung verfolgt wird u. s. w. Ueber die Methodik ist in dieser Beziehung alles genügend bekannt und nach den z. B. im Kohlrausch gegebenen Anleitungen in sinn-gemäßer Weise auf unsern Fall übertragen worden, sodaß darüber wenig zu sagen bleibt. Nach dem ersten Versuch wird das gefüllte Calorimeter entfernt, desgleichen die leeren Pipetten, ein neues möglichst schon auf nahe die richtige Temperatur gebrachtes Calorimeter eingesetzt und die zwei nächsten Pipetten, welche sich bisher in Ruhestellung befanden, nach dem Calorimeter gewendet. Alles das ist in weniger als zwei Minuten geschehen und der Deckel wieder aufgesetzt. Nach einer halbstündigen Pause etwa ist alles bereit für die Anstellung des zweiten Versuches. Sofort nach diesem werden vier neue Pipetten, die in der Pause zwischen den beiden Versuchen gefüllt und gewogen wurden, eingesetzt, und der Apparat wird nun unter fortgesetztem Betrieb von Rührung und Cirkulation so lange (wenigstens drei bis vier Stunden) sich selbst überlassen, bis der Inhalt der Pipetten Zeit hat, die Temperatur des Wasserbades anzunehmen. Auf diese Weise konnten bequem an einem Tage vier Mischungsversuche ausgeführt werden und die Wartezeit wurde zur Ausführung der in Teil I beschriebenen Messungen der spezifischen Wärmen der Gemische benutzt.

Die Bestimmung der beim Mischen eintretenden Temperaturerhöhung ist bei der gewählten Anordnung leicht auszuführen und einer ganz erheblichen Genauigkeit fähig, des weiteren sind die erhaltenen Zahlen auch dann noch von Wert, wenn eine Neubestimmung der spezifischen Wärmen der Gemische ausgeführt werden sollte, da jederzeit mit ihnen die entsprechende Umrechnung auf die Mischungswärme wieder ausgeführt werden kann.

Leistet man bei der hier ausgearbeiteten Methode Verzicht auf einen kleinen Teil der Genauigkeit, so lassen sich leicht die Dimensionen der Apparate ganz erheblich reduzieren und zwar

sowohl für die Bestimmung der spezifischen Wärmen wie für die eigentlichen Mischversuche. Als inneres Calorimeter kann in beiden Fällen ein ganz kurzes Reagenzglas mit wenigen ccm Inhalt dienen und an einem Thermometer mit sehr kleinem Quecksilbergefaß läßt sich ohne erhebliche Schwierigkeiten ein winziger Heizrührer herstellen. Richtet man die Sache derart ein, daß man das Thermometer mit Heizrührer direkt im Mischungs calorimeter hat, so kann man an jeden Mischungsversuch in wenigen Minuten die spezifische Wärmebestimmung des Gemisches anschließen und so auch bei recht theuern Substanzen, wo ein vorsichtiges Haushalten mit dem Material geboten ist, die Untersuchung durchführen¹⁾.

Das erhaltene Beobachtungsmaterial.

Die Resultate der nach der oben beschriebenen Methode ausgeführten Versuche sind in den folgenden Tabellen niedergelegt. Es wurden insbesondere untersucht die Wärmetönungen bei der Mischung von Wasser mit Methylalkohol, Aethylalkohol und Propylalkohol und bei je drei verschiedenen Temperaturen, und ferner die Wärmetönungen bei der Mischung je zweier der drei Alkohole unter sich, diese aber nur bei zwei verschiedenen Temperaturen, da hier keine erhebliche Temperaturabhängigkeit vorliegt. Die folgenden Tabellen enthalten stets die Mengen der Komponenten der erzeugten Mischung, gewonnen durch Wägung der Pipetten vor und nach dem Versuch, die procentische Zusammensetzung des Gemisches, die beim Mischen eingetretene Temperaturänderung, die spezifische Wärme des Gemisches, welche der Berechnung der Mischungswärmen zu Grunde gelegt worden ist, die Anzahl der beim Mischen entstandenen oder verbrauchten Grammc calorien unter Berücksichtigung der Wasserwerte von Calorimeter, Rührer und Thermometer. Daraus ist dann die Wärmetönung pro 1 gr Mischung berechnet worden. Diese bezieht sich auf die Temperatur, welche als Anfangstemperatur des Versuchs angegeben ist. Es sind dann ferner diese Wärmetönungen vermittels der aus der Gesamtheit der bei verschiedenen Temperaturen angestellten Versuche berechneten Temperaturkoeffizienten umgerechnet worden auf die mittlere Anfangstemperatur der ganzen Versuchsreihe. So ergibt jede der Tabellen als Resultat Punkte der Mischungswärmen-

1) Frl. B. May Clark, die auf meine Veranlassung und mit meinen Apparaten in letzter Zeit eine Anzahl anderer Substanzpaare (darunter auch Fälle mit begrenzter Mischbarkeit) bei verschiedenen Temperaturen untersucht hat, worüber sie selbst an anderem Orte berichten wird, wird voraussichtlich ihre Untersuchung auch in dieser Richtung noch weiter ausdehnen.

isotherme für eine bestimmte Temperatur. Außer bei den eigentlichen Haupttemperaturen sind noch in einzelnen Fällen ein paar Mischversuche bei höheren Temperaturen gemacht, welche die aus den übrigen gezogenen Resultate bestätigen. So vervollständigt z. B. Tabelle 4 das Bild, welches sich aus den in Tabelle 1—3 gewonnenen drei Isothermen für Aethylalkohol-Wassergemische ergibt. Tabelle 5 faßt die Resultate der vier ersten Tabellen

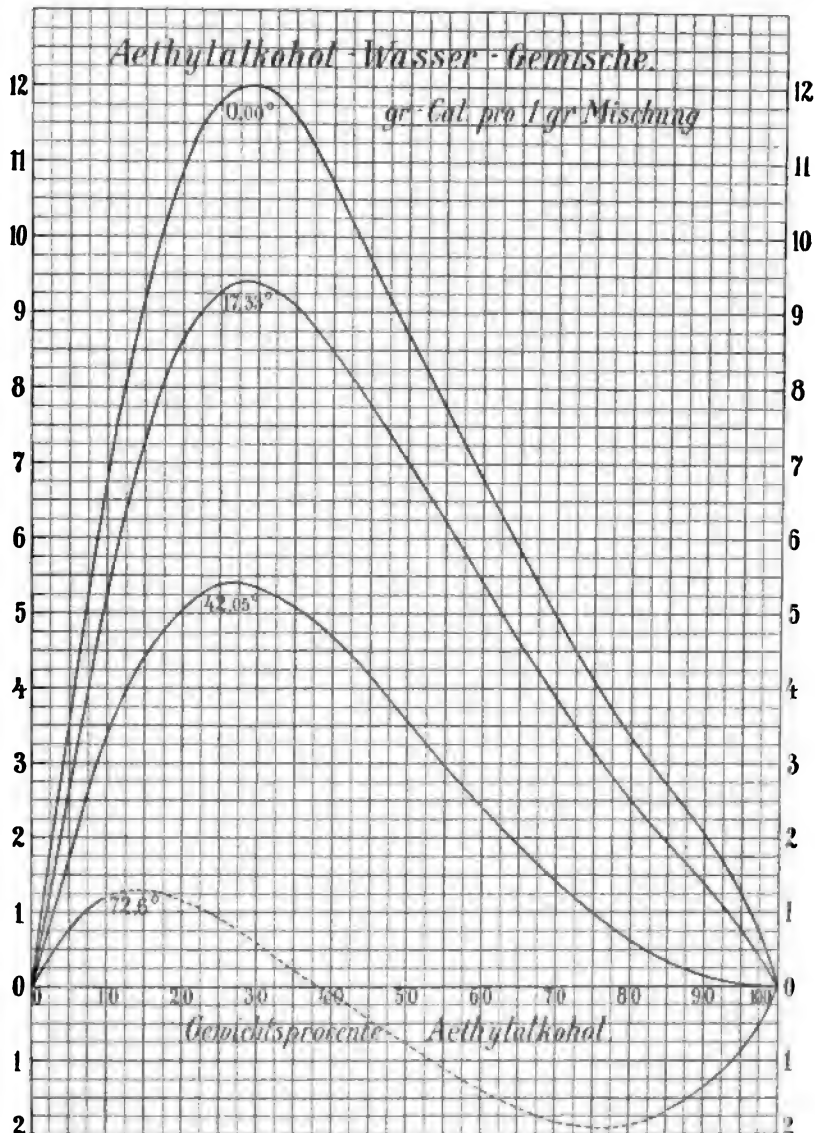


Fig. 3.

zusammen, indem dieselbe die durch graphische Interpolation gefundenen Werte für die Wärmetönung von fünf zu fünf Prozent Alkoholgehalt darstellt.

Tabelle 5 und deren graphische Darstellung in Figur 3 läßt leicht erkennen, daß die Wärmetönung beim Mischen von Aethylalkohol und Wasser bei Null Grad Celsius ziemlich erhebliche Werte erreicht. Mit steigender Temperatur nimmt die Wärmetönung aber ganz beträchtlich ab und verläuft bei 42 Grad schon derart, daß deutlich mit nur wenig weiter steigender Temperatur ein Vorzeichenwechsel bei den alkoholreichen Mischungen zu erwarten ist. Die wenigen orientirenden Versuche bei ca. 74 Grad bestätigen dies völlig, da zwar bei sehr verdünnten Aethylalkohol-Wassergemischen die Wärmetönung noch positive Werte besitzt, bei den alkoholreichen dagegen der Vorzeichenwechsel längst vollzogen ist. Erheblich höhere Temperaturen ins Bereich der Untersuchung zu ziehen verbietet sich wegen des Siedepunktes des Aethylalkohols, falls man nicht zur Anwendung höherer Drücke schreiten will. Es unterliegt jedoch keinem Zweifel, daß man bei Verwendung erheblich höherer Temperaturen zu beträchtlichen negativen Werten und durchaus im negativen verlaufenden Isothermen kommen würde.

Tabelle 1.
Aethylalkohol - Wasser.
Mischversuche bei 0 Grad Celsius.

| Numer des Versuchs | Aethylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 0,00° reduziert |
|-----------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|---|
| 83 | 15,24 | 239,97 | 5,97 | 94,03 | 3,77 | 1,031 | 1065 | + 0,02 | 4,173 | 4,174 |
| 77 | 39,63 | 234,38 | 14,46 | 85,54 | 8,01 | 1,044 | 2448 | 0,00 | 8,934 | 8,934 |
| 74 | 57,34 | 218,62 | 20,78 | 79,22 | 10,06 | 1,033 | 3064 | 0,00 | 11,103 | 11,103 |
| 79 | 69,37 | 174,13 | 28,49 | 71,51 | 11,09 | 1,004 | 2928 | — 0,07 | 12,024 | 12,013 |
| 78 | 84,17 | 157,27 | 34,86 | 65,14 | 11,04 | 0,971 | 2803 | 0,00 | 11,610 | 11,610 |
| 73 | 116,85 | 154,47 | 43,07 | 56,93 | 10,26 | 0,909 | 2730 | + 0,07 | 10,062 | 10,069 |
| 76 | 125,18 | 124,02 | 50,23 | 49,77 | 9,22 | 0,860 | 2156 | 0,00 | 8,652 | 8,652 |
| 84 | 124,62 | 79,06 | 61,18 | 38,82 | 7,41 | 0,794 | 1343 | + 0,01 | 6,594 | 6,595 |
| 75 | 174,86 | 73,44 | 70,42 | 29,58 | 5,95 | 0,738 | 1206 | + 0,01 | 4,857 | 4,858 |
| 80 | 175,58 | 50,04 | 77,82 | 22,18 | 4,71 | 0,693 | 828 | + 0,01 | 3,670 | 3,671 |
| 82 | 175,94 | 32,91 | 84,24 | 15,76 | 3,72 | 0,653 | 580 | + 0,02 | 2,777 | 2,778 |
| 81 | 190,42 | 15,17 | 92,62 | 7,38 | 2,39 | 0,598 | 340 | + 0,02 | 1,654 | 1,655 |

Tabelle 2.

Aethylalkohol - Wasser.

Mischversuche bei Zimmertemperatur.

| Nummer des Versuches | gr Aethylalkohol | gr Wasser | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 17,33° reduziert |
|-------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| 18 | 18,71 | 239,02 | 7,26 | 92,74 | 3,48 | 1,011 | 978,2 | 18,35 | 3,795 | 3,869 |
| 20 | 19,66 | 240,49 | 7,55 | 92,45 | 3,58 | 1,012 | 1016 | 18,47 | 3,906 | 3,987 |
| 19 | 20,90 | 218,62 | 8,72 | 91,28 | 4,05 | 1,015 | 1070 | 18,43 | 4,467 | 4,556 |
| 17 | 23,27 | 221,91 | 9,48 | 90,52 | 4,36 | 1,016 | 1180 | 18,29 | 4,805 | 4,902 |
| 14 | 38,94 | 191,37 | 16,70 | 83,30 | 6,76 | 1,028 | 1739 | 18,90 | 7,552 | 7,760 |
| 16 | 38,70 | 186,71 | 17,15 | 82,85 | 6,75 | 1,029 | 1704 | 19,75 | 7,558 | 7,900 |
| 15 | 57,13 | 155,43 | 26,8 | 73,2 | 8,01 | 1,026 | 1916 | 19,69 | 9,014 | 9,366 |
| 13 | 59,22 | 155,77 | 27,5 | 72,5 | 8,18 | 1,025 | 1975 | 18,79 | 9,189 | 9,407 |
| 5 | 60,08 | 149,05 | 28,7 | 71,3 | 8,63 | 1,020 | 2023 | 15,10 | 9,673 | 9,327 |
| 7 | 60,46 | 139,52 | 30,23 | 69,77 | 8,47 | 1,015 | 1898 | 16,55 | 9,490 | 9,378 |
| 8 | 78,16 | 147,36 | 34,6 | 65,4 | 8,47 | 0,995 | 2074 | 16,70 | 9,198 | 9,120 |
| 6 | 78,18 | 143,35 | 35,2 | 64,8 | 8,59 | 0,990 | 2060 | 15,20 | 9,298 | 9,053 |
| 23 | 114,52 | 148,31 | 43,58 | 56,42 | 7,52 | 0,949 | 2034 | 18,88 | 7,739 | 7,921 |
| 24 | 116,36 | 146,89 | 44,20 | 55,80 | 7,52 | 0,946 | 2027 | 18,96 | 7,699 | 7,886 |
| 1 | 117,51 | 99,38 | 54,2 | 45,8 | 6,81 | 0,886 | 1453 | 14,25 | 6,697 | 6,438 |
| 3 | 115,75 | 95,52 | 54,8 | 45,2 | 6,67 | 0,881 | 1383 | 14,25 | 6,545 | 6,272 |
| 2 | 105,88 | 75,73 | 58,3 | 41,7 | 6,25 | 0,862 | 1105,6 | 14,32 | 6,088 | 5,836 |
| 4 | 118,75 | 75,07 | 62,2 | 37,8 | 5,78 | 0,837 | 1056,0 | 14,32 | 5,448 | 5,206 |
| 11 | 123,40 | 73,82 | 62,6 | 37,4 | 5,24 | 0,834 | 972,5 | 17,31 | 4,921 | 4,920 |
| 9 | 125,02 | 73,90 | 62,8 | 37,2 | 5,23 | 0,832 | 975,4 | 17,10 | 4,903 | 4,888 |
| 10 | 154,69 | 49,93 | 75,6 | 24,4 | 3,56 | 0,750 | 619,4 | 17,19 | 3,027 | 3,019 |
| 12 | 154,04 | 49,42 | 75,7 | 24,3 | 3,52 | 0,750 | 609,3 | 17,39 | 2,995 | 2,998 |
| 21 | 176,08 | 20,93 | 89,38 | 10,62 | 1,84 | 0,660 | 278,0 | 18,83 | 1,411 | 1,467 |
| 22 | 189,75 | 22,20 | 89,60 | 10,40 | 1,84 | 0,659 | 294,6 | 18,87 | 1,390 | 1,447 |

Tabelle 3.

Aethylalkohol - Wasser.

Mischversuche bei ca. 42 Grad Celsius.

| Numer des Versuchs | Aethylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 42,05° reduziert |
|-----------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| 115 | 14,76 | 214,47 | 6,44 | 93,56 | 1,91 | 1,018 | 490 | 42,45 | 2,14 | 2,16 |
| 109 | 34,04 | 211,71 | 13,85 | 86,15 | 3,59 | 1,028 | 989 | 44,05 | 4,02 | 4,23 |
| 108 | 52,52 | 199,18 | 20,87 | 79,13 | 4,51 | 1,028 | 1270 | 42,66 | 5,05 | 5,14 |
| 118 | 72,18 | 209,54 | 25,62 | 74,38 | 4,96 | 1,024 | 1545 | 41,52 | 5,48 | 5,40 |
| 116 | 91,80 | 184,92 | 33,17 | 66,83 | 4,69 | 1,003 | 1410 | 42,40 | 5,09 | 5,15 |
| 117 | 111,89 | 191,30 | 36,90 | 63,10 | 4,75 | 0,984 | 1526 | 41,34 | 5,03 | 4,92 |
| 106 | 108,81 | 150,39 | 41,03 | 58,97 | 4,95 | 0,963 | 1378 | 38,10 | 5,19 | 4,70 |
| 107 | 110,64 | 128,62 | 46,24 | 53,76 | 3,77 | 0,935 | 930 | 42,57 | 3,88 | 3,96 |
| 114 | 142,88 | 101,56 | 58,45 | 41,55 | 2,53 | 0,870 | 596 | 42,72 | 2,43 | 2,53 |
| 112 | 158,42 | 61,48 | 71,07 | 28,93 | + 1,47 | 0,808 | 299 | 41,80 | 1,34 | 1,32 |
| 111 | 168,14 | 30,23 | 84,76 | 15,24 | + 0,43 | 0,735 | 72,6 | 41,88 | 0,366 | 0,36 |
| 113 | 168,97 | 12,14 | 93,30 | 6,70 | + 0,06 | 0,678 | 8,7 | 43,20 | 0,048 | 0,06 |

Tabelle 4.

Aethylalkohol - Wasser.

Orientierende Versuche bei ca. 75 Grad Celsius.

| Numer des Versuchs | Aethylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Korrigierte Tempe- raturänderung | Spezifische Wärme (Näherungswert) | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung |
|-----------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 145 | 17,1 | 350,1 | 4,66 | 95,34 | + 0,70 | 1,00 | 74,2 | + 0,74 |
| 146 | 16,7 | 162,7 | 9,3 | 90,7 | + 1,05 | 1,00 | 74,1 | + 1,15 |
| 144 | 149,3 | 21,94 | 87,2 | 12,8 | — 1,9 | 0,74 | 73,8 | — 1,50 |
| 143 | 327,0 | 21,24 | 93,9 | 6,1 | — 1,2 | 0,75 | 74,0 | — 0,91 |
| 142 | 265,6 | 11,84 | 95,7 | 4,3 | — 1,0 | 0,78 | 74,0 | — 0,77 |

Tabelle 5.

Aethylalkohol - Wassergemische.

Wärmetönungen pro 1 gr Mischung von 5 zu 5 Gewichtsprozenten. Durch graphische Interpolation aus den Versuchswerten (Tabelle 1—4) erhalten.

| Gewichts- procente Aethyl- alkohol | $\vartheta = 0,00^{\circ}$ | $\vartheta = 17,33^{\circ}$ | $\vartheta = 42,05^{\circ}$ | $\vartheta = 74,0^{\circ}$ | Gewichts- procente Wasser |
|---|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 100 |
| 5 | 3,56 | 2,80 | 1,74 | + 0,81 | 95 |
| 10 | 6,71 | 5,22 | 3,37 | + 1,20 | 90 |
| 15 | 9,17 | 7,24 | 4,44 | | 85 |
| 20 | 10,89 | 8,61 | 5,08 | | 80 |
| 25 | 11,80 | 9,27 | 5,37 | | 75 |
| 30 | 12,00 | 9,39 | 5,33 | | 70 |
| 35 | 11,61 | 9,09 | 5,08 | | 65 |
| 40 | 10,74 | 8,50 | 4,69 | | 60 |
| 45 | 9,68 | 7,81 | 4,17 | | 55 |
| 50 | 8,69 | 7,06 | 3,55 | | 50 |
| 55 | 7,74 | 6,27 | 2,95 | | 45 |
| 60 | 6,78 | 5,40 | 2,40 | | 40 |
| 65 | 5,84 | 4,60 | 1,90 | | 35 |
| 70 | 4,93 | 3,83 | 1,42 | | 30 |
| 75 | 4,08 | 3,13 | 1,01 | | 25 |
| 80 | 3,34 | 2,50 | 0,64 | | 20 |
| 85 | 2,69 | 1,95 | 0,36 | — 1,64 | 15 |
| 90 | 2,01 | 1,39 | 0,16 | — 1,30 | 10 |
| 95 | 1,19 | 0,76 | 0,04 | — 0,81 | 5 |
| 100 | 0,00 | 00,0 | 0,00 | 0,00 | 0 |

Wie aus den folgenden Tabellen 6—10 und Figur 4 hervorgeht, die sich auf das an Propylalkohol-Wassergemischen gewonnene Beobachtungsmaterial beziehen, kommt man hier dem vollständigen Vorzeichen-Wechsel der Wärmetönung erheblich leichter nahe.

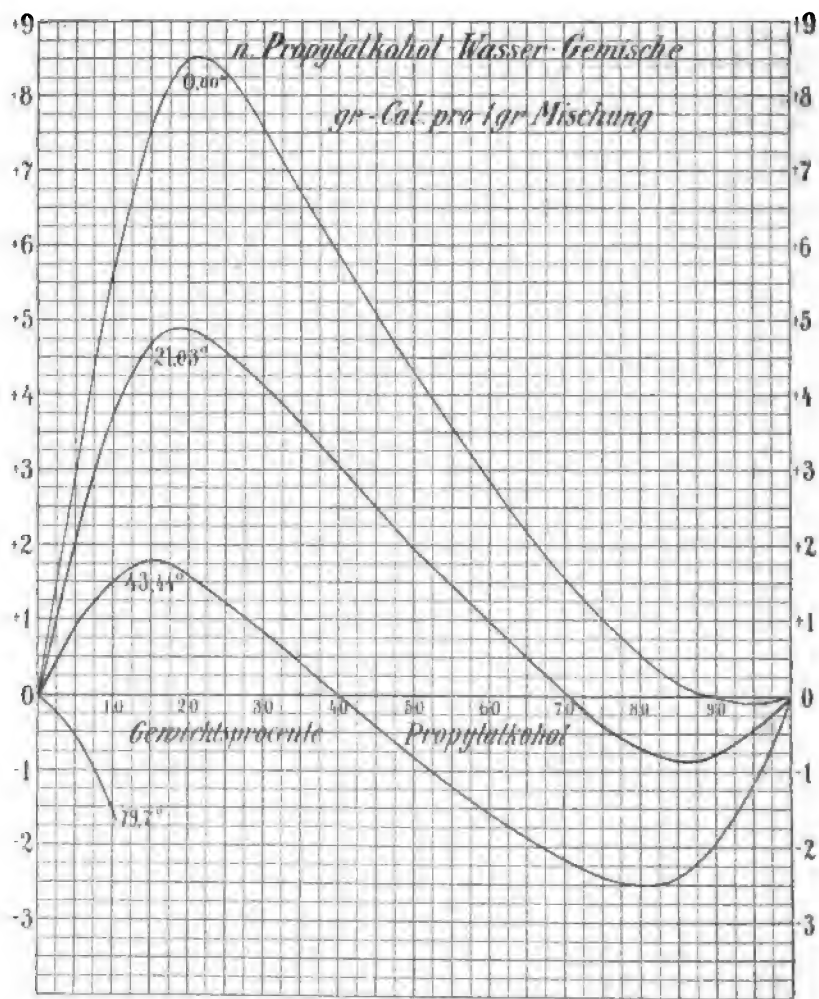


Fig. 4.

Tabelle 6.
Propylalkohol - Wasser.
 Mischversuche bei 0 Grad Celsius.

| Numer des Versuches | Propylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 0,00° reduziert |
|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|---|
| 98 | 19,55 | 239,04 | 7,66 | 92,44 | 3,98 | 1,089 | 1147 | + 0,01 | 4,436 | 4,436 |
| 95 | 39,14 | 220,94 | 15,05 | 84,95 | 6,66 | 1,069 | 1981 | 0,00 | 7,617 | 7,617 |
| 97 | 57,28 | 220,85 | 20,59 | 79,41 | 7,38 | 1,085 | 2367 | 0,00 | 8,510 | 8,510 |
| 91 | 79,19 | 220,28 | 26,44 | 73,56 | 7,14 | 1,068 | 2423 | + 0,02 | 8,091 | 8,094 |
| 92 | 108,54 | 210,78 | 33,99 | 66,01 | 6,40 | 1,002 | 2173 | + 0,02 | 6,805 | 6,808 |
| 99 | 118,42 | 145,62 | 44,85 | 55,15 | 5,19 | 0,913 | 1353 | + 0,05 | 5,124 | 5,131 |
| 100 | 125,56 | 110,17 | 53,26 | 46,74 | 4,10 | 0,854 | 905,3 | + 0,06 | 3,840 | 3,846 |
| 89 | 167,05 | 85,03 | 66,27 | 33,73 | 2,39 | 0,770 | 510,5 | + 0,05 | 2,025 | 2,029 |
| 90 | 179,15 | 66,36 | 72,97 | 27,03 | 1,54 | 0,726 | 304,4 | + 0,01 | 1,240 | 1,241 |
| 93 | 193,97 | 45,22 | 81,09 | 18,91 | 0,57 | 0,673 | 102,9 | + 0,01 | 0,430 | 0,431 |
| 94 | 179,20 | 24,46 | 87,99 | 12,01 | 0,08 | 0,622 | 11,7 | + 0,02 | 0,057 | 0,058 |

Tabelle 7.
Propylalkohol - Wasser.
 Mischversuche bei Zimmertemperatur.

| Numer des Versuches | Propylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 21,03° reduziert |
|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| 43 | 18,24 | 239,24 | 7,084 | 92,916 | 2,59 | 1,029 | 740,7 | 21,44 | 2,877 | 2,906 |
| 44 | 38,34 | 220,77 | 14,80 | 85,20 | 4,14 | 1,051 | 1212,2 | 21,80 | 4,679 | 4,717 |
| 51 | 54,72 | 196,74 | 21,76 | 78,24 | 4,21 | 1,052 | 1200 | 21,20 | 4,771 | 4,802 |
| 41 | 58,75 | 145,00 | 28,83 | 71,17 | 3,61 | 1,029 | 833,2 | 22,25 | 4,088 | 4,298 |
| 42 | 77,71 | 146,86 | 34,60 | 65,40 | 3,25 | 0,997 | 774,5 | 22,18 | 3,448 | 3,616 |
| 52 | 114,47 | 145,99 | 43,95 | 56,05 | 2,54 | 0,937 | 673,6 | 21,15 | 2,586 | 2,602 |
| 46 | 117,14 | 96,67 | 54,79 | 45,21 | 1,60 | 0,869 | 330,1 | 20,00 | 1,544 | 1,441 |
| 45 | 124,94 | 73,25 | 63,04 | 36,96 | 0,81 | 0,816 | 148,1 | 19,91 | + 0,747 | 0,648 |
| 48 | 172,75 | 75,27 | 69,65 | 30,35 | 0,06 | 0,774 | + 12,7 | 20,86 | + 0,051 | + 0,039 |
| 47 | 183,80 | 46,63 | 80,19 | 19,81 | - 0,79 | 0,707 | - 148,1 | 20,69 | - 0,629 | - 0,647 |
| 50 | 176,32 | 29,51 | 85,66 | 14,34 | - 1,08 | 0,672 | - 171,5 | 20,80 | - 0,833 | - 0,844 |
| 49 | 191,56 | 16,13 | 92,23 | 7,76 | - 0,80 | 0,630 | - 121,6 | 20,61 | - 0,585 | - 0,648 |

Tabelle 8.

Propylalkohol - Wasser.

Mischversuche bei ca. 43 Grad Celsius.

| Numer des Versuches | Propylalkohol gr | Wasser lt | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 43,44° reduziert |
|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| 132 | 18,67 | 225,62 | 7,64 | 92,36 | + 1,14 | 1,016 | + 309 | 43,48 | + 1,265 | + 1,269 |
| 136 | 38,06 | 205,72 | 15,61 | 84,39 | + 1,60 | 1,026 | + 437 | 43,73 | + 1,793 | + 1,831 |
| 133 | 54,35 | 207,74 | 20,74 | 79,26 | + 1,38 | 1,026 | + 403 | 43,54 | + 1,538 | + 1,553 |
| 134 | 76,74 | 206,34 | 27,11 | 72,89 | + 1,04 | 1,000 | + 318 | 42,76 | + 1,123 | + 1,020 |
| 135 | 107,75 | 183,45 | 37,00 | 63,00 | + 0,26 | 0,956 | + 78 | 43,06 | + 0,268 | + 0,214 |
| 140 | 145,68 | 151,10 | 49,09 | 50,91 | — 0,60 | 0,908 | — 175 | 42,31 | — 0,590 | — 0,732 |
| 137 | 138,50 | 71,30 | 66,02 | 33,98 | — 2,14 | 0,817 | — 416 | 43,61 | — 1,983 | — 1,965 |
| 138 | 169,65 | 41,72 | 80,26 | 19,74 | — 3,16 | 0,743 | — 569 | 45,50 | — 2,692 | — 2,520 |
| 139 | 182,37 | 18,91 | 90,60 | 9,40 | — 2,39 | 0,682 | — 383 | 44,42 | — 1,903 | — 1,854 |
| 141 | 176,44 | 9,84 | 94,72 | 5,28 | — 1,47 | 0,653 | — 213 | 42,01 | — 1,143 | — 1,188 |

Tabelle 9.

Propylalkohol - Wasser.

Orientierende Versuche bei ca. 80 Grad Celsius.

| Numer des Versuches | Propylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Korrigierte Tempe- raturänderung | Spezifische Wärme (Näherungswert) | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung |
|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 148 | 17,2 | 348,3 | 4,71 | 95,29 | — 0,45 | 1,00 | 79,65 | — 0,47 |
| 147 | 17,4 | 151,6 | 10,30 | 89,70 | — 1,51 | 1,00 | 79,75 | — 1,67 |

Tabelle 10.

n-Propylalkohol-Wassergemische.

Wärmetönungen pro 1 gr Mischung von 5 zu 5 Gewichtsprozenten. Durch graphische Interpolation aus den Versuchswerten (Tabelle 6—9) erhalten.

| Gewichts- prozente Propyl- alkohol | $\vartheta = 0,00^\circ$ | $\vartheta = 21,03^\circ$ | $\vartheta = 43,44^\circ$ | $\vartheta = 79,7^\circ$ | Gewichts- prozente Wasser |
|---|--------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 100 |
| 5 | 3,00 | 2,05 | 0,93 | — 0,55 | 95 |
| 10 | 5,64 | 3,68 | 1,55 | — 1,60 | 90 |
| 15 | 7,56 | 4,75 | + 1,82 | | 85 |
| 20 | 8,49 | 4,92 | + 1,60 | | 80 |
| 25 | 8,31 | 4,58 | + 1,23 | | 75 |
| 30 | 7,57 | 4,15 | + 0,83 | | 70 |
| 35 | 6,72 | 3,61 | + 0,42 | | 65 |
| 40 | 5,91 | 3,04 | 0,00 | | 60 |
| 45 | 5,10 | 2,47 | — 0,45 | | 55 |
| 50 | 4,29 | 1,93 | — 0,86 | | 50 |
| 55 | 3,55 | + 1,42 | — 1,23 | | 45 |
| 60 | 2,83 | + 0,92 | — 1,58 | | 40 |
| 65 | 2,17 | + 0,45 | — 1,90 | | 35 |
| 70 | + 1,57 | ± 0,00 | — 2,16 | | 30 |
| 75 | + 1,02 | — 0,40 | — 2,38 | | 25 |
| 80 | + 0,55 | — 0,65 | — 2,51 | | 20 |
| 85 | + 0,20 | — 0,83 | — 2,37 | | 15 |
| 90 | ± 0,00 | — 0,75 | — 1,92 | | 10 |
| 95 | — 0,07 | — 0,46 | — 1,14 | | 5 |
| 100 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | | 0 |

Aus Tabelle 10 geht deutlich hervor, daß bei dem binären System Propylalkohol-Wasser schon bei Null Grad der Fall vorliegt, welcher beim Äthylalkohol-Wassersystem erst bei über 42 Grad eintritt. Bei Null Grad fängt nämlich die Wärmetönung gerade an, in ganz alkoholreichen Gemischen negativ zu werden¹⁾. Bei Zimmertemperatur entsteht schon ein beträchtlicher Teil der Gemische unter Wärmeverbrauch, bei 43 bis 44 Grad schon der überwiegende Teil. Bei höheren Temperaturen, das läßt sich leicht voraussehen, werden auch die alkoholärmsten Gemische unter Wärmeabsorption gebildet werden. Davon legen ein paar lediglich orientierende Versuche bei ca. 80 Grad Zeugnis ab. Es liegt also bei den Propylalkohol-Wassergemischen der überaus

1) Bei unterkühltem Wasser wird die Mischungswärmenisotherme völlig positiv werden.

interessante Fall vor, daß die Wärmetönung beim Mischen innerhalb eines gar nicht sehr breiten Temperaturintervalles auf der ganzen Linie ihr Vorzeichen wechselt. In diesem Falle empfindet man ganz besonders mit Bedauern, daß unsere Kenntnisse von den inneren molekularen Vorgängen in beliebig konzentrierten Gemischen uns noch fast völlig verschlossen sind. Es fehlt uns bisher jede molekulartheoretische Deutung des hier Vorgehenden. Man müßte zum Versuche einer solchen vor allen Dingen erst einmal über den molekularen Zustand der reinen Ausgangsmaterialien selbst orientiert sein und auch das sind wir erst sehr mangelhaft. Unzweifelhaft ist wohl nur soviel, daß die Wärmetönungen beim Mischen die Superposition der Effekte einer ganzen Reihe von Vorgängen darstellen, unter welchen neben den Dissoziationsvorgängen der mehr oder weniger stark assoziierten reinen Ausgangssubstanzen die Bildung von Verbindungen derselben untereinander eine Rolle spielen werden. Es bleibt zweifellos der physikalischen Chemie noch viel zu tun übrig, ehe es ihr möglich sein wird, das Warum und Weil für diese interessanten Vorgänge klar zu analysieren.

Erheblich einfacher als beim Aethyl- und beim Propylalkohol gestaltet sich die Sachlage beim Methylalkohol. Innerhalb des untersuchten Temperaturintervalles ist hier ein Vorzeichenwechsel der Wärmetönung nicht zu verzeichnen. Die Werte nehmen zwar allgemein mit zunehmender Temperatur ab, doch dürfte sich ein Vorzeichenwechsel nur bei Mischungsversuchen unter erhöhtem Druck voraussehen lassen, da nicht nur der Siedepunkt des reinen Methylalkohols, sondern auch der des jeweils zu erzeugenden Gemisches ganz erheblich würde überschritten werden müssen¹⁾. Die Resultate bei den Methylalkohol-Wassergemischen sind in den Tabellen 11–14 niedergelegt und werden durch Figur 5 veranschaulicht.

Was die Genauigkeit der Messungen betrifft, so ist dieselbe bei den größeren Wärmetönungen zweifellos am größten und hier wohl in der Genauigkeit der zur Berechnung verwendeten Werte der spezifischen Wärme die Grenze gegeben; bei den kleineren Wärmetönungen wird die prozentische Genauigkeit in erster Linie durch die Genauigkeit der Messung der Temperaturänderung beim Mischen begrenzt. Die bei Null Grad gefundenen Resultate sind meiner Ueberzeugung nach bis $\frac{1}{2}$ Prozent zuverlässig, abge-

1) Vergl. hierzu: E. Bose, Bemerkungen zu einem thermochemischen Satze Julius Thomsons, Physikal. Zeitschr. 7, 503 (1906).

sehen von denjenigen Versuchen bei welchen die kleinere Temperaturdifferenz eine derartige Genauigkeit von vornherein ausschließt. Am wenigsten zuverlässig sind auch hier die Resultate bei der höchsten Temperatur, wie wohl auch bei den größeren Wärmetönungen der Fehler der Messung über 1 Prozent steigen kann.

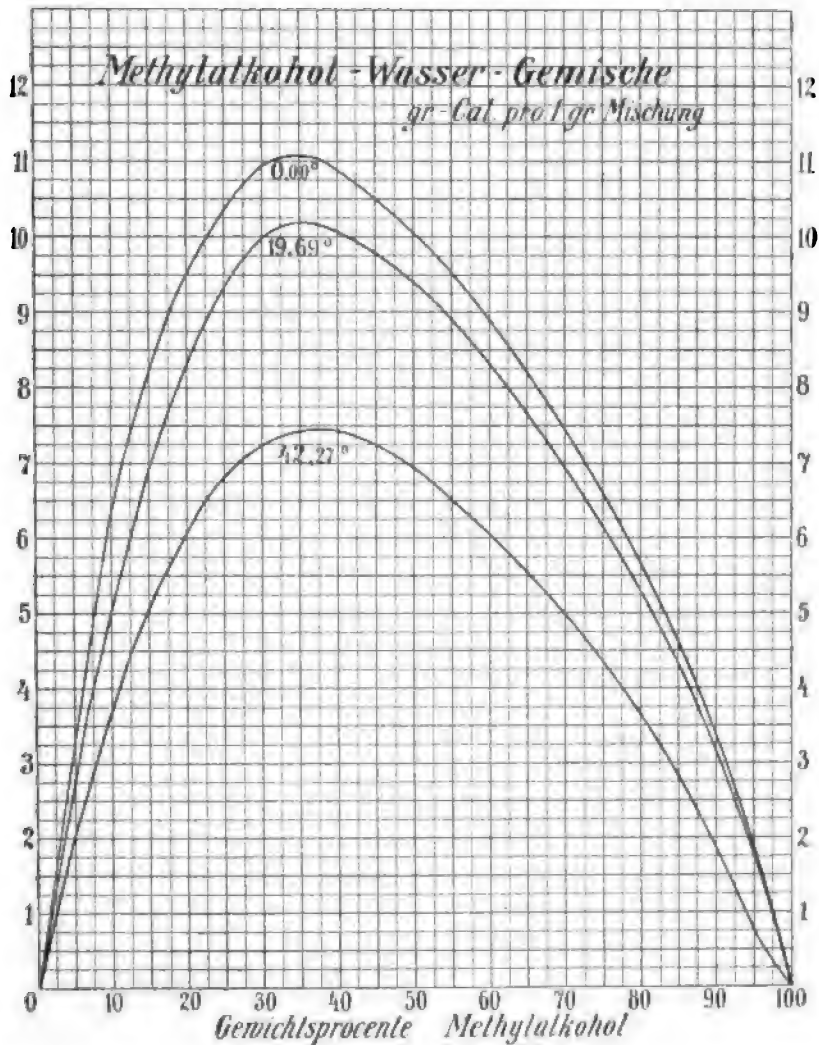


Fig. 5.

Tabelle 11.
Methylalkohol-Wasser.
 Mischversuche bei 0 Grad Celsius.

| Numer des Versuchs | Methylalkohol gr | Wasser gr | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (wegen Wärme- austausch korrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr. Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 0,00° reduziert |
|--------------------------|---------------------|--------------|-----------------------------|----------------------------|---|------------------------------------|---|-------------------------------|----------------------------------|---|
| 70 | 19,45 | 238,15 | 7,55 | 92,45 | 4,35 | 1,024 | 1232 | 0,00 | 4,78 | 4,78 |
| 69 | 39,25 | 238,05 | 14,15 | 85,85 | 7,35 | 1,002 | 2183 | — 0,02 | 7,87 | 7,87 |
| 68 | 56,03 | 230,06 | 19,58 | 80,42 | 9,00 | 0,975 | 2686 | + 0,04 | 9,39 | 9,39 |
| 66 | 60,60 | 207,75 | 22,50 | 77,50 | 9,64 | 0,959 | 2678 | + 0,05 | 9,94 | 9,94 |
| 65 | 103,11 | 200,07 | 34,01 | 65,99 | 11,51 | 0,899 | 3362 | — 0,16 | 11,09 | 11,08 |
| 61 | 132,29 | 194,29 | 40,51 | 59,49 | 11,71 | 0,865 | 3536 | + 0,05 | 10,83 | 10,83 |
| 62 | 117,83 | 145,04 | 44,82 | 55,18 | 11,46 | 0,844 | 2766 | + 0,04 | 10,52 | 10,52 |
| 63 | 156,10 | 141,36 | 52,48 | 47,52 | 11,22 | 0,805 | 2906 | + 0,06 | 9,77 | 9,77 |
| 72 | 118,36 | 73,83 | 61,58 | 38,42 | 10,11 | 0,760 | 1673 | + 0,02 | 8,70 | 8,70 |
| 67 | 167,48 | 76,67 | 68,60 | 31,40 | 9,49 | 0,726 | 1867 | — 0,01 | 7,65 | 7,65 |
| 85 | 190,19 | 41,03 | 82,25 | 17,75 | 6,96 | 0,661 | 1199 | + 0,01 | 5,19 | 5,19 |
| 71 | 192,39 | 20,71 | 90,28 | 9,72 | 4,50 | 0,623 | 685 | 0,00 | 3,21 | 3,21 |

Tabelle 12¹⁾.
Methylalkohol-Wasser.
 Mischversuche bei Zimmertemperatur.

| | | | | | | | | | | |
|----|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 81 | 19,93 | 236,19 | 7,78 | 92,22 | 3,68 | 0,996 | 1016 | 19,89 | 3,969 | 3,979 |
| 85 | 38,80 | 220,25 | 14,98 | 85,02 | 6,35 | 0,992 | 1807 | 19,94 | 6,817 | 6,836 |
| 82 | 59,65 | 194,47 | 23,46 | 76,54 | 8,46 | 0,984 | 2289 | 19,90 | 9,009 | 9,026 |
| 28 | 60,83 | 148,33 | 29,08 | 70,92 | 9,24 | 0,975 | 2073 | 19,58 | 9,913 | 9,900 |
| 27 | 79,34 | 147,28 | 35,01 | 64,99 | 9,71 | 0,960 | 2318 | 19,54 | 10,23 | 10,22 |
| 26 | 107,94 | 154,83 | 41,77 | 58,23 | 10,01 | 0,918 | 2620 | 19,19 | 9,969 | 9,940 |
| 25 | 117,74 | 141,30 | 45,45 | 54,55 | 9,96 | 0,890 | 2506 | 19,19 | 9,674 | 9,646 |
| 30 | 116,63 | 106,96 | 52,16 | 47,84 | 9,76 | 0,851 | 2057 | 19,76 | 9,202 | 9,205 |
| 29 | 117,09 | 99,71 | 54,01 | 45,99 | 9,60 | 0,841 | 1953 | 19,69 | 9,007 | 9,007 |
| 36 | 156,11 | 81,81 | 65,51 | 34,49 | 8,75 | 0,776 | 1795 | 20,01 | 7,543 | 7,554 |
| 38 | 174,11 | 73,36 | 70,36 | 29,64 | 8,22 | 0,750 | 1694 | 19,99 | 6,846 | 6,855 |
| 33 | 175,42 | 60,41 | 74,38 | 25,62 | 7,70 | 0,727 | 1482 | 19,58 | 6,285 | 6,282 |
| 37 | 189,10 | 36,43 | 83,85 | 16,15 | 5,97 | 0,681 | 1043 | 19,91 | 4,624 | 4,628 |
| 34 | 189,05 | 20,02 | 90,42 | 9,58 | 4,16 | 0,650 | 650,6 | 19,60 | 3,112 | 3,111 |

1) Kopf der Tabelle wie oben, nur gilt für die letzte Spalte als Reduktions-
 temperatur 19,69°.

Tabelle 13.

Methylalkohol - Wasser.

Mischversuche bei ca. 42 Grad Celsius.

| Numer des Versuchs | g Methylalkohol | g Wasser | Gewichtsprocente Alkohol | Gewichtsprocente Wasser | Beobachtete Tempe- raturänderung (Wegen Wärme- austauschkorrigiert) | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl gr Cal. durch Mischung entstanden | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung pro 1 gr Mischung | Wärmetönung pro 1 gr Mischung auf 42,87° reduziert |
|-----------------------|--------------------|-------------|-----------------------------|----------------------------|--|------------------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| 180 | 15,77 | 224,81 | 6,63 | 93,27 | 2,27 | 0,996 | 597 | 42,01 | 2,479 | 2,464 |
| 119 | 31,82 | 204,87 | 13,44 | 86,56 | 4,18 | 0,989 | 1075 | 42,22 | 4,542 | 4,530 |
| 120 | 48,76 | 189,53 | 20,46 | 79,54 | 5,72 | 0,979 | 1466 | 42,16 | 6,152 | 6,131 |
| 121 | 88,18 | 211,48 | 29,43 | 70,57 | 6,99 | 0,959 | 2170 | 42,17 | 7,242 | 7,219 |
| 122 | 108,52 | 197,95 | 35,41 | 64,59 | 7,34 | 0,938 | 2279 | 41,98 | 7,436 | 7,388 |
| 124 | 139,44 | 139,83 | 49,93 | 50,07 | 7,16 | 0,873 | 1910 | 42,95 | 6,839 | 6,902 |
| 123 | 171,58 | 133,09 | 56,32 | 43,68 | 7,02 | 0,842 | 1962 | 41,86 | 6,440 | 6,387 |
| 125 | 157,21 | 92,99 | 62,83 | 37,17 | 6,32 | 0,810 | 1426 | 43,20 | 5,699 | 5,777 |
| 126 | 154,88 | 56,08 | 73,42 | 26,58 | 5,23 | 0,759 | 958 | 42,42 | 4,541 | 4,545 |
| 131 | 154,88 | 42,20 | 78,59 | 21,41 | 4,75 | 0,730 | 793 | 42,02 | 4,024 | 4,000 |
| 127 | 172,53 | 21,08 | 89,11 | 10,89 | 2,53 | 0,675 | 389 | 42,32 | 2,009 | 2,006 |
| 128 | 171,77 | 12,82 | 93,05 | 6,95 | 1,40 | 0,654 | 201 | 43,16 | 1,089 | 1,128 |

Tabelle 14.

Methylalkohol-Wassergemische.

Pro 1 gr Mischung entstehen bei p -Gewichtsprozent Methylalkohol-Gehalt und der Temperatur die in der Tabelle angegebenen Wärmemengen in gr-cal. durch den Mischungsvorgang. [Durch graphische Interpolation aus den Versuchswerten (Tabelle 11—13) erhalten.]

| Gewichts- prozente Methyl- alkohol | $\vartheta = 0,00^\circ$ | $\vartheta = 19,69^\circ$ | $\vartheta = 42,37^\circ$ | Gewichts- prozente Wasser |
|---|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 100 |
| 5 | 3,16 | 2,68 | 1,94 | 95 |
| 10 | 6,15 | 5,02 | 3,66 | 90 |
| 15 | 8,16 | 6,88 | 5,01 | 85 |
| 20 | 9,48 | 8,31 | 6,05 | 80 |
| 25 | 10,37 | 9,28 | 6,80 | 75 |
| 30 | 10,93 | 9,96 | 7,27 | 70 |
| 35 | 11,08 | 10,20 | 7,44 | 65 |
| 40 | 10,89 | 10,07 | 7,42 | 60 |
| 45 | 10,52 | 9,76 | 7,24 | 55 |
| 50 | 10,06 | 9,38 | 6,90 | 50 |
| 55 | 9,54 | 8,90 | 6,53 | 45 |
| 60 | 8,93 | 8,31 | 6,07 | 40 |
| 65 | 8,23 | 7,63 | 5,54 | 35 |
| 70 | 7,45 | 6,93 | 5,00 | 30 |
| 75 | 6,62 | 6,14 | 4,40 | 25 |
| 80 | 5,67 | 5,26 | 3,70 | 20 |
| 85 | 4,62 | 4,32 | 2,85 | 15 |
| 90 | 3,38 | 3,13 | 1,85 | 10 |
| 95 | 1,89 | 1,68 | 0,87 | 5 |
| 100 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0 |

Vergleich mit älteren Beobachtungen.

Es liegen bisher meines Wissens nur sehr wenige meist vereinzelte Messungen der Wärmetönungen beim Mischen von Alkoholen mit Wasser vor, und auch diese sind zum Teil nicht einmal streng mit den unsrigen vergleichbar. Mischungen von Alkoholen untereinander sind, soviel mir bekannt, bisher überhaupt noch nicht näher untersucht worden.

Zunächst hat P. Liebetanz¹⁾ mit Hülfe des Bunsenschen Eis-calorimeters für zwei Gemische von Aethylalkohol und Wasser die Mischungswärmen bei Null Grad ermittelt. Derselbe fand für

1) Inaugural-Dissertation, Breslau 1892.

1 gr Mischung berechnet bei 45 Prozent Alkohol 9,53 cal., bei 61,1 Prozent Alkohol 6,44 cal. während aus meinen eigenen Versuchen die Zahlen 9,68 und 6,59 cal. folgen. Die Uebereinstimmung ist eine recht befriedigende und wird noch ein wenig besser, wenn man die in mittleren Calorien angegebenen Zahlen von Liebetanz auf 15°-Calorien umrechnet.

Zum überwiegenden Teil durch eine Fehlerquelle entstellt sind zweifellos die ebenfalls bei Null Grad mittels des Eiscalorimeters gewonnenen Zahlen von B. M. Clark¹⁾ (vergl. Tabelle 15). Die horrenden Differenzen zeigen einen derartigen Gang, daß die alkoholreichsten Mischungen bei den Clarkschen Versuchen die relativ erträglichsten Resultate geliefert haben. Es handelt sich hiernach höchst wahrscheinlich um eine vorzeitige Mischung der beiden Substanzen durch Destillation während der Periode des vor der eigentlichen Messung abgewarteten Temperatúrausgleichs. Diese Destillation mußte natürlich bei den geringsten Alkoholmengen den relativ größten Einfluß üben und konnte bei den sehr kleinen zur Verwendung gelangenden Substanzmengen hier relativ leicht recht erhebliche Dimensionen annehmen²⁾.

Eine ziemlich vollständige Versuchsreihe bei Zimmertemperatur haben Dupré und Page³⁾ für das System Aethylalkohol-Wasser durchgemessen (siehe Tabelle 16). Die Uebereinstimmung zwischen den Werten von Dupré und Page und den unsrigen ist bis auf die Zahlwerte für 40 Prozent Alkohol als eine sehr befriedigende zu bezeichnen und zwar sind die Dupréschen Zahlen zumeist ein wenig höher als die unsrigen.

1) Physikal. Zeitschr. 6, 154—159, 1905.

2) Aus den Clarkschen Versuchen ist die Warnung zu entnehmen, bei Verwendung sehr geringer Substanzmengen den Verdunstungsfehler und damit die vorzeitige Mischung während eines längeren Temperatúrausgleichs durch Einschmelzen der einen Substanz in ein dünnwandiges Glasgefäß völlig zu umgehen.

3) Phil. Transact. 1869, S. 591.

Tabelle 15.

*Aethylalkohol - Wasser.*Vergleich mit den Werten von
B. M. Clark bei 0°.

| Gewichts- procente Alkohol | Spezifische Wärme | |
|----------------------------------|-------------------|------------------|
| | B. M. Clark | E. u. M. Bose |
| 20,4 | 2,80 | 11,0 |
| 25,0 | 3,53 | 11,8 |
| 43,4 | 5,06 | 10,0 |
| 67,8 | 4,12 | 5,31 |
| 84,2 | 2,39 | 2,79 |
| 84,9 | 2,29 | 2,67 |
| 86,0 | 2,10 | 2,53 |

Tabelle 16.

*Aethylalkohol - Wasser.*Vergleich mit Dupré und
Page. Mitteltemperatur 17,3°.

| Gewichts- procente Aethyl- alkohol | Spezifische Wärme | |
|---|-------------------|------------------|
| | Dupré und Page | E. u. M. Bose |
| 10 | 5,34 | 5,23 |
| 20 | 8,79 | 8,61 |
| 30 | 9,60 | 9,40 |
| 40 | (8,97) | 8,49 |
| 45 | 7,76 | 7,80 |
| 50 | 7,12 | 7,04 |
| 60 | 5,45 | 5,38 |
| 70 | 3,76 | 3,81 |
| 80 | 2,50 | 2,50 |
| 90 | 1,54 | 1,38 |

Tabelle 17.

Aethylalkohol - Wasser.

Vergleich mit Tanatar. Versuche bei 12—13°.

| Gewichts- procente Aethyl- alkohol | Temperatur vor der Mischung | Spezifische Wärme | |
|---|-----------------------------------|-------------------|------------------|
| | | Tanatar | E. u. M. Bose |
| 44,8 | 12,9 | 8,74 | 8,39 |
| " | 12,3 | 8,87 | 8,49 |
| 48,8 | 12,7 | 7,46 | 7,76 |
| " | 12,8 | 7,60 | 7,75 |

Einige wenige Gemische von Aethylalkohol und Wasser sind auch von Tanatar ¹⁾ mehr beiläufig auf die Wärmetönung beim Mischungsvorgange hin untersucht worden. Der Vergleich mit unseren Zahlen ist aus Tabelle 17 ersichtlich, bei 44 Prozent Alkohol sind die Tanatarschen Werte um ca. 4,5 Prozent höher, bei 49 Prozent Alkohol um ca. 3 Prozent niedriger als die unsrigen.

1) Zeitschr. f. physik. Chem. 15, 117 (1894).

Beim Propylalkohol liegen außer der weiter unten zu erwähnenden Angabe von Young und Fortey nur Messungen der Mischungswärme mit Wasser von B. M. Clark (Tabelle 18) vor, die wieder unter demselben Fehler leiden wie die schon früher erwähnten beim Aethylalkohol; auch hier sind bei den alkohol-armen Mischungen die Clarkschen Werte erheblich zu niedrig, doch bleiben die Unterschiede entsprechend der sehr viel geringeren Flüchtigkeit des Propylalkohols erheblich geringer. Bei den Gemischen mit mehr als 50 Prozent Propylalkohol liegen die von Fräulein Clark gefundenen Werte sogar nicht unerheblich höher als unsere eigenen.

Für das System Methylalkohol-Wasser liegt meines Wissens nur eine Versuchsreihe von Dupré vor, die in Tabelle 19 mit unseren Zahlen verglichen wird. Es geht aus den Versuchen meines Erachtens hervor, daß die Werte Duprés wohl durchweg erheblich zu niedrig sind, was zum großen Teile auf die von Dupré seiner Berechnung zu Grunde gelegten und zweifellos unrichtigen Werte der spezifischen Wärme für die Gemische zurückzuführen ist.

Tabelle 18.

Propylalkohol-Wasser.

Vergleich mit B. M. Clark
bei 0°.

| Gewichts- prozente Alkohol | Spezifische Wärme | |
|----------------------------------|-------------------|------------------|
| | B. M. Clark | E. u. M. Bose |
| 31,7 | 5,03 | 7,26 |
| 39,0 | 5,63 | 6,06 |
| 52,5 | 4,20 | 3,95 |
| 56,2 | 3,68 | 3,40 |
| 63,9 | 2,81 | 2,33 |
| 70,9 | 2,02 | 1,49 |

Tabelle 19.

Methylalkohol-Wasser.

Vergleich mit Dupré. Ver-
suche bei ca. 18°.

| Gewichts- prozente Methyl- alkohol | Spezifische Wärme | |
|---|-------------------|------------------|
| | Dupré | E. u. M. Bose |
| 10 | 4,19 | 5,19 |
| 20 | 7,46 | 8,39 |
| 30 | 8,95 | 10,08 |
| 40 | 9,08 | 10,14 |
| 50 | 8,89 | 9,43 |
| 60 | 8,30 | 8,38 |
| 70 | 6,89 | 6,99 |
| 80 | 4,49 | 5,30 |
| 90 | 2,63 | 3,14 |

Waren die bisher aufgezählten früheren Bestimmungen wirklich mit den unsrigen vergleichbar zu nennen, so ist das leider nicht der Fall mit den drei einzelnen Zahlwerten, welche Young und Fortey für je ein Aethyl-, Propyl- und Methylalkohol-Wassergemisch angeben. Die Angabe der beiden englischen Forscher erstreckt sich nämlich nur auf die Temperaturänderung, welche beim Mischen eintritt und mangels einer Angabe über den Wasserwert des gebrauchten Gefäßes ist eine sichere Vergleichung also nicht möglich. Ich beschränke mich daher darauf, die Temperaturänderung bei unseren eigenen Versuchen neben die von Young und Fortey angegebenen zu setzen. Die Uebereinstimmung ist hier überraschend gut, kann aber leider nur als ein Beweis dafür angesprochen werden, daß die Calorimeter-Wasserwerte in beiden Fällen nahe den gleichen relativen Wert gehabt haben müssen.

Tabelle 20.

Vergleich mit Young und Fortey.

| Systeme | Gewichts- prozente Alkohol | Temperatur vor der Mischung | Temperaturanstieg nach | |
|----------------------|----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------|
| | | | Young u. Fortey | E. u. M. Bose |
| Methylalkohol-Wasser | 72,73 | 21,7 | + 7,85 | + 7,95 |
| Aethylalkohol- " | 79,31 | 22,3 | + 2,95 | + 3,00 |
| Propylalkohol- " | 83,33 | 22,7 | — 1,15 | — 1,10 |

Wärmetönungen beim Vermischen zweier Alkohole.

Gemische zweier Alkohole entstehen stets unter sehr viel kleinerer Wärmetönung, als wenn Wasser eine der Komponenten des Gemisches ist. Des weiteren zeigt sich, daß die Wärmetönung nur in sehr geringem Grade von der Temperatur abhängig ist, wie das ja auch nach dem Verlauf der spezifischen Wärmen dieser Gemische (Teil I dieser Studien) nicht anders zu erwarten ist. Wir haben uns daher darauf beschränkt, bei Zimmertemperatur und bei Null Grad durch eine kleine Zahl von Versuchen das einfache Verhalten dieser Gemische zu erläutern. Die erhaltenen Resultate sind in den Tabellen 21 und 22 zusammengestellt.

Tabelle 21.
Gemische zweier Alkohole.
 Versuche bei ca. Null Grad.

| Nummer des Versuchs | Es gelangten zur Mischung | | Prozentische Zusammen- setzung | | Korrigierte Tempe- raturänderung beim Mischen | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl der erhaltenen Gramm- calorien | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung für 1 gr Mischung |
|------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------|---|------------------------------------|---|-------------------------------|----------------------------------|
| | gr | gr | | | | | | | |
| | Methyl- alkohol | Aethyl- alkohol | Methyl- alkohol | Aethyl- alkohol | | | | | |
| 88 | 174,64 | 28,74 | 85,87 | 14,13 | — 0,05 | 0,577 | — 7 | + 0,30 | — 0,035 |
| 87 | 125,21 | 59,39 | 67,83 | 32,17 | — 0,08 | 0,576 | — 12 | + 0,27 | — 0,065 |
| 86 | 58,51 | 123,89 | 32,17 | 67,83 | — 0,12 | 0,559 | — 14 | + 0,27 | — 0,077 |
| | Methyl- alkohol | Propyl- alkohol | Methyl- alkohol | Propyl- alkohol | | | | | |
| 101 | 173,71 | 71,51 | 70,54 | 29,16 | — 0,74 | 0,563 | — 111 | + 0,30 | — 0,452 |
| 103 | 118,15 | 130,91 | 47,44 | 52,56 | — 0,95 | 0,555 | — 133 | + 0,34 | — 0,535 |
| 102 | 58,02 | 118,63 | 32,84 | 67,16 | — 0,80 | 0,550 | — 87 | + 0,31 | — 0,492 |
| | Aethyl- alkohol | Propyl- alkohol | Aethyl- alkohol | Propyl- alkohol | | | | | |
| 105 | 131,44 | 79,99 | 62,17 | 37,83 | — 0,24 | 0,545 | — 30 | + 0,27 | — 0,142 |
| 104 | 117,11 | 141,96 | 45,20 | 54,80 | — 0,21 | 0,543 | — 29 | + 0,27 | — 0,112 |

Tabelle 22.

Gemische zweier Alkohole.

Versuche bei Zimmertemperatur.

| Nummer des Versuchs | Es gelangten zur Mischung | | Prozentische Zusammen- setzung | | Korrigierte Tempe- raturänderung beim Mischen | Spezifische Wärme des Gemisches | Anzahl der erhaltenen Gramm- calorien | Temperatur vor dem Mischen | Wärmetönung für 1 gr Mischung |
|------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------|---|------------------------------------|---|-------------------------------|----------------------------------|
| | gr | gr | | | | | | | |
| | Methyl- alkohol | Aethyl- alkohol | Methyl- alkohol | Aethyl- alkohol | | | | | |
| 39 | 115,94 | 117,85 | 49,6 | 50,4 | — 0,01 | 0,596 | 1,60 | 20,79 | — 0,007 |
| 40 | 73,21 | 158,76 | 32,3 | 67,7 | — 0,01 | 0,592 | 1,55 | 20,81 | — 0,007 |
| | Methyl- alkohol | Propyl- alkohol | Methyl- alkohol | Propyl- alkohol | | | | | |
| 56 | 189,68 | 40,49 | 82,41 | 17,59 | — 0,50 | 0,596 | — 78,8 | 21,34 | — 0,341 |
| 53 | 124,08 | 59,85 | 67,46 | 32,54 | — 0,65 | 0,587 | — 83,9 | 21,47 | — 0,456 |
| 57 | 116,44 | 116,30 | 50,03 | 49,97 | — 0,75 | 0,580 | — 117 | 21,12 | — 0,502 |
| 55 | 59,80 | 174,19 | 25,56 | 74,44 | — 0,54 | 0,576 | — 84,4 | 21,27 | — 0,360 |
| | Aethyl- alkohol | Propyl- alkohol | Aethyl- alkohol | Propyl- alkohol | | | | | |
| 54 | 115,26 | 117,20 | 49,58 | 50,42 | — 0,19 | 0,569 | — 29,0 | 21,54 | — 0,125 |
| 58 | 72,35 | 147,80 | 32,86 | 67,14 | — 0,21 | 0,572 | — 30,8 | 21,02 | — 0,140 |

Der quantitative Vergleich der in dem vorliegenden 2. Teil erhaltenen Resultate mit dem aus dem Verlauf der spezifischen Wärmen zu erschließenden muß dem dritten Teile dieser Studien vorbehalten bleiben.

Calorimetrische Studien. III.

Beziehungen zwischen den Resultaten von Teil I und II.

Von

Emil Bose.

(Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 28. Juli 1908.

Die Gesamtheit des in den beiden ersten Teilen niedergelegten umfangreichen Beobachtungsmateriales erlaubt eine eingehende Prüfung der folgenden thermodynamischen Beziehung.

Bezeichnet $Q(x, t)$ die Wärmetönung, welche auftritt, wenn x Gramm der Flüssigkeit A bei der Temperatur t mit $1-x$ Gramm der Flüssigkeit B gemischt werden, sind ferner c_a und c_b die spezifischen Wärmen der reinen Substanzen A und B , dagegen c_{ab} diejenige der entstandenen Mischung, dann ist

$$-\frac{dQ(x, t)}{dt} = c_{ab} - [xc_a + (1-x)c_b]$$

(Der in der eckigen Klammer eingeschlossene Term bedeutet denjenigen Wert der Wärmekapazität des Gemisches, welcher sich nach der Mischungsregel berechnen würde. Am Schlusse des ersten Teiles dieser Studien habe ich die der rechten Seite der obigen Gleichung entsprechenden Werte, (d. h. die Abweichungen der beobachteten spezifischen Wärme von dem aus den Werten für die reinen Komponenten unter Voraussetzung eines geradlinigen Verlaufs folgenden Werte) zusammengestellt für die Gemische von Wasser mit den drei ersten Vertretern der Reihe der normalen Alkohole und zwar von 5 zu 5 Prozent Alkoholgehalt und für drei verschiedene Temperaturintervalle, in welchen die Bestimmungen der spezifischen Wärme ausgeführt worden sind. Um die obige Gleichung an dem vorliegenden Beobachtungsmateriale einer umfassenden Prüfung zu unterziehen, ist es daher

nur noch nötig, für die betreffenden Gemische die Temperaturkoeffizienten der Mischungswärmen, also die linke Seite der obigen Gleichung für die betreffenden Temperaturintervalle zu berechnen. Aus den im zweiten Teile angegebenen von 5 zu 5 Prozent Alkoholgehalt interpolierten Isothermen der Mischungswärme für drei verschiedene Temperaturen ist das nicht direkt möglich, da die Intervallsbreite für die einzelnen spezifischen Wärmedifferenzen nur etwa 5 Grad beträgt. Es ließ sich jedoch auf folgende Weise das Gewünschte erreichen. Für jedes Gemisch wurden die Wärmetönungen bei den drei verschiedenen Temperaturen in ein Q, t -Koordinatensystem eingetragen, durch eine möglichst glatte Kurve verbunden und aus dieser die Werte der Wärmetönung von 5 zu 5 Grad interpoliert. Die so für die Gemische von Wasser mit Aethyl-, Propyl- und Methylalkohol erhaltenen Isothermen von 5 zu 5 Grad Temperaturdifferenz sind in den Tabellen 1, 2, 3 zusammengestellt und erlauben dann direkt die Berechnung der Temperaturkoeffizienten der Wärmetönung in Intervallsbreiten von 5 Grad. Diese Temperaturkoeffizienten wurden nun für drei den spezifischen Wärmebestimmungen möglichst entsprechende Temperaturintervalle berechnet (Tabelle 4—6). Vergleicht man die in diesen Tabellen enthaltenen Werte mit den für die Abweichung der spezifischen Wärme von der Mischungsregel erhaltenen Werten (Teil I, Tabelle 19—21, jedesmal die drei letzten Kolumnen), so zeigt sich, daß für die nahe bei Null Grad angestellten Versuche die Uebereinstimmung der beiden Größen eine glänzende zu nennen ist. Die Abweichungen sind hier stets durchaus innerhalb der erreichbaren Genauigkeitsgrenzen. Es ist übrigens schon hier zu erkennen, (man übersieht das am besten an den Kurventafeln I—III), daß die Abweichungen bei den Propylalkohol-Wassergemischen am kleinsten sind, bei den Aethyl- und noch mehr bei den Methylalkohol-Wassergemischen dagegen ein klein wenig größer ausfallen. Es nehmen also die Abweichungen zu, je leichter flüchtig der untersuchte Alkohol ist. Ich habe schon anläßlich der Veröffentlichung des die spezifischen Wärmen betreffenden Beobachtungsmateriales darauf hingewiesen, daß mir die Fehlerquellen erheblich mit der Flüchtigkeit der untersuchten Substanzen zuzunehmen scheinen und daß demgemäß zweifellos die beim Propylalkohol erzielten Resultate die genauesten, die beim Methylalkohol dagegen die am wenigsten guten sind. Derselben Ueberlegung zufolge ist ohne weiteres zu erwarten, daß auch mit zunehmender Temperatur die Ungenauigkeiten zunehmen werden. Dies ist namentlich bei dem sehr leicht-

Tabelle 1. Aethylalkohol - Wasser.

Isothermen der Mischungswärme für 1 gr Mischung von 5 zu 5 Grad Celsius.

[illegible]

Tabelle 2. Propylalkohol-Wasser.

[illegible]

Tabelle 3. Methylalkohol - Wasser.

Isothermen der Mischungswärmen für 1 gr Mischung von 5 zu 5 Grad Celsius.

[illegible]

Tabelle 4.

Aethylalkohol - Wasser.

Temperaturkoeffizienten der Mischungswärme in verschiedenen Temperaturintervallen.

| Gewichtsprocente Aethylalkohol | Temperaturkoeffizient der Wärmetönung für 1 gr Mischung | | |
|-----------------------------------|---|--------------------|--------------------|
| | zwischen 0—5° | zwischen 20—25° | zwischen 35—40° |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 0,044 | 0,042 | 0,044 |
| 10 | 0,088 | 0,078 | 0,074 |
| 15 | 0,112 | 0,114 | 0,114 |
| 20 | 0,130 | 0,138 | 0,146 |
| 25 | 0,142 | 0,152 | 0,164 |
| 30 | 0,146 | 0,162 | 0,170 |
| 35 | 0,140 | 0,158 | 0,168 |
| 40 | 0,122 | 0,142 | 0,166 |
| 45 | 0,102 | 0,132 | 0,164 |
| 50 | 0,088 | 0,126 | 0,156 |
| 55 | 0,078 | 0,118 | 0,150 |
| 60 | 0,070 | 0,106 | 0,134 |
| 65 | 0,062 | 0,098 | 0,120 |
| 70 | 0,058 | 0,086 | 0,108 |
| 75 | 0,050 | 0,074 | 0,098 |
| 80 | 0,044 | 0,068 | 0,088 |
| 85 | 0,036 | 0,056 | 0,074 |
| 90 | 0,030 | 0,044 | 0,054 |
| 95 | 0,022 | 0,028 | 0,032 |
| 100 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Tabelle 5.

Propylalkohol - Wasser.

Temperaturkoeffizienten der Mischungswärme in verschiedenen Temperaturintervallen.

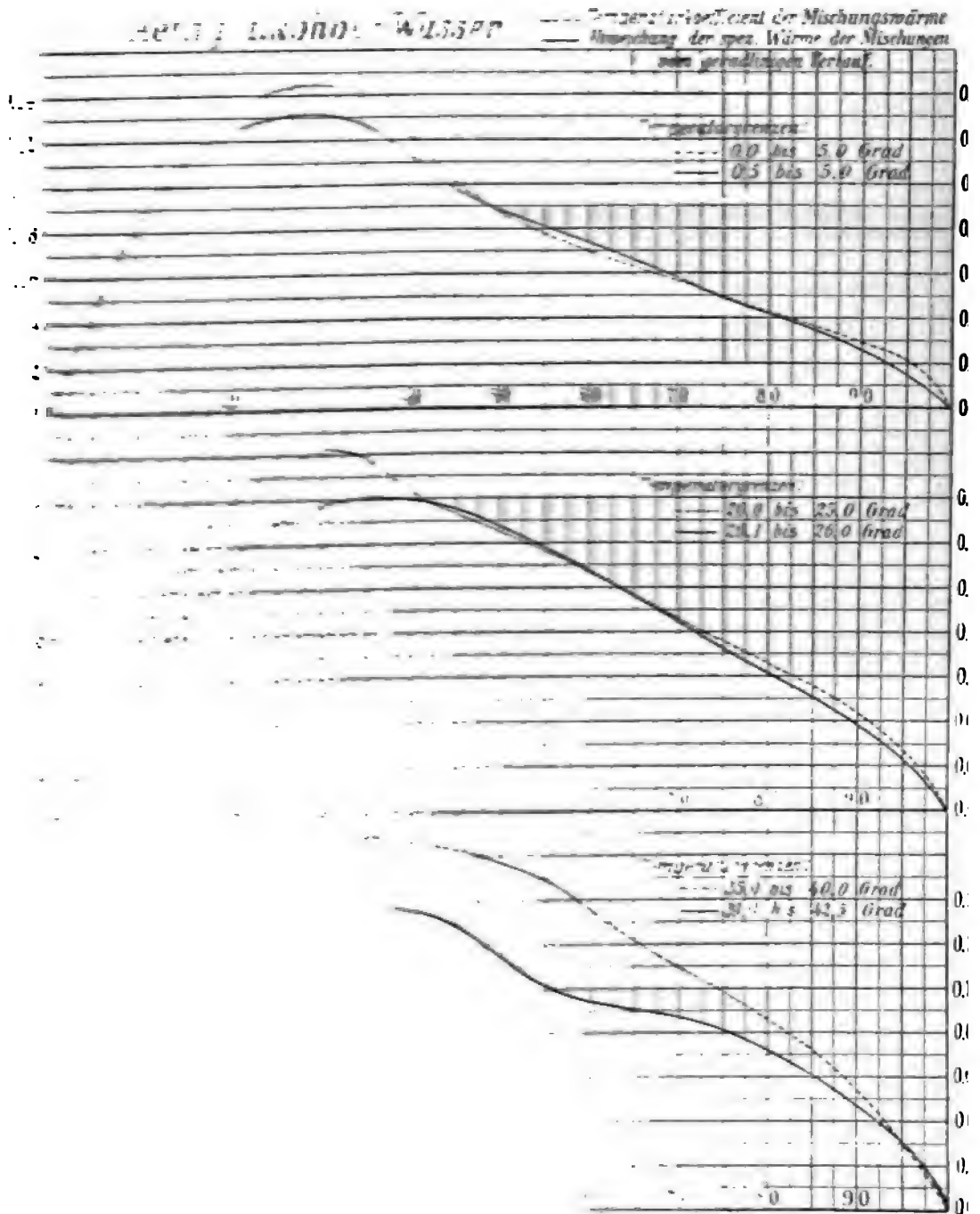
| Gewichtsprocente Propylalkohol | Temperaturkoeffizient der Wärmetönung für 1 gr Mischung | | |
|-----------------------------------|---|--------------------|--------------------|
| | zwischen 0—5° | zwischen 20—25° | zwischen 35—40° |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 0,042 | 0,048 | 0,050 |
| 10 | 0,096 | 0,094 | 0,094 |
| 15 | 0,138 | 0,132 | 0,128 |
| 20 | 0,194 | 0,156 | 0,142 |
| 25 | 0,192 | 0,164 | 0,144 |
| 30 | 0,172 | 0,156 | 0,144 |
| 35 | 0,150 | 0,144 | 0,142 |
| 40 | 0,138 | 0,136 | 0,136 |
| 45 | 0,120 | 0,128 | 0,132 |
| 50 | 0,108 | 0,120 | 0,130 |
| 55 | 0,096 | 0,110 | 0,124 |
| 60 | 0,084 | 0,102 | 0,116 |
| 65 | 0,072 | 0,094 | 0,112 |
| 70 | 0,066 | 0,086 | 0,104 |
| 75 | 0,058 | 0,080 | 0,094 |
| 80 | 0,046 | 0,072 | 0,088 |
| 85 | 0,042 | 0,060 | 0,074 |
| 90 | 0,028 | 0,046 | 0,054 |
| 95 | 0,014 | 0,024 | 0,036 |
| 100 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Tabelle 6.

Methylalkohol - Wasser.

Temperaturkoeffizienten der Mischungswärme in verschiedenen Temperaturintervallen.

| Gewichts- procente Methyl- alkohol | Temperaturkoeffizient der Wärmetönung für 1 gr Mischung | | |
|---|---|--------------------|--------------------|
| | zwischen 0—5° | zwischen 20—25° | zwischen 35—40° |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 0,028 | 0,028 | 0,032 |
| 10 | 0,058 | 0,058 | 0,062 |
| 15 | 0,058 | 0,074 | 0,084 |
| 20 | 0,052 | 0,082 | 0,110 |
| 25 | 0,042 | 0,086 | 0,124 |
| 30 | 0,032 | 0,086 | 0,140 |
| 35 | 0,028 | 0,090 | 0,138 |
| 40 | 0,024 | 0,084 | 0,142 |
| 45 | 0,024 | 0,086 | 0,138 |
| 50 | 0,020 | 0,086 | 0,128 |
| 55 | 0,018 | 0,082 | 0,118 |
| 60 | 0,016 | 0,076 | 0,112 |
| 65 | 0,018 | 0,062 | 0,110 |
| 70 | 0,016 | 0,058 | 0,098 |
| 75 | 0,016 | 0,052 | 0,090 |
| 80 | 0,014 | 0,048 | 0,082 |
| 85 | 0,010 | 0,042 | 0,078 |
| 90 | 0,008 | 0,036 | 0,070 |
| 95 | 0,008 | 0,020 | 0,046 |
| 100 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

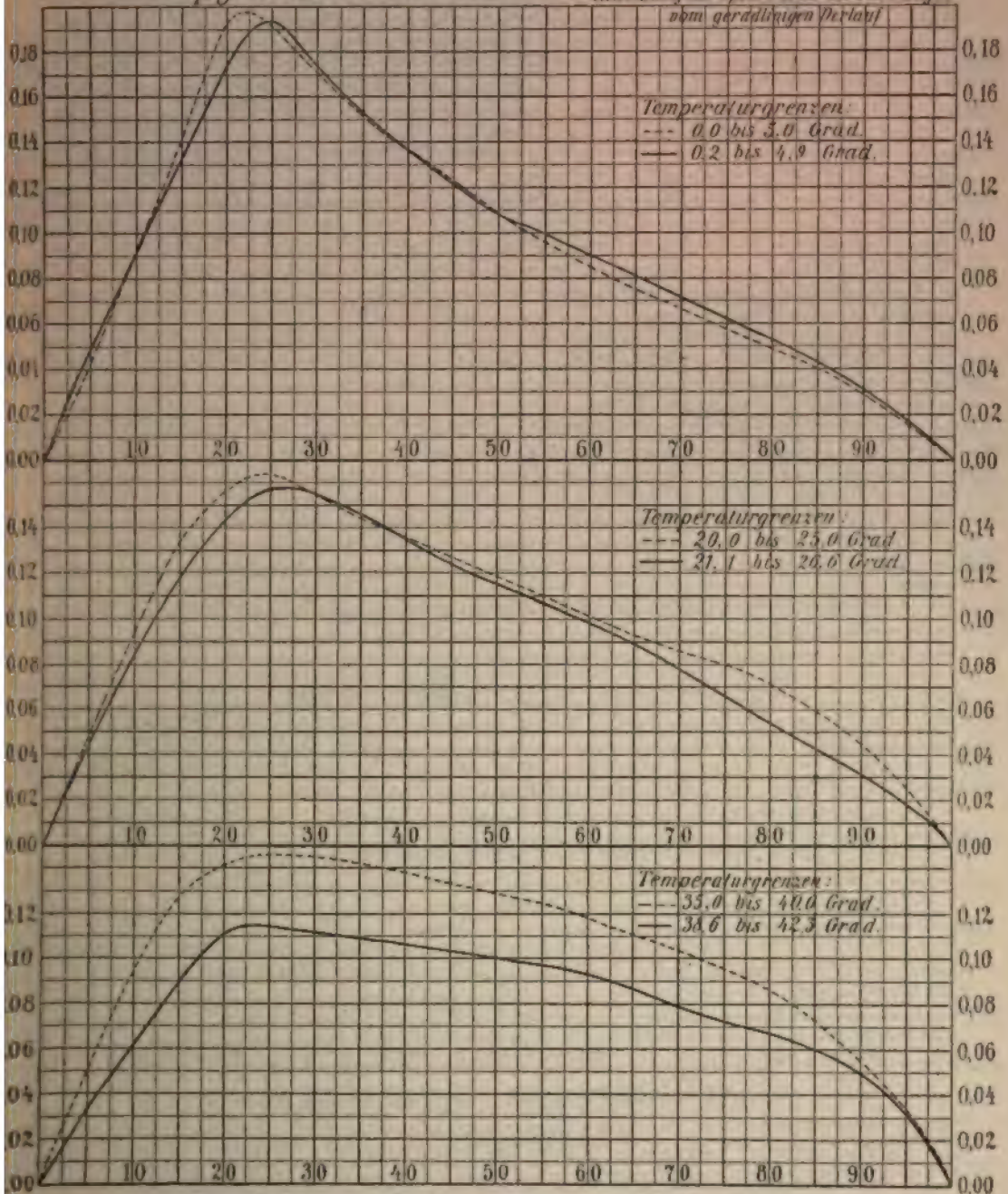


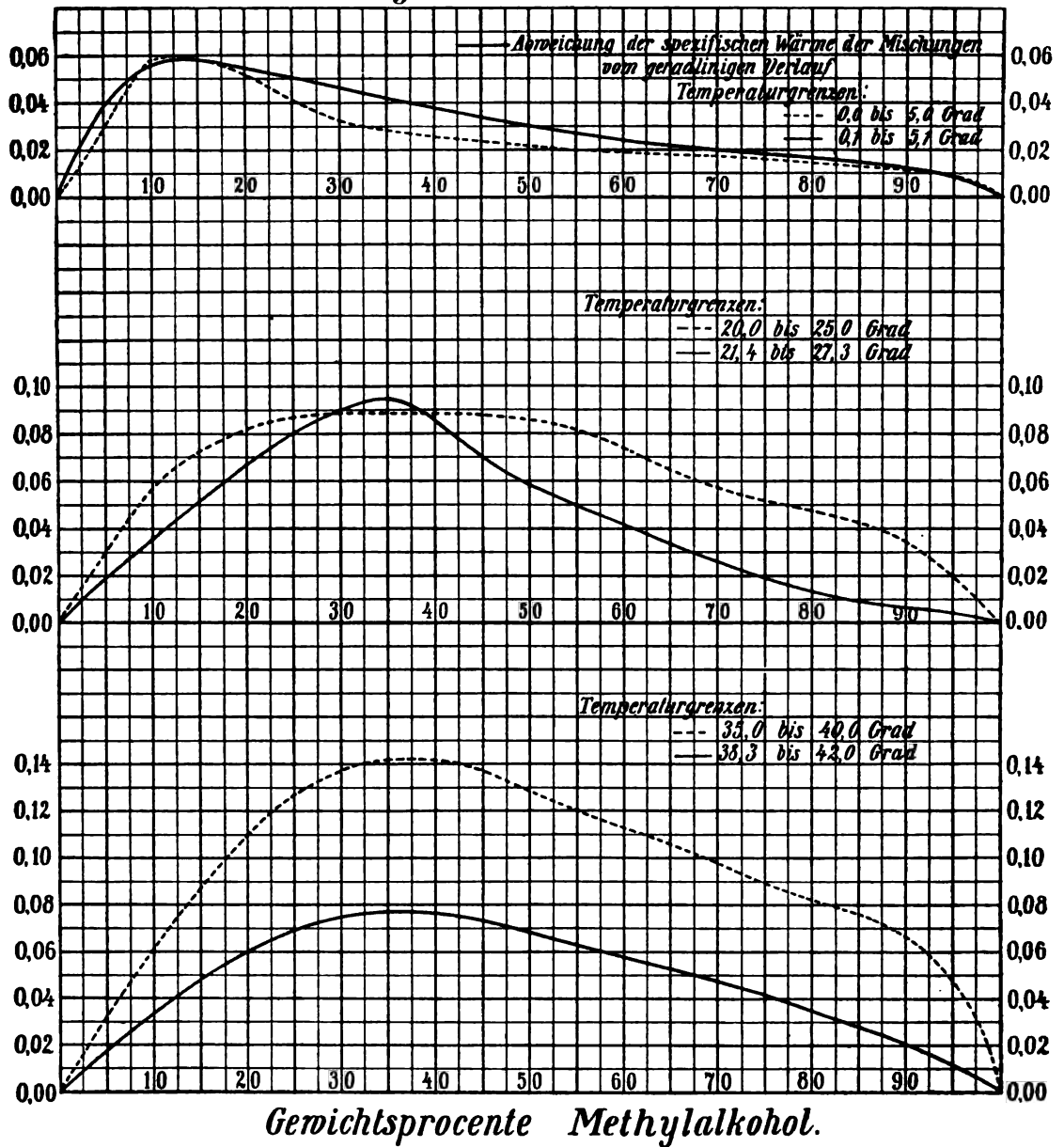
• γ_1 Ethanol

Wasser

Propylalkohol - Wasser.

---- Temperaturkoeffizient der Mischungswärme
 — Abweichung der Spez. Wärme der Mischungen
 vom geradlinigen Verlauf

*Gewichtsprocente Propylalkohol.*

Methylalkohol - Wasser.

Kurventafel III.

flüchtigen Methylalkohol vorauszusehen, dessen alkoholreiche Gemische, sowie der reine Alkohol selbst bis nahe zum Siedepunkt zur Untersuchung gelangten. Für die bei Zimmertemperatur ausgeführten Versuche ergibt sich beim Propylalkohol noch eine glänzende Uebereinstimmung der beiden zu vergleichenden Größen, doch ist schon zu erkennen, daß eine gewisse Tendenz vorliegt, etwas zu große Temperaturkoeffizienten zu bekommen oder, was auf dasselbe hinauskommt, etwas zu kleine Abweichungen der spezifischen Wärme von der Mischungsregel. Im einzelnen liegen zwar die Differenzen hier wie beim Aethylalkohol noch stets innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler und nur das ziemlich regelmäßige einseitige Abweichen gibt Anlaß zu dieser Bemerkung. Beim Methylalkohol sind die Abweichungen bei Zimmertemperatur schon erheblich größer. Es läßt sich jedoch sagen, daß ein Fehler von nur $\frac{1}{2}$ Prozent in den spezifischen Wärmebestimmungen genügt, um alle Differenzen beim Propyl- und beim Aethylalkohol zum Verschwinden zu bringen. Beim Methylalkohol müßte der Fehler in der spezifischen Wärmebestimmung an einzelnen Stellen schon fast bis 1 Prozent betragen. Auch durch einen Fehler in der Bestimmung der Mischungswärme von etwa 1 Prozent kann jede der Differenzen erklärt werden. Bei der höchsten zur Untersuchung herangezogenen Temperatur ist bei allen drei Alkoholen ein durchaus einseitiges Ueberwiegen der Temperaturkoeffizienten über die Abweichung der spezifischen Wärme von der Mischungsregel zu konstatieren. Es ist aber hier darauf hinzuweisen, daß die Fehlerquellen bei calorimetrischen Messungen oberhalb 40 Grad doch ganz erheblich größer sind als bei den niedrigen Temperaturen, und durch solche aller Wahrscheinlichkeit nach die Diskrepanz bedingt wird. Als naheliegendste Fehlerquelle, welche für diese einseitigen Abweichungen herangezogen werden könnte, wäre die Verdunstung bei den Mischversuchen zu betrachten. Diese würde stets bedingen, daß die Wärmetönung bei ca. 40 Grad zu klein gefunden würde und demnach der Temperaturkoeffizient seinem absoluten Werte nach zu groß. Ich wäre gerne bereit, den Einfluß dieser Fehlerquelle zuzugestehen, und was die beim Methylalkohol erhaltenen Werte betrifft, so bin ich sogar fest überzeugt, daß wenigstens ein erheblicher Teil der Abweichungen auf ihr Konto kommt. Es besteht aber ein durchaus stichhaltiger Grund, der beweist, daß eine völlige Erklärung der Differenzen damit nichts weniger als erreicht wird. Die Verdunstung bewirkt nämlich in jedem Falle, daß die beobachtete Wärmetönung ihrem Absolutwerte nach zu klein gefunden werden muß, ganz gleichgültig,

ob die Wärmetönung selbst positiv oder negativ ist. Infolgedessen hätte beim Propylalkohol, wo bei Temperaturen über 40 Grad die Wärmetönungen bei den meisten Mischungen negativ sind, der Temperaturkoeffizient also, falls er durch Verdunstung gefälscht sein sollte, nur zu klein gefunden werden können. Dem gegenüber liegt auch in diesem Gebiete ein zu großer Temperaturkoeffizient vor, so daß die Differenz sicher nicht durch Verdunstung allein erklärt werden kann. Welches daher der Grund für die bei höheren Temperaturen immer deutlicher hervortretenden Differenzen zwischen Temperaturkoeffizient der Mischungswärme und Abweichung der spezifischen Wärme von der Mischungsregel ist, das muß ich vorerst als durchaus offene Frage betrachten. Es wäre ja zunächst noch daran zu denken, daß die zu prüfende Gesetzmäßigkeit nur dann streng gilt, wenn die äußere Arbeitsleistung beim Mischungsvorgange völlig zu vernachlässigen ist; aber eine einfache Ueberschlagsrechnung zeigt sofort, daß die durch die Volumänderung beim Mischungsvorgang stattfindenden äußeren Arbeitsleistungen so klein sind, daß dieselben nur eine mit den heutigen Hilfsmitteln für calorimetrische Messungen nicht mehr nachweisbare Differenz zwischen den in obiger Gleichung einander gleichgesetzten Größen bedingen könnten.

Daß durch irgend eine Verunreinigung diese einseitige Differenz zustande kommen sollte, ist ebenfalls nicht aufrechtzuerhalten. Es ist nämlich der obige thermodynamische Satz völlig unabhängig davon, ob ich zwei reine Substanzen oder zwei beliebige Flüssigkeiten mit einander mische, sofern nur überhaupt völliges Vermischen eintritt. Da aber zur spezifischen Wärmebestimmung stets das gleiche Material verwendet wurde, wie zu den Mischversuchen, so sollte sogar der Einfluß beliebig großer Verunreinigungen die zu verifizierende Gesetzmäßigkeit nicht beeinträchtigen dürfen.

Ein erheblicher Teil der Differenzen würde fortfallen, wenn stets die Werte der spezifischen Wärme für den reinen Alkohol ein wenig zu hoch gefunden worden wären. Es ist das der Hauptgrund für meine im ersten Teile dieser Studien ausgesprochene Vermutung, daß ich bei dem reinen Alkohole namentlich die bei höheren Temperaturen gefundenen Werte eher für zu hoch als zu niedrig halte, obgleich dieselben meist aber erheblich niedriger gefunden wurden als bisher nach älteren Versuchen angenommen werden mußte.

Wie ich schon früher mitteilte, ist mit den umfangreichen Messungen über Mischungswärmen zugleich bezweckt worden, den calorimetrischen Teil eines Beobachtungsmateriales herbeizuschaffen,

das eine Prüfung der allgemeinen Nernstschen Formel für Mischungswärmen gestattet.

Es ist meines Wissens bisher kein Beispiel bekannt, daß die von Nernst abgeleitete vollständige Formel für die Mischungswärme einer Prüfung unterzogen worden wäre. Die Ursache ist, daß in dieser Formel noch mehr als in der Kirchhoffschen für die Verdünnungswärme der Einfluß auch von sehr kleinen Beobachtungsfehlern in der Bestimmung der Dampfdrucke sich in der verhängnisvollsten Weise summiert und dadurch die Berechnung der Mischungswärme aus den Dampfdruckkurven eine recht unsichere wird. In einem besonders einfachen Falle bin ich nun in der Lage, die Gültigkeit der Nernstschen Formel an einem binären System bündig zu erweisen. Mischt man x Grammmoleküle der Substanz a mit $1-x$ Grammmolekülen einer Substanz b , bezeichnet ferner p_a den Dampfdruck der reinen Substanz a , p_b denjenigen der reinen Substanz b , und sind die Partialdrucke der beiden Komponenten über der Mischung p'_a und p'_b , alles bei der absoluten Temperatur T , so lautet die Nernstsche Formel bekanntlich:

$$(1) \quad Q(x, T) = RT^2 \frac{d}{dT} \left[x \ln \frac{p_a}{p'_a} + (1-x) \ln \frac{p_b}{p'_b} \right].$$

Nun ist in einigen Fällen von binären Gemischen beobachtet worden, daß der gesamte Dampfdruck der Mischungen, also die jeweilige Summe der beiden Partialdrucke, linear zwischen den Werten für die Dampfdrucke der reinen Komponenten verläuft. Das ist zum Beispiel der Fall für die von Zawidzki¹⁾ untersuchten Gemische von Benzol und Aethylenchlorid und von Propylenbromid und Aethylenbromid. Hier konnte Zawidzki nachweisen, daß alsdann auch die Partialdrucke der beiden Komponenten einen geradlinigen Verlauf aufweisen. Es bedarf einerseits nur einer oberflächlichen Betrachtung des Kurvenmaterials der Zawidzki'schen Arbeit, um aus dem stets analogen Verlauf der beiden Partialdruckkurven zu folgern, daß, wenn die Kurve des gesamten Dampfdruckes den Spezialfall der geraden Linie annimmt, dies stets auch bei den beiden Partialdruckkurven der Fall sein muß. In der Tat läßt sich auch leicht rechnerisch zeigen, daß der beiderseits geradlinige Verlauf der Partialdrucke der Forderung der Duhem-Margules'schen Differentialgleichung für die Abhängigkeit der Partialdrucke von der Zusammensetzung des Gemisches entspricht.

1) Zeitschr. f. physik. Chem. 35, 129 (1900).

Die Margulesche Differentialgleichung lautet in unserer Bezeichnungsweise:

$$(2) \quad \frac{d \ln p'_a}{d \ln x} = \frac{d \ln p'_b}{d \ln (1-x)}.$$

Für den Fall des geradlinigen Verlaufes der Kurven für p'_a und p'_b lassen sich bezüglich der linken Seite der obigen Gleichung die folgenden Schlüsse ziehen. Die Gleichung der p'_a -Kurve ist

$$p'_a = p_a \cdot x$$

woraus direkt durch Logarithmieren und Differentieren nach $\ln p$ folgt, daß

$$\frac{d \ln p'_a}{d \ln x} = 1.$$

In ganz derselben Weise ergibt sich auch

$$\frac{d \ln p'_b}{d \ln (1-x)} = 1$$

und damit der Nachweis, daß der beiderseits geradlinige Verlauf die Margulesche Differentialgleichung befriedigt.

Aus diesen Ueberlegungen folgt nunmehr sogleich die Berechtigung, auch in einem Falle, wo nur der geradlinige Verlauf der Kurve des gesamten Dampfdruckes ermittelt worden ist, ohne daß (wie bei den von Zawidzki untersuchten Fällen) der Partialdruck der Komponenten einzeln gemessen wurde, zu schließen, daß auch die beiden Partialdruckkurven für sich einen geradlinigen Verlauf haben müssen. Dieser Fall liegt vor bei Gemischen von Methylalkohol mit Aethylalkohol, wo der geradlinige Verlauf des Gesamtdruckes beobachtet worden ist¹⁾. Wir dürfen also folgern, daß auch hier die Kurven der einzelnen Partialdrucke geradlinig verlaufen. Damit sind wir in der Lage, für eine Temperatur, für welche die Summe der Partialdrucke gemessen ist, die beiden Summanden einzeln zu berechnen. Dazu dienen einfach die beiden Gleichungen

$$(3a, 3b) \quad p'_a = x p_a \quad \text{und} \quad p'_b = (1-x) p_b.$$

Weiterhin stellen wir folgende Betrachtung an. Obgleich die Dampfdrucke der Gemische meines Wissens erst für eine Temperatur gemessen worden sind, so können wir doch mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit annehmen, daß der hier gefundene

1) S. Young, Fractional Distillation. London 1903.

geradlinige Verlauf auch bei anderen Temperaturen vorliegen wird, insbesondere wenn diese in der Nähe der ersteren liegen.

Dieser Schluß gewinnt ganz erheblich an Sicherheit dadurch, daß sich gerade bei dem binären System Methylalkohol-Aethylalkohol eine andere Eigenschaft aufweisen läßt, welche ebenfalls einen geradlinigen Verlauf zwischen den Werten der reinen Komponenten besitzt und welche nachweislich diesen geradlinigen Verlauf bei erheblichen Temperaturänderungen beibehält. Es ist das die spezifische Wärme der Gemische. Für diese konnte ich durch Versuche mit Herrn Müller (Teil I dieser Studien) nachweisen, daß sowohl bei Null Grad als auch bei Temperaturen zwischen 20 und 30 Grad die spezifische Wärme innerhalb der Versuchsfehler geradlinigen Verlauf zwischen den Werten für die reinen Komponenten aufweist. Die Annahme, daß es mit dem Verlauf der Dampfdrucke ähnlich sei, ist daher wohl als ganz berechtigt anzusehen.

Auf Grund dieser Ueberlegung darf ich in die Gleichung (1) an Stelle der Werte für p'_a und p'_b die der Gleichungen (3a) und (3b) entsprechenden Werte substituieren. Dann wird:

$$Q(x, T) = -RT^2 \frac{d}{dT} \left[x \ln \frac{1}{x} + (1-x) \ln \frac{1}{1-x} \right].$$

In diesem Ausdruck aber ist die ganze eckige Klammer von T unabhängig, und demnach der Temperaturkoeffizient derselben Null. Es folgt somit, daß

$$Q(x, T) = 0$$

sein muß und zwar für beliebige Werte von x für ein gewisses Bereich von Temperaturen. Damit haben wir eine Folgerung der Nernstschen Gleichung für die Mischungswärme erhalten, welche eine einfache, aber doch recht allgemeine Aussage macht über die Wärmetönungen beim Mischen von Methylalkohol mit Aethylalkohol. Diese Folgerung steht nun in bester Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Ich habe nämlich in Gemeinschaft mit meiner Frau unter anderm die Wärmetönung beim Mischen dieser beiden Alkohole sowohl bei Null Grad wie auch bei Zimmertemperatur gemessen (Teil II dieser Studien), und wir haben in beiden Fällen über das ganze Mischungsbereich beim Mischen nur Wärmetönungen erhalten, deren Abweichungen von dem Werte Null meist völlig innerhalb der Versuchsfehler unserer gerade für diesen Zweck nicht sehr geeigneten Anordnung liegen. Die Wärmetönungen sind hier also jedenfalls sehr klein und zwar nicht allein für ver-

schiedene Werte von x , sondern auch bei verschiedenen Temperaturen. Die Unabhängigkeit der Wärmetönung von der Temperatur wird in diesem Falle auch dadurch erwiesen, daß die spezifische Wärme der Mischungen der in Rede stehenden beiden Alkohole sich nach der Mischungsregel berechnen läßt, ein Resultat, welches ich, wie oben erwähnt, durch Versuche mit Herrn Müller erhalten habe und aus welchem auf Grund der oben konstatirten thermodynamischen Beziehung direkt die Unabhängigkeit der Wärmetönung von der Temperatur folgt. Uebrigens ist auch dieser geradlinige Verlauf der spezifischen Wärmen, wie schon erwähnt, in verschiedenen Temperaturbereichen vorgefunden worden und es kann demnach die Nernstsche Formel für die Mischungswärme an dem Beispiele des allerdings besonders einfach sich verhaltenden Systemes Methylalkohol-Aethylalkohol als vollständig bestätigt angesehen werden.

Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.

Von

Ernst Hellinger und Otto Toeplitz in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 28. Juli 1906.

Es hat sich in der Algebra der gemeinen komplexen Größen vielfach als nützlich herausgestellt, neben den komplexen Größen selbst auch noch quadratische Systeme von solchen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) = A,$$

sog. Matrizen, als Objekte der Rechnung einzuführen, und zwar in der folgenden Weise: Unter der Summe zweier Matrizen (a_{ik}) , (b_{ik}) versteht man die Matrix $(a_{ik} + b_{ik})$, unter dem Produkt von (a_{ik}) und (b_{ik}) die Matrix $\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ak}\right)$; alsdann kann man die elementaren Rechenregeln der Addition und Multiplikation leicht beweisen, nur gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht. n , die Reihenzahl der Matrizen, ist hierbei eine willkürlich, aber fest gewählte ganze Zahl.

Neuere Untersuchungen aus dem Gebiete der Integralgleichungen und insbesondere die kürzlich von Herrn D. Hilbert gegebene Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Variablen¹⁾ haben nun die Aussicht eröffnet, daß ein ähnlicher Kalkül mit unendlichen Matrizen ($n = \infty$) sich für manche Gebiete der Analysis in ähnlicher Art als nützlich erweisen könnte.

Unter einer unendlichen Matrix verstehen wir ein quadratisches, nach rechts und unten unbegrenzt ausgedehntes System

1) Diese Nachr. 1906, S. 157 ff.

komplexer Größen

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots \\ a_{21}, a_{22}, \dots \\ \dots \dots \dots \end{pmatrix} = (a_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \dots),$$

eine sogenannte Doppelfolge. Man kann von solchen Systemen sprechen, ohne über ihre Elemente irgend welche Konvergenzeigenschaften vorauszusetzen; man kann auch die Summe $(a_{ik} + b_{ik})$ zweier solcher Matrizen stets bilden; aber man kann nicht ohne weiteres von dem Produkte $(\sum_{\alpha=1,2,\dots} a_{i\alpha} b_{\alpha k})$ reden, da die unendliche Reihe $\sum_{\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha k}$ nicht zu konvergieren braucht, wenn man die a_{ik}, b_{ik} ganz willkürlich wählt. Danach ist es ausgeschlossen, in strenger Analogie mit dem Verfahren bei endlichem n die Gesamtheit aller unendlichen Matrizen als Objekte der Rechnung aufzufassen.

So entsteht die Aufgabe, aus der Gesamtheit aller unendlichen Matrizen eine möglichst weite Gesamtheit herauszugreifen, in der sich die elementaren Rechenoperationen etablieren lassen, d. h. das allgemeinste System von unendlichen Matrizen zu umgrenzen, das den folgenden Forderungen genügt:

- I. Die Summe zweier Matrizen des Systems gehört wiederum dem Systeme an.
- II. Das Produkt zweier Matrizen des Systems existiert in dem Sinne, daß $\sum_{\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha k}$ absolut ¹⁾ konvergiert, und gehört wieder dem Systeme an.

Vollständigkeitsforderung $\mathfrak{B}(I, II)$: Das System ist nicht als Teil in einem anderen Systeme unendlicher Matrizen enthalten, welches ebenfalls den Forderungen I, II genügt.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe sind wir unter anderem zu folgenden Resultaten gelangt. Ein gewisses System unendlicher Matrizen, welches in der erwähnten Mitteilung von Herrn Hilbert eine Rolle spielt, genügt allen drei Forderungen; es ist dies das System derjenigen Matrizen (a_{ik}) , deren zugehörige Bilinearformen $\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k$ absolut konvergieren und dem Betrage nach unter einer von den x_i, y_k unabhängigen Grenze M bleiben für alle reellen positiven x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots , deren Quadratsummen $\sum_i x_i^2, \sum_k y_k^2$ konvergieren und gleich 1 sind ²⁾; dieses System möge als das System \mathfrak{H} bezeichnet werden.

1) Ohne eine derartige Forderung kann man das associative Gesetz der Multiplikation nicht beweisen.

2) In Hilbertscher Benennung: beschränkte Formen.

Der Beweis, daß § den drei aufgestellten Forderungen genügt, stützt sich auf die folgenden beiden Konvergenzsätze, die wohl auch an sich Interesse bieten:

Hilfssatz 1. Sei a_1, a_2, \dots eine unendliche Folge reeller positiver Größen und konvergiert die unendliche Reihe (Linearform) $\sum_i a_i x_i$ für alle diejenigen reellen positiven x_1, x_2, \dots , deren Quadratsumme $\sum_i x_i^2$ konvergiert und gleich 1 ist, so konvergiert auch $\sum_i a_i^2$, und es ist für alle jene x_i :

$$\sum_i a_i x_i \leq \sqrt{\sum_i a_i^2}.$$

Hilfssatz 2. Sei eine unendliche Doppelfolge reeller positiver Größen vorgelegt, die der Symmetriebedingung $a_{ik} = a_{ki}$ genügt, und konvergiert die quadratische Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ für alle reellen positiven Wertsysteme x_1, x_2, \dots mit konvergenter Quadratsumme $\sum_i x_i^2 = 1$, so gibt es eine reelle positive Zahl M derart, daß für alle jene Wertsysteme x_i der Wert der unendlichen quadratischen Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \leq M$$

ist.

Man kann diese Sätze auch kurz so aussprechen: Hat eine lineare oder quadratische Form der unendlichvielen Variablen für jedes der Bedingung $\sum_i x_i^2 \leq 1$ genügende Wertsystem einen endlichen Wert, so bleibt sie in dem ganzen Gebiete $\sum_i x_i^2 \leq 1$ unter einer endlichen Grenze (ist „beschränkt“).

Daß § den Forderungen I, II genügt, folgt, wie auch in der Note von Herrn Hilbert enthalten, leicht aus den dort benutzten einfachen Ungleichungen¹⁾. Schwieriger ist der Beweis der Vollständigkeit von §, der sich auf den tiefer liegenden Hilfssatz 2 stützt.

Es hat sich ferner herausgestellt, daß §, obwohl es der Vollständigkeitsforderung genügt, nicht alle Systeme unendlicher Matrizen als Teilsysteme enthält, welche den Forderungen I, II genügen. Man erhält ein anderes, ebenfalls der Vollständigkeitsforderung genügendes System aus den Matrizen A von §, indem man $P^{-1}AP$ bildet, unter P, P^{-1} etwa die Matrizen

1) L. c. S. 176 ff. — Bei Herrn Hilbert entspricht dem Produkte der Matrizen $(a_{ik}), (b_{ik})$ die Faltung der zugehörigen Bilinearformen

$$A(x, \cdot) B(\cdot, y) = \sum_{i, k, r} a_{ik} b_{rk} x_i y_r.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & . \\ 0, & 0, & \frac{1}{3}, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 2, & 0, & . \\ 0, & 0, & 3, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

verstanden. Indem man P variiert, gewinnt man eine große Menge solcher zu \S holoeidrisch-isomorpher, von \S verschiedener Systeme, die alle ebenfalls I, II, $\mathfrak{B}(I, II)$ genügen.

Man kann \S unter der Gesamtheit dieser zu \S isomorphen Systeme eindeutig durch die weitere Forderung charakterisieren:

III. Ist (a_{ik}) eine Matrix des Systemes, so gehört die „konjugierte Matrix“

$$A' = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \dots \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

gleichfalls dem Systeme an.

Aber mit diesen zu \S isomorphen Systemen ist die Gesamtheit der Systeme, die I, II, $\mathfrak{B}(I, II)$ genügen, noch nicht erschöpft. Das System \mathfrak{A} aller unendlichen Matrizen, in deren jeder Kolonne immer nur eine endliche Anzahl von Null verschiedener Elemente steht (die aber mit dem Kolonnenindex beliebig wachsen kann), und deren Elemente im übrigen keiner Konvergenzbedingung unterworfen sind, genügt ebenfalls den drei Forderungen; man kann beweisen, daß es zu \S nicht holoeidrisch-isomorph ist. Ebenso zeigt die Gesamtheit \mathfrak{B} aller unendlichen Matrizen, deren jede Zeile sowohl als Kolonne immer nur endlich viele von Null verschiedene Elemente aufweist, die wiederum keiner Konvergenzeinschränkung unterworfen sind, daß \S nicht das einzige System ist, welches I, II, III und $\mathfrak{B}(I, II, III)$ genügt, d. h. in keinem größeren, I, II, III genügenden Systeme enthalten ist. Vielmehr existiert noch eine große Fülle derartiger Systeme.

Wir behalten es einer ausführlichen Veröffentlichung vor, über alle diese verschiedenen Systeme und ihre Bedeutung für die Analysis eine Uebersicht zu geben. Auch von der Division wird dort noch zu handeln sein. Bei ihr tritt schon im Systeme \S gegenüber den endlichen Matrizen als neu die Möglichkeit auf, daß zu einer (unsymmetrischen) Matrix unendlich viele Reziproke im Systeme existieren, d. h. solche die mit ihr multipliziert die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 1, & 0, & . \\ 0, & 0, & 1, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ergeben. Ein Beispiel bietet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & . \\ 0, & 0, & 1, & . \\ 0, & 0, & 0, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix},$$

zu der die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & . \\ 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 1, & 0, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

für beliebige a_1, a_2, \dots reziprok sind. Zum Schluß sei hier nur noch der Satz erwähnt, daß jedes I, II, $\mathfrak{B}(I, II)$ genügende System die Einheitsmatrix E enthält.

Göttingen, Juli 1906.

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905.

Von

G. Angenheister.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung am 28. Juli 1906.

Vorwort.

Die vorliegende Bearbeitung der Erdbeben-Diagramme der Seismometer des Göttinger geophysikalischen Institutes erstreckt sich auf das Jahr 1905 und schließt sich an den Bericht über das Jahr 1904 von H. Schering und den des letzten Halbjahres 1903 von v. d. Borne. Als Vorarbeiten zu dieser Bearbeitung waren vorhanden die bereits veröffentlichten wöchentlichen Erdbebenberichte, die von Januar 1905 bis August von H. Schering, von August und September von A. Kohlschütter und von Oktober bis Dezember vom Verfasser bearbeitet waren. Der vorliegende Bericht unterscheidet sich von den früheren Jahresberichten in zweifacher Weise. Während bisher nur die Aufzeichnungen des Wiechertschen astatischen 1200 kg Pendels zu Grunde lagen, sind hier von Anfang April 1905 an die Aufzeichnungen eines neuen Pendels zur Registrierung der Horizontal-Komponente (einstweilen nur N-S), des sogenannten 17000 kg Pendels, ferner von Anfang August 1905 an auch die Aufzeichnungen eines neuen Vertikal-Seismometers hinzugezogen worden. Beide Instrumente sind von Herrn Prof. Wiechert konstruiert. Eine Beschreibung derselben findet sich in der Festschrift: „die physikalischen Institute der Universität Göttingen“¹⁾, eine genauere Erklärung wird demnächst erscheinen. Bei der Bearbeitung der Beben ergänzen sich diese

1) Herausgegeben von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1906.

drei Instrumente; die Nahbeben und Vorläufer (kurzer Periode) zeichnet das 17000 kg Pendel am schärfsten auf; die langen Wellen das astatische Pendel. Der erste Vorläufer wird am deutlichsten vom Vertikal-Seismographen aufgezeichnet. Jedoch ließ sich, was Schlüter und jüngst Benndorf¹⁾ sagt, nicht bestätigen, nämlich, daß das Vertikal-Seismometer den ersten Vorläufer gewöhnlich einige Minuten früher angäbe, als die Horizontal-Seismometer. Das 17000 kg Pendel gibt die schwächsten wie die stärksten ersten Vorläufer selten später und dann nur einige Sekunden später als das Vertikal-Seismometer an. Die mittleren Werte für die Konstanten der drei Instrumente sind von Herrn Prof. Wiechert in einem Beiblatt zum wöchentlichen Erdbebenbericht, „Übersicht über die registrierenden Seismometer der Station,“ zusammengestellt. Diese Übersicht ist als Einleitung dem nachfolgenden Erdbebenkatalog für 1905 vorangestellt.

Zweitens unterscheidet sich der vorstehende Bericht von dem früheren dadurch, daß den Amplituden der Bodenbewegung noch die maximalen Beschleunigungen der Bodenbewegung hinzugefügt werden. Denn erst diese geben ein richtiges Bild von der Intensität der Störung. Da rechnerisch vorzugsweise die Sinusschwingungen zugänglich sind und sich diese meist in allen Phasen der Bodenbewegung vorfinden, sollen hauptsächlich diese berücksichtigt werden. Die genaue Berechnung stoßartiger Bewegungen, wie sie am Anfang der einzelnen Phasen vorkommen und die oft das Kriterium dafür bilden, daß eine neue Phase eingeleitet wird, verlangt eine lange und schwierige Arbeit, wie man sie nur in besonderen Fällen aufwenden kann. Immerhin ist es aber leicht möglich, für solche unperiodische Störungen am Anfang der Phasen einen unteren Grenzwert zu finden. Wenn vor dem Stoße der Indicator ruhig oder nur unbedeutend bewegt war, so ist der absolute Wert der Verrückung der Erdoberfläche mindestens gleich

$\frac{a}{V}$, wo a der maximale Ausschlag und V die wirkliche Indicatorvergrößerung ist²⁾. In diesem Sinne sind auch die in dem nachstehenden Bericht angegebenen Amplituden, sofern sie sich auf Stöße (i) beziehen, zu verstehen.

Die maximale Beschleunigung der Bodenschwingung bei sinusartigen Bewegungen ergibt sich folgendermaßen. Bedeutet T die

1) Mitt. der Erdbebenkom. d. Ak. d. Wiss. Wien XXIX 1905.

2) Ich folge in diesen Ausführungen und Bezeichnungen der Theorie der automat. Seismographen von Wiechert. Abh. d. Kgl. Ges. d. W. z. Gött. 1903. Math.-Phys. Klasse. Neue Folge Bd. II, Nr. 2. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung.

Periode der Bodenbewegung, $\bar{\xi}$ den maximalen Ausschlag, δ eine die Phase bestimmende Konstante, ξ den Ausschlag zur Zeit t , so ist

$$\xi = \bar{\xi} \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T}$$

und

$$-\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi} \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T};$$

die maximale Beschleunigung ist dann

$$\pm \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi}.$$

Sie tritt im Umkehrpunkt ein. Als Einheit für die Beschleunigung ist in unseren Tabellen das Milligall angenommen; Gall ist die Centim-Sec. Einheit der Beschleunigung. Da die Amplitude $A = 2\bar{\xi}$ in $\mu \left(= \frac{1\text{mm}}{1000}\right)$ angegeben wird, so wird die Maximale Beschleunigung

$$\Delta G = \pm \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{A}{2.10} \text{ Milligall,}$$

oder angenähert $= \pm \frac{2A}{T^2}$ Milligall.

Auf dem Wege einer ganzen Schwingung wechselt die Beschleunigung beim Durchgang durch die Ruhelage das Vorzeichen und erreicht in den beiden Umkehrpunkten, die mit entgegengesetzten Vorzeichen behafteten Maximal-Werte.

Unsere Angabe über die Größe der Amplituden A_1 und A_2 beziehen sich auf die ganzen Amplituden von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt. Eigentlich entsprächen diesen Amplituden zwei absolut und relativ verschiedene Werte von ΔG , da in den Erdbebenwellen gedämpfte Schwingungen vorliegen. Wir geben hier aber blos den Mittelwert der beiden absoluten Beträge von ΔG für eine ganze Schwingung.

Nach den Werten von ΔG läßt sich die zerstörende Kraft eines Bebens beurteilen. Die kurzperiodigen Bewegungen sind die verderblichen. — Die Energieverteilung innerhalb eines Diagramms läßt sich aus den Werten für ΔG jedoch auch noch nicht erkennen.

Ein Maß hierfür ist das Quadrat der maximalen Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird gegeben durch

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \bar{\xi} \cos 2\pi \frac{t + \delta}{T};$$

ihr Maximalwert ist

$$= \frac{2\pi}{T} \xi$$

und tritt beim Durchgang durch die Ruhelage ein. Sein Betrag im CGS-System ist

$$= \frac{\pi}{T} \cdot A \cdot 10^{-4};$$

das Quadrat der maximalen Geschwindigkeit im CGS-System

$$\frac{A^2}{T^2} \cdot 10^{-7}$$

erhält man auch aus dem im Milligal gemessenen Betrag der Maximalbeschleunigung ΔG durch Multiplication mit

$$\frac{A}{2} \cdot 10^{-7}.$$

Die Amplituden der Bodenbewegungen sind aus den Amplituden der Diagramme und aus der scheinbaren Indicator-Vergrößerung \mathfrak{B} berechnet worden, wobei die Abhängigkeit der scheinbaren Indicatorvergrößerung \mathfrak{B} periodischer Störungen von der Periode der Störung und von der Dämpfung berücksichtigt ist.

V = wirkliche Indicatorvergrößerung.

t = Periode der Bodenbewegung.

T_0 = reducierte Eigenperiode.

τ = Relaxationszeit.

$\varepsilon:1$ = Dämpfungsverhältnis.

$$\mathfrak{B} = \frac{V}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{t}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{t}{T_0}\right)^2}},$$

wobei

$$\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 = \frac{0.733^2 (\log \varepsilon)^2}{1 + 0.733^2 (\log \varepsilon)^2},$$

wie sich aus leichter Umformung der bei „E. Wiechert, Theorie der automat. Seismographen“, angegebenen Gleichungen ergibt.

Ich möchte hierzu noch bemerken, daß Angaben nur über die Größe der Amplituden im Diagramm, auf die man sich vielfach beschränkt, zum Vergleich unbrauchbar sind. Auch die alleinige Angabe über die Vergrößerung V genügt nicht um die Bodenbewegung zu berechnen, da es dann immer noch unmöglich ist, die Abhängigkeit der Vergrößerung von der Dämpfung des Pendels und von der Periode der Bodenbewegung zu berücksichtigen. Nicht unterlassen darf man ferner eine Angabe über

Reibung zu machen, denn beim Vergleich von Amplituden, besonders bei kleinen, wird man sich immer fragen müssen, ob die Amplituden bei beiden Instrumenten durch Reibung im gleichen Maße geändert wurden. Dies gilt besonders für schwache Nahbeben. Es ist also notwendig, falls man nicht vorzieht die Bodenbewegung anzugeben, den Angaben über die im Diagramm gemessene Amplituden und die Perioden der Störung noch solche über Eigenperiode des Pendels, Indicatorvergrößerung, Dämpfung und Reibung hinzuzufügen.

Die Reibung läßt sich mittels eines neuerdings von Marwin angewandten Kunstgriffes erheblich verringern, indem man eine kleine Schüttelvorrichtung anbringt, die der Schreibnadel fortwährend kleine Schwingungen von sehr kurzer Periode (etwa $\frac{1}{10}^{\circ}$) und geringer Amplitude (etwa $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{10}$ mm) erteilt. Hierdurch wird der im Ruhezustande vorhandene Reibungswiderstand herabgemindert; was nun andererseits die Anwendung einer stärkeren Vergrößerung erlaubt; da diese ja bei mechanisch registrierenden Seismographen zum Teil durch den vorhandenen Reibungswiderstand ihre praktische Begrenzung fand.

Ich möchte hier einige Beobachtungen folgen lassen, die ich bei der Bearbeitung des Berichtes gemacht habe.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption.

Bereits im vorigen Jahre¹⁾ stellte ich eine Reihe von Erdbeben zusammen, bei denen sich Wellen, die durch den Gegenpunkt gegangen sind, vorfinden; ich habe aus ihnen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Absorption zu bestimmen versucht. Die Messung der Absorption an Wellen, die den Gegenpunkt passiert haben und zum zweiten Male dieselbe Station treffen, hat den großen Vorteil, eine mittlere Absorption und nicht eine lokale zu liefern, weil sie über einen großen Raum integriert; ferner ist die Art der Bestimmung besonders zuverlässig, weil die Wellen beidemale denselben Apparat in derselben Aufstellung treffen. Beim Vergleich der Amplituden für nahe bei einander liegende Stationen bekommt man wohl nur eine lokale Variation. Erst bei großen Entfernungen, wie z. B. Göttingen und Samoa, wird man einen Mittelwert erhalten.

1) Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Math.-physik. Klasse 1906 Heft 1.

In dem Folgenden (S. 366) habe ich nun eine Tabelle aufgestellt für jene Beben, bei denen sich Wellen vorfinden, die, wie es scheint, die Erde umkreißt haben, darunter auch eins (Calabrische Beben), für welches die Registrierungen zweier weit von einander entfernter Stationen der Rechnung zugrunde gelegt werden konnten. Zunächst habe ich die Herddistanz H angegeben. Diese wurde aus den Vorläufern berechnet, falls nicht der Herd durch Nachrichten (wie bei 4, 8, 9) bekannt war. Nicht immer lassen die Vorläufer eine Herddistanzbestimmung zu. Bei Beben über 10000 km Herddistanz ist es meist nur ungenau möglich die Herddistanz anzugeben. Hierzu gehören besonders eine Reihe von Beben, deren Herd etwa 1—3000 km von Samoa entfernt liegt. Es sind wahrscheinlich submarine Beben, deren Herd man nur rechnerisch feststellen könnte.

Die europäischen Stationen können im vorliegenden Falle nur als eine einzige gelten. Hinzu kommt Samoa, eine dritte geeignete Station fehlt zur Zeit noch. Erst wenn diese vorhanden sein wird, ist eine vollständige Ausnutzung des schönen Beobachtungsmaterials möglich. So war bisher noch nicht zu ermitteln, von welcher Richtung kommend die Wellen in Samoa eintreffen. Die Herddistanz läßt sich für Deutschland nicht angeben.

Ich habe diese Beben, die in Bezug auf die Absorption ihrer Energie besonders interessant sind, weil sie aus der Nähe des Gegenpunktes (vielleicht aus der Gegend von Neuseeland) kommen, leider nicht verwerten können.

In der nächsten Collonne der Tabelle habe ich die Zeit zwischen dem ersten Auftreten der Wellen (L) und ihrer ersten Wiederkehr L_1 , nämlich $T_1 - T$, angegeben. Unter L und L_1 sind hier für gewöhnlich Wellen von 18—20^e Periode gemeint, denn bei ihnen liegt meistens das Maximum der Bodenbewegung. In zwei Fällen lassen sich aber auch Wellen von etwa 70^e Periode zuerst beim Beginne von L und dann bei der Wiederkehr des Bebens nachweisen. Meist fehlen diese Wellen bei dem wiederkehrenden Beben, wohl hauptsächlich deswegen, weil ihre Vergrößerung bei unseren Pendeln zu gering ist. —

Ferner sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ angegeben. Sie sind berechnet nach der Formel

$$v = \frac{2r\pi - 2H}{T_1 - T} \frac{\text{km}}{\text{sec}},$$

wo r den Erdradius bedeutet.

Sodann folgen die Amplituden A_1 von L und A_1 von L_1 .

Aus ihnen ist die Absorption a pro km berechnet. Setzt man die Energie von L und L_1 den Quadraten der Amplituden proportional und schreibt die Verminderung der Energie nur der Absorption zu, was in erster Annäherung zulässig ist, da ja eine Abnahme infolge der ringförmigen Ausbreitung der Energie auf der Erdoberfläche bei der Rückkehr des Wellenzuges zum selben Ort, der als Kugel gedachten Erde nicht stattfindet, so gilt

$$\frac{A_1^2}{A_1^2} = e^{-ad},$$

$$\frac{A_1}{A_1} = e^{-\frac{a}{2}d}$$

wo d den Weg der Wellen in km und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, da

$$d = v(T_1 - T_2),$$

so

$$av = \frac{2,3}{T_1 - T_2} \log \left(\frac{A_1}{A_1} \right), \quad (\log = \text{Brigg. Log})$$

woraus durch Division mit v sich a ergibt. Für v ist der Mittelwert $3,3 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ genommen, da es sich hier nur um die Hauptwellen handelt. a ist die Absorption der Energie pro km.

Hier sind die Vorgänge bei Ausbreitung der Wellen in einer Ebene auf eine Kugel übertragen. Dies wird nur in erster Annäherung zulässig sein. Wenn ein transversaler Wellenzug gegen eine Oberfläche stößt, so wird ein Teil der Energie sich stets in longitudinale Wellen umsetzen, wird also für den transversalen mit besonderer Geschwindigkeit dahin eilenden Zug verloren sein. Dasselbe gilt umgekehrt für einen longitudinalen Wellenzug. Bei der Ausbreitung auf einer Kugelfläche wird dies dauernd eintreten und schon hierdurch ein Teil der Energie für den betrachteten Wellenzug verloren gehn. Auch der Umstand ist nicht in Rechnung gezogen, daß die Wellen auf ihrem Wege irgend welche besonders orientierte Massen von besonderen Dimensionen zu Eigenschwingungen anregen können und dadurch an Energie verlieren. Die Zerstreuung der Energie der Oberflächenwellen durch Strahlung, — dadurch, daß sie in angrenzenden Medium Störungen erzeugen — erreicht, was die über der Erde liegenden Schichten, Luft und Wasser angeht, wohl nur bei Seebeben oder Beben an der Küste, bei Flutwellen, erhebliche Beträge. Wie im Erdinnern die Schichtungen verschiedener Dichte und Elasticität verteilt sind, und wie tief die Bewegungen der Oberflächenwellen hinabreichen, und was

im besondern an Energie den Wellen der oberen Schicht dadurch verloren geht, daß sie die darunter liegende Schicht in Mitleiden-schaft ziehen, darüber ist einstweilen noch nichts sicheres auszu-machen. Wir müssen also in den folgenden Berechnungen unter Absorption nicht nur die Dämpfung durch Reibung im eigenen Medium verstehen, sondern die Summe aller Energieverluste da-runter zusammenfassen.

Sodann ist hierzu noch zu bemerken, daß nur die horizontalen Komponenten der Bewegung verglichen werden konnten; einmal weil die rückkehrenden Wellen vom Vertikalseismometer, wegen der geringen Vergrößerung dieses Instrumentes für lange Perioden, nicht aufgezeichnet wurden; und andererseits, weil in Samoa zur Zeit ein Vertikalseismometer leider noch fehlt. Die bisherigen Erfahrungen lehren jedoch, daß im allgemeinen das Diagramm der Vertikalkomponente in gleicher Weise abklingt wie das der hori-zontalen, und daß die Bewegung in beiden Komponenten durchweg von gleicher Größenordnung ist, die vom Erdbodenteilchen durch-laufene Ellipse angenähert ein Kreis ist. Der Fehler, der dadurch begangen wird, daß bloß die Bewegung einer Komponente be-trachtet wird, ist daher wahrscheinlich für die hier in Betracht kommende Genauigkeit nicht groß.

Die Beben 7, 9, 11, 12 sind bereits in der citierten Mitteilung von mir bearbeitet worden und werden nur der Vollständigkeit halber mitgeteilt. Für No. 9 (Calabrisches Beben 8. IX 1905) habe ich folgende Berechnung angestellt. Den schon in der ersten Arbeit aus L und L_0 und der Herddistanz berechneten Wert von $v = 3,4 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, so wie den aus A_1 und A_0 berechneten Wert für a verglich ich mit Werten für v und a , die ich aus den Daten der Fernbebenberichte vom Samoaobservatorium der kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, die inzwischen von Linke veröffentlicht worden sind, berechnete. Da Calabrien, Göttingen und Samoa fast genau auf einem größten Kreis liegen, so gilt für diese Entfernungen fol-gendes. Die Bebenwellen kommen von Süden zur hiesigen Station, gehen über den Nordpol nach Samoa, von dort zum Gegenpunkt von Calabrien, wo sich die sich ringförmig ausbreitende Energie wieder sammelt um dann wieder zum Bebenherd zurückzuströmen. Die Entfernung Göttingen—Samoa berechnet sich zu rund 16000 km, der Weg Samoa—Gegenpunkt von Calabrien—Samoa—Göttingen zu 20800 km (Göttingen—Calabrien 1600 km). Die Eintrittszeiten sind für Wellen von 15–20°, die das Maximum der Bewegung enthalten:

Zum 1ten Mal in Göttingen 1^h 50,7^m

" " " " Samoa 3 9,9

" IIten " " Göttingen 4 49.

Linke (Samoa) giebt für L als Eintrittszeit 2^h 56^m an; um diese Wellen, deren Periode 52—36^s beträgt handelt es sich hier nicht, sondern um Wellen von etwa 20^s, die sowohl in Göttingen, wie in Samoa das Maximum der Bewegung tragen. Diese treffen in Samoa um 3^h 9,9^m ein. Für den ersten Weg (16000 km) brauchen die Wellen 79,2^m; was einer Geschwindigkeit von $3,4 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ (genau $3,37 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$) entspricht; für den zweiten Weg (20800 km) brauchen sie 99,1^m, wozu eine Geschwindigkeit von $3,50 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ gehört; im Mittel also 3,4, was mit dem in der vorigen Arbeit aus L und L_1 berechneten Wert von 3,4 zusammen stimmt.

Bei der Berechnung der Absorption dieser Wellen auf dem Wege Göttingen Samoa kann man die Aenderung der Amplitude nicht ausschließlich der Absorption zu schreiben, sondern es muß auf die Ausbreitung der Energie mit zunehmender Herddistanz Rücksicht genommen werden. Da die Ausbreitung der Energie auf einer Kugeloberfläche vor sich geht, so wird, falls man sich durch Herd und Gegenpunkt die Polaxe der Kugel denkt, im I Quadranten vom Pol zum Aequator die Energiedichte abnehmen, im II. Quadranten vom Aequator zum Gegenpol ein Anschwellen der Energie eintreten. Im Gegenpol würde, wenn keine Absorption vorhanden wäre, derselbe Energiebetrag vorhanden sein, wie im Pol. Auf jedem Breitengrad ist die durch ein zur Fortpflanzungsrichtung senkrechtcs Flächenelement hindurchtretende Energie dem Kreisumfang umgekehrt proportional. Für die Energie der Bewegung an zwei Orten ungleichen Polabstandes gilt also

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{2\varrho_2\pi}{2\varrho_1\pi} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die Radien der Breitenkreise der Orte und φ_1 und φ_2 die geographischen Breiten der Orte bezogen auf den Herd als Pol der Kugel bedeuten. Die Intensität in Samoa wäre also, — wenn keine Absorption vorhanden wäre

$$J_2 = J_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

wenn der Index 2 für Samoa und 1 für Göttingen gilt.

Die Amplitude für Samoa

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}}$$

Wenn ich die auf diese Weise für einen absorptionslosen Fortgang der Wellen für Samoa berechnete Amplitude mit der wirklich dort gemessenen vergleiche, erhalte ich die Absorption a .

Die Daten sind folgende:

$$\varphi_1 = 75^\circ; \varphi_2 = 68^\circ;$$

$$A_1 = 1000'' \text{ in Göttingen gemessen,}$$

$$A_2 = A_1 \sqrt{\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}} = 831'',$$

$$A_2 = 43'' \text{ in Samoa gemessen,}$$

$$a = \frac{1}{v} \cdot \frac{2,3}{T_1 - T_2} \log \left(\frac{831}{43} \right).$$

Für a ergibt sich so 0,00037. Der in der citierten Arbeit aus den beiden Amplituden in Göttingen beim erstmaligen Eintreffen und bei der Rückkehr des Bebens berechnete Wert ergab $a = 0,00034$. Beide Berechnungen sind völlig unabhängig von einander. Man kann die gute Uebereinstimmung daher wohl als ein Argument für die Richtigkeit der angestellten Betrachtung über Ausbreitung und Wiederkehr der Wellen ansehen.

| Nr. | Datum | Periode T' | Herddistanz | $T_1 - T_2$ | A_1 | A_2 | v | a | Bemerkungen |
|------|-----------|-----------------|-------------|------------------|-------|-------|-------|---------|--|
| 1 | 14. II 05 | 20 | 8700 | 103 ^m | 500 | 10 | 3,6 | 0,00038 | |
| 2 | 22. III | 20 | 8700 | 101 | 170 | 20 | 3,7 | 0,00021 | |
| 3 | 22. I | 70 | ? | 66 | 500 | 140 | — | — | |
| | | 20 | | 78 | 140 | 10 | — | — | |
| 4 | 4. IV. | 25 | 6200 | 120 | 700 | 170 | 3,8 | — | |
| | | 20 | | 133 | | | 3,4 | — | |
| 5 | 6. VII | 25 | 9500 | 102 | 600 | 12 | 3,4 | 0,00039 | |
| 6 | 9. VII | 30 | 6700 | 131 | 5000 | 30 | 3,4 | 0,00039 | |
| 7 | 11. VII | 16—18 | 5750 | 161 | 250 | 5 | 3,0 | 0,00026 | |
| 8 | 23. VII | 70 | 6700 | 110 | | | 4,0 | | |
| 9 | 8. IX | 15—20 | 1600 | 178,3 | 1000 | 3 | 3,4 | 0,00034 | } Göttingen—Gegenpunkt — Göttingen Göttingen—Samoa |
| | 8. IX | 15—20 | | 79,2 | 1000 | 43 | 3,37 | 0,00037 | |
| 10 | 15. IX | 20 | 9000 | 110 | — | — | 3,3 | — | |
| 11 ? | 4. XII | 12—18 | 3500 | 117 | 150 | 7 | 4,6 | 0,00028 | |
| 12 | 10. XII | 20 | 8500—10000 | 110 | 75 | 13 | 3—3,4 | 0,00018 | |

Der hier berechnete Wert von a gilt für lange Wellen von etwa 20^s Periode. Für die kurzen Wellen kann a wegen der grösseren Deformationsgeschwindigkeit ganz erheblich grösser sein.

Die Lücken in den Spalten für v und a sind dadurch entstanden, daß sich entweder die Herddistanz nicht angeben oder die Amplitude z. B. wegen starker Ueberlagerung nicht genau genug messen ließ.

Zur Tabelle ist noch hinzuzufügen, daß sich bei einigen Beben (No. 3, 4, 8) nachweisen ließ, daß die Wellen größerer Periode eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Bei No. 3 kann man die Werte wegen der Unkenntnis der Herddistanz zwar nicht angeben, aber es läßt sich aus den Laufzeiten, die für Wellen von 70^s Periode 66^m, für Wellen von 20^s 78^m beträgt, doch schätzen, daß v für die ersteren etwa 25 % größer als für die letzteren ist. Bei No. 8 finden sich wieder Wellen von 70^s Periode (vergl. Fig. 7a, 7b, 7c), denen der große Wert von $v = 4,0 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ entspricht. Als Mittelwert für v bei einer Periode von ungefähr 20^s ergibt sich, wenn man den zweifelhaften Wert von No. 11 ausschließt zu $3,4 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Der Mittelwert von a ist 0,00031.

In der der Berechnung zu Grunde gelegten Anschauung heißt dies: Quellen im Epizentrum die Oberflächenwellen mit einer Energie die proportional ist A_1^2 , so sammeln sie sich im Gegenpunkt mit einer Energie die $A_2^2 = A_1^2 \cdot e^{-20000 \cdot 0,00031}$ proportional ist, also etwa den 490 ten Teil beträgt. Von hier aus strömt die Energie von neuem aus zum Epizentrum zurück, wo sich noch $\frac{1}{242500}$ der alten Energie wieder sammelt. Die Amplitude sinkt also bis zum Gegenpunkt auf $\frac{1}{22}$ und beträgt bei der Rückkehr des Bebens zum Epizentrum nur $\frac{1}{490}$ der ursprünglichen Größe.

Die Aenderung der Amplitude pro km wegen Absorption ist gegeben durch

$$A_2 = A_1 \left(1 - \frac{a}{2}\right) = A_1 \left(1 - \frac{1}{7000}\right) = 0,99985 A_1.$$

Das in mancher Hinsicht interessante Calabrische Beben ermöglicht noch eine Bemerkung über die Geschwindigkeit der I. Vorstörung. Die große Geschwindigkeit, die sich für den ersten Vorläufer berechnet, wenn man die Herddistanz durch die Laufzeit dividiert, (etwa 14 km) beruht zum größeren Teil darauf, daß die Wellen in der Tiefe auf Schichten größerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit stoßen, denn ihr Weg durch das Erdinnere ist nur wenig kürzer als die Oberflächenentfernung. Das Verhältnis von Bogen b zur Sehne s

$$\frac{b}{s} = \frac{\frac{2r\pi\alpha}{360^\circ}}{2r \sin \frac{\alpha}{2}},$$

wo α der zum Bogen gehörige Centriwinkel ist, wird höchstens, für $\alpha = 180^\circ$, wenn das Beben aus dem Gegenpunkt kommt, gleich $\frac{\pi}{2}$. Mit Ausnahme des einzigen Falles des gradlinigen Durchganges der Wellen durch den Erdmittelpunkt zum Gegenpunkt, ist der Stoßstrahl des ersten Vorläufers stets convex gegen den Erdmittelpunkt, das Verhältnis des Stoßstrahles zum zugehörigen Bogen also stets kleiner als $\frac{b}{s}$. Die Geschwindigkeit der Iten Vorstörung in den oberen Schichten der Erde läßt sich nun schätzen, wenn man die Ankunftszeiten der Störung bei nah am Bebenherd gelegenen Stationen vergleicht und ihre Differenz durch ihre auf dem Bogen gemessene Entfernung dividiert. Die Länge des Bebenstrahls ist zwar nicht gleich dieser Distanz, doch wird sie nicht allzusehr davon abweichen. Ich wählte hierzu das Agramer Beben vom 2. Januar 06. Der Herd bei Agram ist etwa 100 km von Laibach und etwa 760 km von Göttingen entfernt. Wenn man annimmt, daß die Wellenfläche des ersten Einsatzes als sie Laibach berührte noch etwa 700 km in normaler Richtung von Göttingen entfernt war, was sich aus der Lage der 3 Orte angenähert ergibt, so findet man für eine Differenz der Eintrittszeiten in Göttingen und Laibach von 93^s eine Geschwindigkeit von $7,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Da hier $\frac{b}{s} = 1,0013$ und der Emersionswinkel gering ist, — die Amplituden in der Horizontalen und Vertikalen sind fast gleich —, der Strahl also nur wenig gekrümmt ist, so kann man ohne große Fehler zu machen, annehmen, daß der Weg der I Vorstörung bis hier gleich der auf dem Bogen gemessenen Epizentralentfernung ist. Freilich muß man dabei eine nicht allzu große Herdtiefe voraussetzen, sonst wird der berechnete Wert der Geschwindigkeit größer. Mit der so gewonnenen Geschwindigkeit berechne ich die Zeit, zu der das Calabrische Beben im Herd eintrat, wobei der Fehler, der dadurch entsteht, daß ich den Weg der I Vorstörung von Göttingen bis Calabrien auf dem Bogen messe, wiederum nicht allzu groß wird.

Danach findet die Störung in Calabrien um $1^h 42^m 49^s$ statt; in Samoa trifft der erste Vorläufer um $2^h 3^m 36^s$ ein. Der Quotient aus der auf dem Bogen gemessenen Herddistanz und der Laufzeit ergibt $14 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Das Verhältnis von Bogen zur Sehne $\frac{b}{s}$ ist hier 1,32, sodaß der Quotient aus Sehne und Laufzeit $10,7 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ wird. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf dem Stoßstrahl gemessen

ist wegen der Convexität desselben jedenfalls noch ein wenig größer als $10,7 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$.

Die Differenz dieser „mittleren wirklichen“ Geschwindigkeit gegenüber der Geschwindigkeit der ersten Vorstörung in Oberflächenschichten $7,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ rührt daher, daß die Wellen in größeren Tiefen auf Schichten größerer Geschwindigkeit treffen. Hierzu mag noch bemerkt werden, daß man für die ersten Vorstörungen noch geringere Geschwindigkeiten als $7,5$ erhält, wenn man noch näher am Epicentrum liegende Stationen vergleicht. So erhielt Crendner für Voigtländische Beben (beobachtet in Leipzig und Göttingen) etwa $6 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$.

Phasen und Perioden im Diagramm. (Fig. 1—7a)

Ich möchte hier noch einige Bemerkungen über die sehr langen Wellen (40—70^s) beifügen. Diese Wellen treten deutlich und rein, — frei von Ueberlagerungen — nur im Beginn der Hauptphase sehr weit entfernter Beben auf, und sind dann meist Träger des Maximums der Bewegung, während die Wellen kürzerer Periode (10—15), die bei Nahbeben die Maximalbewegung besitzen, in der Hauptphase gänzlich fehlen. Man hat sich diese Eigentümlichkeit der Diagramme vielleicht so zu erklären.

Bei nahen Beben unterscheiden sich nur zwei Phasen. Gleich nach den kurzen stoßartigen Wellen (1—6^s) des ersten Vorbebens von kleiner Amplitude setzen die langen Wellen (etwa 10^s) gleich mit der Maximalbewegung ein. Ob diese letzten Wellen anderen von langer Periode 20—70^s überlagert sind oder nicht, ist aus Diagrammen schwer zu entscheiden und wird ganz unmöglich, wenn das Pendel gegen die Anschläge schlägt. Zweiter Vorläufer, lange Wellen und Maximalbewegung fallen zusammen.

Bei mittelweit entfernten Beben (etwa 2—5000 km) tritt der IIte Einsatz deutlich und von der Hauptbewegung gesondert hervor. Der zweiten Vorstörung überlagern sich aber noch die Wellen langer Periode (30—70), die mit ihrer größeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Trägern des Maximum vorangeeilt sind und und sich also dem ihnen fremden Wellenzug des II. Vorläufers, der wahrscheinlich auf anderem Wege als die langen Oberflächenwellen kam, untermischen. Es ist sogar möglich daß sich diese Wellen schon der I. Vorstörung (wahrscheinlich Longitudinalwellen quer durch die Erde) überlagern, da die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit der I. Vorstörung bei geringer Entfernung des

Herdess wohl noch nicht sehr von der Geschwindigkeit der langen Wellen verschieden ist. Ein Beispiel hierfür ist das Calabrische Beben. Es finden sich dort Wellen von 30" in der Horizontal Komponente der I. Vorstörung; im Diagramm der Vertikalkomponente dagegen fehlen sie.

Die Hauptphase mittelweit entfernter Beben beginnt mit Wellen, deren Periode schnell von etwa 30" auf 20" sinken und zeigt bald nach Beginn das Maximum bei etwa 15–20". Bei den Beben dieser Gruppe beobachtet man, wie sich je größer die Herddistanz ist, das Maximum im Zug der Hauptphase mehr und mehr gegen Ende hin verlagert, weil immer mehr von den langperiodigen Wellen (30–50") vor dem Maximum, das noch bei niedrigerer Periode liegt, auftreten.

Bei sehr weit entfernten Beben (über 5000 km) treten nach *P* und *S* zunächst Wellen sehr langer Periode (etwa 50") auf, die allmählich abnehmen auf 30–25", wo das Maximum der Amplitude liegt.

Bei Beben von der Nähe des Gegenpunktes dauern die Wellen von 70–30" Periode recht lang, erst viel später kommen Wellen von 30–20" die meist nur ein scheinbares, ein „Diagramm-Maximum“ zeigen, während das Maximum der Amplituden der Bodenbewegung bei den Wellen hoher Periode liegt. Aus den Beobachtungen ergibt sich also, daß das Maximum der Bodenbewegung allmählich, je größer die Herddistanz wird, desto mehr von Wellen kürzerer Periode auf solche längerer Periode übergeht. Man kann erwarten, daß die Absorption wegen der größeren Deformationsgeschwindigkeit bei Wellen kürzerer Periode größer ist (für gleiche Amplituden). Haben diese also in der Nähe des Herdes das Maximum der Bewegung so muß es in weiter Entfernung auf solche längerer Periode übergegangen sein.

Die Trennung der Oberflächenwellen verschiedener Periode rührt von der verschiedenen Geschwindigkeit her, die den einzelnen Perioden zukommen. Die Wellen längerer Periode eilen den kürzeren voraus.

Nach diesen Erörterungen will ich versuchen, die Verteilung der verschiedenen Perioden der Oberflächenwellen für die drei nach ihrer Herddistanz geordneten Klassen von Beben schematisch darzustellen.

Nahbeben (bis 1000 km).

- I. Phase: *P*, zuweilen sind den kurzperiodigen longitudinalen Wellen schon langperiodige überlagert.
- II. Phase: *S*, *L*, *M* treten gleichzeitig auf und überlagern sich.

Entfernte Beben (1000–5000 km).

- I. Phase: *P*.
 II. Phase: *S* und *L* gleichzeitig, die Wellen in *L* erreichen eine Periode von etwa 40^s.
 III. Phase: *M* etwa bei 15–20^s.

Sehr weit entfernte Beben (über 5000 km).

- I. Phase: *P*.
 II. Phase: *S*.
 III. Phase: *L* Perioden von 40–70.
 IV. Phase: *M* 30^s.

Beben aus der Nähe des Gegenpunktes.

- I. Phase: *P*.
 II. Phase: *S*.
 III. Phase: *M* bei 40–70^s Periode.
 IV. Phase: Wellen von etwa 30–20^s.

Ich habe in der nachfolgenden Tabelle eine Reihe von Erdbeben zusammengestellt, deren Herddistanz von zwei weit von einander entfernten Stationen, Göttingen und Samoa, möglichst verschieden ist, deren Herd also stets erheblich näher an der einen als an der anderen Station liegt. Außer den Herddistanzen gebe ich die Perioden der Hauptphase für beide Stationen an.

| Datum | Charakter des Bebens in Göttingen | Perioden der Haupt- phase in Göttingen | | | Herddistanz von Göttingen | Perioden der Haupt- phase in Samoa | | | Herd- distanz von Samoa km |
|---------|---|---|---------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| | | größte Periode | kleinste Periode | Periode von <i>M</i> | | größte Periode | kleinste Periode | Periode von <i>M</i> | |
| II 19. | I u | 56 | 28 | 56 | | 30 | 12 | 16 u. 13 | 2000 |
| II 27. | I u | 40 | 20 | 35 | | 15 | 10 | 10 | 1000–1500 |
| III 19. | II u | 40 | 16 | 40 | | 16 | 11 | 15 | 2000 |
| IV 4. | III u | | 10 | 10 | 6000 | 44 | 27 | 27 | 13–14000 |
| VI 9. | I u | 45 | | 45 | | 16 | | 16 | 1–2000 |
| VI 12. | II u | 50 | | 50 | | 10 | | 10 | 2000 |
| VI 30. | II u | 40 | 30 | | | 20 | | 20 | |
| VII 17. | II u | 40 | | 40 | | 14 | | 14 | 2–3000 |
| VII 23. | III u | 40 | 6 | 40 | 6700 | 60 | 17 | 60 | 11000 |
| VIII 8. | I u | 45 | | 45 | | 20 | 10 | 12 | 1–2000 |
| IX 8. | III r | 20 | 9 | 9 | 1600 | 52 | 21 | 21 | 1600 |

Es geht aus der Tabelle hervor, daß die kürzeren Perioden aus den Hauptphasen verschwinden, wenn die Wellen große Herddistanz erreicht haben. Die langen Perioden dagegen sind in den Diagrammen der Nahbeben nicht zu finden. Letzteres hat seinen Grund zum Teil wohl darin, daß sie bei Nahbeben aus der starken Ueberlagerung kürzerer Perioden nur schwer herauszuschälen sind, zumal unsere Seismographen für die hohen Perioden nur sehr wenig empfindlich sind. Es wäre sehr wichtig mit einem Pendel hoher Eigenperiode (60°) und starker Vergrößerung diese sehr langen Wellen genauer zu studieren. Das Verschwinden der kurzen Perioden tritt wohl deshalb ein, weil die Absorption für kurze Perioden so groß ist, daß auf dem langen Wege ihre ganze Energie verzehrt wird.

Ich möchte noch auf eine Beobachtung hinweisen, die vielleicht zur Erklärung des Entstehens der verschiedenen Perioden beiträgt. Bei sehr nahen Beben etwa 1000 km ist das Maximum der Bewegung an sehr kurze Perioden gebunden etwa $5-10^{\circ}$ erst später treten allmählich größere Perioden auf. Man kann sich hier den Vorgang vielleicht folgendermaßen vorstellen:

Beim Bruch oder bei der Verlagerung einer Scholle treten zunächst heftige Erderschütterungen auf, welche die der Bruchstelle nahen Teile der Scholle in kurzen Perioden erzittern lassen. Wegen ihrer großen Maximalen Beschleunigung kommt ihnen die zerstörende Kraft zu. Nach und nach erst gerät die ganze Scholle in Schwingungen, die immer tiefer greifen und schließlich die ganze Erdrinde in Vibration versetzen. Dies sind die Schwingungen längerer Periode¹⁾. Wenn man sich die ganze Erdrinde schwingend vorstellt, dann liegt natürlich nahe, die verschiedenen Perioden ($20-70^{\circ}$) als Oberton und Grundton aufzufassen.

Man sieht aus allem, welch ein kompliziertes Bild uns die starken näheren Erdbeben liefern; die vielfachen Ueberlagerungen lassen sich nur schwer und unsicher auseinanderschälen. Viel klarer zeigen sich die verschiedenen Wellen in starken sehr weit entfernten Beben. Es wird eine der nächsten Aufgaben sein, dies Auseinanderziehen des Bebenbildes, diese Trennung der einzelnen Wellenzüge, kurz die Entstehung des seismischen Spektrums zu ergründen. Dazu sind von allem mehrere weit non einander entfernte Stationen notwendig.

1) Wiechert (Göttinger Festschrift) schreibt den Schwingungen die die Erdrinde bis zur Magmaschicht in Bewegung setzen eine Periode von etwa 20° zu.

Natur der Wellen.

Die Registrierungen, besonders der Vertikalkomponente, gestatten einige Bemerkungen über die Natur der Wellen.

Zunächst zeigt sich, was schon von Schlüter mit seinem als Vertikalseismometer eingerichteten Klinographen beobachtet wurde, daß mit wachsender Entfernung vom Bebenherd die Vertikalkomponente des I. Vorläufers der horizontalen gegenüber stark zunimmt, oder daß der Emersionswinkel wächst.

Außerdem aber zeigt sich, daß beim IIten Vorläufer umgekehrt mit wachsender Entfernung die horizontale Komponente der Vertikalen gegenüber zunimmt. Falls der IIte Vorläufer ein Wellenzug durch das Erdinnere ist, würde dies bedeuten, daß die Deformationen zunächst senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung erfolgen, sodaß bei einem Emersionswinkel von 90° die Vertikalkomponente 0 würde. Das Verhältnis von vertikaler zu horizontaler Komponente ist dann gleich dem cotangens des Emersionswinkels. Diese Funktion fällt mit wachsendem Winkel, also mit zunehmender Herddistanz. Ferner läßt sich erkennen, daß bei Beben, deren Richtung mit einer der Komponenten Richtungen zusammenfällt, der IIte Vorläufer nicht in dieser, sondern in der dazu senkrechten Richtung die größte Amplitude besitzt, und wenn ein scharfer Einsatz des IIten Vorläufers vorhanden ist, dieser wie auch das Maximum der Hauptphase dort früher auftritt: der Einsatz der II. Vorstörung um wenige Sekunden, die Hauptphase um etwa 1^m . Diese Bevorzugung der einen Richtung läßt wieder vermuten, daß wir es hier mit Wellen zu tun haben, deren Deformation senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung erfolgt. Es ist hier aber für Folgerungen Vorsicht geboten und mehr Material zu sammeln. — In dem nachfolgenden Bericht ist bei den einzelnen Beben, wo solche Erscheinung beobachtet wurde besonders darauf hingewiesen. Als Beispiel diene das Calabrische Beben, dessen Wellen fast genau von Süden kommen (vergl. Fig. 8a, 8b, 8c). *P* ist in der Vertikalen und in *NS* scharf; in *NS* größer als in *EW*. Die Deformation erfolgt also zunächst in Richtung der Fortpflanzung von *P*. *S* dagegen ist in der Vertikalen schwach und in *NS* schwächer als in *EW*. Auch in den Aufzeichnungen des Calabrischen Bebens durch das Wiechert'sche Pendel in Upsala ist *P* in *NS* stärker als in *EW* und *S* in *EW* stärker als in *NS*¹⁾. Die

1) Herr Dr. Åkerblom war so liebenswürdig mir die Kurven zur Verfügung zu stellen.

Deformation bei *S* erfolgt also umgekehrt wie bei *P* senkrecht zur Richtung der Fortpflanzung. Das Maximum der langen Wellen tritt früher in *EW* als in *NS* ein, also auch hier scheint die Deformation zunächst senkrecht zur Fortpflanzung zu erfolgen, um dann in schneller Azimutänderung in jede andere Richtung überzugehen; auch in die verticale. Dort tritt das Maximum wohl immer später als in der horizontalen ein.

Bewegungen nicht seismischen Ursprungs.

Die mikroseismischen Bewegungen zeigen sich sowohl in der horizontalen wie in der vertikalen Komponente. Die Ansicht, daß es sich hier nur um Eigenschwingungen des Bodens in Folge von Luftdruckschwankungen handele, scheint nicht richtig zu sein, da alle möglichen Perioden von 1–10^s vorkommen. Besonders kurze Perioden waren an folgenden Tagen merklich:

Jan. 19. 1906 1^s, 2^s, 3^s.

März 9. 1906 2^s, 3^s.

„ 16. 1906 3^s.

Ein Zusammenhang zwischen mikroseismischer Bewegung und dem Seegang an den Küsten, wie ihn Wiechert schon öfters betont hat, ist dagegen wohl sicher vorhanden; und zwar scheint es, daß die in Göttingen beobachteten starken langperiodigen Bodenbewegungen von großer Regelmäßigkeit den Sturmwellen des Oceans an der steilen felsigen Norwegischen Küste entsprechen. Ein Beispiel hierfür gibt der 16. Sept. 1905, wo innerhalb einer wochenlangen Ruhe, in der die mikroseismische Bewegung nicht über 1^μ steigt, für etwa 12 Stunden starke Bewegung ($T = 7-8^s$; $A = 5''$) einsetzt. Zur gleichen Zeit brandet von Westen der Ocean in Sturmwellen senkrecht gegen die Norwegischen Felsen.

Ferner ist das starke Maximum der mikroseismischen Bewegung am 12. Dez. 1905 gleichzeitig mit einem Maximum des Seeganges VIII an der norwegischen Küste. Eine genauere Untersuchung hierüber ist jedoch noch notwendig.

Auch schnell vorüberziehende meteorologische Erscheinungen lassen sich im Seismogramm des stark vergrößernden 17000 kg-Pendels erkennen. Fig. 9 zeigt das Bild einer in wenigen Minuten vorüberziehenden Boe.

Die 2000fache Vergrößerung des 17000 kg-Pendels genügt, um die Bewegungen der im hiesigen Elektrizitätswerk, 2,5 km entfernt, aufgestellten Gasmotoren aufzuzeichnen. Die Schwingungszahl

der kleinen Wellen entspricht der Tourenzahl der Motoren. Da verschiedene Motoren mit ungleicher Tourenzahl vorhanden sind, so treten, wenn mehrere laufen, Schwebungen auf. (Fig. 10).

Nicht alle Beben ließen sich mit derselben Genauigkeit ausmessen, weil oft Einzelheiten in der mikroseismischen Bewegung untergingen. Auf diese Unruhen sowie auf Störungen im Erdbebenhaus, die die Diagramme zum Teil unleserlich machten, ist nicht immer besonders hingewiesen. Fehlende Zahlen sind darauf zurückzuführen.

Zu den Figuren.

Die Beben diagramme Fig. 1—6b sind nach ihrer Herddistanz geordnet. Man erkennt an ihnen, daß die langperiodigen Wellen mit wachsender Herddistanz sich mehr und mehr zum Ende hin verschieben. Bei Fig. 1 und 2 sind sie noch der I. Vorstörung überlagert; bei Fig. 3, 4a und 4b treten sie während der II. Vorstörung auf, kurz nach *iS*; sie sind von immer stärker werdenden Schwingungen kürzerer Periode überlagert, die schnell zum Maximum der Bewegung anschwellen.

Fig. 5a die Vertikalkomponente des San Franciscoer Bebens zeigt die langen Wellen erst $\frac{1}{4}$ Stunde nach *iS*. Das Maximum der Bewegung liegt aber noch später bei Schwingungen kürzerer Periode.

Fig. 5b zeigt Wellen außerordentlich langer Periode ohne Ueberlagerung.

Fig. 6a und 6b zeigen ein und dasselbe Beben vom 1200 km und vom 100 km Pendel aufgezeichnet. Das Beben ist sehr weiten Ursprunges. Alle Phasen sind deutlich gesondert.

Fig. 7a zeigt trotz starker Ueberlagerung gut erkennbar während des II. Vorläufers Schwingungen von etwa 70^o Periode.

Fig. 7b und 7c zeigt gegen Ende desselben Bebens ein paar Schwingungen von gleicher (70^o) Periode, die dnn Nachläufern überlagert sind. Es handelt sich hier wahrscheinlich um eine Wiederkehr des Bebens.

Fig. 8a, 8b und 8c zeigen das Calabrische Beben mit den auf Seite 17 beschriebenen Eigentümlichkeiten.

Fig. 9 zeigt eine vorbeiziehende Boe, und Fig. 10 die Schwebungen in Folge der Bewegungen der Motoren des Elektrizitätswerkes.

Uebersicht über die registrierenden Seismometer der Station.

Von

E. Wiechert¹⁾.

Vorbemerkungen.

1. Erdbebenwellen. Bei den Erdbeben vollführt der Erdboden erfahrungsgemäß stets gleichzeitig Schwingungen sehr verschiedener Periode. Es scheint, als ob neben den kürzeren um so längere Perioden auftreten, je tiefere Schichten der Erdrinde bei den Dislokationen am Herde in Mitleidenschaft gezogen werden. Nennt man die Perioden bis 2 Sekunden kurz, solche über 2 und bis 20 Sekunden mittellang, solche über 20 Sekunden sehr lang, so kommen Wellen sehr langer Perioden nur von den Zentren gewaltiger Erderschütterungen weit außerhalb Europas zu uns²⁾. Mittellange Perioden finden wir schon bei den größeren Erdbeben Europas. Bei den ganz kleinen Erdbeben im Gebiete Deutschlands herrschen die kurzen Perioden vor. — Für die in einem und demselben Erdbeben auftretenden Schwingungen nimmt die Amplitude mit der Periode sehr schnell ab. Bei dem Indischen Erdbeben vom 4. April d. J. z. B. war die Amplitude der Schwingungen mit 10 Sekunden Periode etwa 1 cm, die Amplitude der Schwingungen mit $\frac{3}{2}$ Sekunden Periode aber nur $\frac{1}{200}$ mm. Auf diese Erfahrungen muß Rücksicht genommen werden, wenn die Auswahl der registrierenden Instrumente zweckmäßig erfolgen soll.

2. Empfindlichkeit der Seismometer. Bei einer Dämpfung, die genügend groß ist, um die Eigenschwingungen des Instrumentes unschädlich zu machen, sind für die Wirkungsweise

1) Wochenbericht No. 48—53.

2) Später haben die Instrumente gezeigt, daß auch bei starken Europäischen Beben Perioden von 30—45^s vorkommen. (8. Okt.; 8. Nov. 1905).

eines Seismometers, — wie ich das schon mehrfach näher ausgeführt habe, — 2 Konstanten maßgebend. Ein Horizontalseismograph — d. h., ein Seismometer, welches die Horizontalerschütterungen des Erdbodens aufzeichnet — verhält sich wie ein einfaches Pendel, dessen gewichtlos gedachte Pendelstange — eventuell weit über das Gewicht hinaus verlängert — die Schreibspitze trägt. Die Pendellänge L dieses äquivalenten einfachen Pendels, d. h. die Entfernung des Gewichts von der Axe, nenne ich „äquivalente Pendellänge“. Ihr entspricht die Eigenperiode des Instrumentes T . Nach den Pendelgesetzen ist nahezu $\frac{1}{4} T^2 = L$, wenn T nach Sekunden, L nach Metern gerechnet wird. Die Entfernung J der Schreibspitze von der Axe bei dem äquivalenten einfachen Pendel nenne ich „äquivalente Indikatorlänge“. Sie gibt die Neigungsempfindlichkeit an, und zwar ist $E = J/206000$ der Ausschlag für eine Bogensekunde. Die Vergrößerung V , mit welcher bei dem äquivalenten einfachen Pendel die Bewegungen des Pendelgewichtes aufgeschrieben werden, nenne ich „Indikatorvergrößerung“. Offenbar ist $J = V \cdot L$. Wo ein Zweifel über die Bedeutung der Worte nicht gefürchtet zu werden braucht, ist es selbstverständlich nicht nötig, den Zusatz „äquivalent“ mit anzuführen. —

Als äquivalent mit einem Vertikalseismometer kann man ebenfalls ein einfaches Pendel der beschriebenen Art annehmen, nur muß man sich das Pendel durch Federkraft so horizontal gehalten denken, das die Schwingungsperiode mit der Pendellänge in derselben Beziehung steht, wie bei der vertikalen Aufhängung. T, L, J, V und auch E bekommen dann analoge Bedeutung, wie bei dem Horizontalseismographen; so können L, J, V nach wie vor: „äquivalente Pendellänge“, „äquivalente Indikatorlänge“, und „Indikatorvergrößerung“ genannt werden.

Von den 5 Größen T, L, V, J, E bestimmen T und L und ebenso J und E einander gegenseitig. Außerdem besteht die Beziehung $J = VL$, es genügt also in der Tat, wie anfänglich erwähnt, die Angabe von 2 Konstanten, um die Wirkungsweise des Instrumentes zu charakterisieren.

Die Theorie lehrt — immer unter Voraussetzung hinreichend starker Dämpfung, um störendes Hervortreten der Eigenschwingungen zu verhüten, — daß Erderschütterungen, deren Periode T unterhalb der Eigenperiode T des Instrumentes liegt oder diese nur ganz wenig überschreitet, nahezu mit der Indikatorvergrößerung V aufgezeichnet werden. Geht die Periode T der Erderschütterungen höher hinauf, so sinkt die Vergrößerung in den

Diagrammen und zwar sehr bald nahezu proportional mit $1/T^2$; zugleich wird sie auch proportional mit der Indikatorlänge J . Es ist also für die Empfindlichkeit des Instrumentes bis etwa herauf zur Eigenperiode T die Indikatorvergrößerung V , darüber hinaus die Indikatorlänge J entscheidend. Es tritt ferner hervor, daß die kleineren Perioden umsomehr gegenüber den größeren bevorzugt werden, je kleiner die Eigenperiode T , also die Pendellänge $L = J/V$ gewählt wird. —

Diese Umstände sind zu berücksichtigen, wenn man die seismischen Instrumente ihren Aufgaben anpassen will. Sollen Erschütterungen kurzer Periode mit starker Vergrößerung aufgezeichnet werden, ohne daß Erschütterungen langer Periode die Abbildung undeutlich machen, so muß man V groß, T und damit L und J klein machen. Sollen andererseits Erschütterungen langer Periode registriert werden, ohne daß gleichzeitige Erschütterungen kurzer Periode störend wirken, so muß man J und T , also auch L , groß und V klein machen. — Bei alledem ist noch zu beachten, daß auch die Geschwindigkeit des Registrierpapiere eine Rolle spielt: Sollen kurze Perioden aufgelöst erscheinen, so muß die Registriergeschwindigkeit groß gewählt werden. Will man aber lange Perioden beobachten, so tut man besser mit kleinen Geschwindigkeiten zu arbeiten, weil andernfalls bei der Streckung der Kurven geringere Ausweisungen der Aufmerksamkeit entgehen würden.

Instrumente der Göttinger Station.

4. Einleitung. Frühere Registrierungen hatten gezeigt, daß in Göttingen bei den Erdbeben noch Perioden unterhalb einer Sekunde und über einer Minute zur Geltung kommen. Um diesen weiten Bereich zu umspannen, schien es nötig, entsprechend der in den Vorbemerkungen unter (1) angegebenen Einteilung der Perioden in „kurze“, „mittellange“ und „sehr lange“, die für den dauernden Betrieb bestimmten Instrumente in drei Stufen zu gruppieren. Das so vorgesehene System von Instrumenten ist freilich heute noch nicht vollständig, aber doch konnte schon erreicht werden, daß alle drei Gruppen vertreten sind. So soll denn im Folgenden eine kurze Uebersicht der vorhandenen Instrumente gegeben werden. Die Lücken und die zum Teil recht unerfreulichen Improvisationen werden in dem Masse beseitigt werden, wie es die finanziellen Mittel gestatten.

Wichtig scheint es hier, einen Punkt noch besonders hervorzuheben. Die Gruppierung darf nicht etwa so verstanden werden,

als ob die einzelnen Instrumente für die Registrierung der zu den anderen Gruppen gehörigen Perioden überhaupt nicht in Betracht kämen. Davon ist nicht die Rede. Es kann vorkommen, daß bei sehr starken Erdbeben einzelne Instrumente eben infolge ihrer hohen Empfindlichkeit für die vorherrschenden Perioden unleserliche Aufzeichnungen geben oder ganz versagen. In solchen Fällen treten in sehr willkommener Weise die andern Instrumente ergänzend ein.

5. Uebersicht der Instrumente. Alle Instrumente besitzen eine sehr starke Luftdämpfung; das Dämpfungsverhältnis wird in der Regel in der Nähe von 6:1 gehalten. — Bei mechanischer Registrierung muß zur Ueberwindung der Reibung des Schreibstiftes und der Trägheit des Schreibmechanismus die „stationäre Maße“, d. h. die frei aufgehängte Maße, deren Bewegung von dem Schreibstift aufgeschrieben wird, sehr groß gewählt werden. Da ihr Betrag dann eine wesentliche Bedeutung gewinnt, wird er im Folgenden mit aufgeführt werden.

I. Instrumente für Registrierung von Erschütterungen kurzer Periode.

a) Horizontalseismograph, mechanisch registrierend. Stationäre Maße ca 17000 kg. $T = 1,4$ Sekunden ($L = 50$ cm); $V = 2000$, $J = 1100$ m ($E = 5\frac{1}{2}$ mm). Registriergeschwindigkeit 60 mm in 1 Minute. — Hauptinstrument für Registrierung der deutschen Erdbeben. Nur die Nord-Süd-Komponente wird aufgezeichnet, da die Schreibvorrichtung für die Ost-West-Komponente noch nicht gebaut ist.

b) Vertikalseismograph, photographisch registrierend. T, L, V, J, E nahe ebenso wie bei dem Instrument Ia. Das improvisierte Registrierwerk gibt eine Geschwindigkeit von 6 mm in 1 Minute.

II. Instrumente für Registrierung von Erschütterungen mittellanger Periode.

a) Horizontalseismograph, mechanisch registrierend. Stationäre Maße ca. 1200 kg. $T =$ ca. 14 Sekunden ($L =$ ca. 50 m); $V = 160$, J ca. 8000 m ($E =$ ca. 40 mm). Registriergeschwindigkeit 10 mm in 1 Minute. Der Bearbeitung der Wochenberichte werden in der Regel die Aufzeichnungen dieses Instrumentes in erster Linie zu Grunde gelegt.

b) Vertikalseismograph, mechanisch registrierend. Stationäre Maße ca. 1300 kg. $T =$ ca. 7 Sekunden ($L =$ ca. $12\frac{1}{2}$ m);

$V = 160$, $J = \text{ca. } 2000 \text{ m}$, ($E = 10 \text{ mm}$) Registriergeschwindigkeit 10 mm in 1 Minute . T , L , J , E sind vorläufig absichtlich kleiner gehalten, als es das Instrument verträgt und werden allmählich erhöht werden.

III. Instrumente für Registrierung von Erschütterungen sehr langer Periode.

a) Horizontalseismograph, mechanisch registrierend. Stationäre Maße $\text{ca. } 110 \text{ kg}$. $T = \text{ca. } 63 \text{ Sekunden}$ ($L = \text{ca. } 1000 \text{ m}$); $V = 10$, $J = \text{ca. } 10000 \text{ m}$ ($C = \text{ca. } 50 \text{ mm}$). Das improvisierte Registrierwerk gibt eine Geschwindigkeit von $\text{ca. } 6 \text{ mm}$ in 1 Minute . — Nur die Einrichtung für die Nord-Süd-Komponente ist vorhanden. — Da ein Bedeckungskasten noch fehlt, geben Luftströmungen beständig leichte Unregelmäßigkeiten.

b) Vertikalseismograph. Fehlt.

Die vorstehenden Angaben über die Empfindlichkeit sind nur als ziemlich grobe Annäherungen zu verstehen. Infolge von Temperatur-Schwankungen etc. ändern sich einige der Zahlen fortdauernd. Da Neuregulierungen immer eine Störung des Betriebes bedeuten, werden sie möglichst selten vorgenommen.

Ergänzende Bemerkungen.

Zu dem vorstehenden Bericht von Herrn Professor E. Wiechert über den Bestand an Instrumenten ist zu bemerken, daß das Vertikalseismometer für 2000-fache Vergrößerung nur wenig in Tätigkeit gewesen ist. —

Die folgende Zeichenerklärung ist den Wochenberichten unverändert entnommen. —

Bei der Neubearbeitung der Registrierungen habe ich infolge der Mitteilungen anderer Stationen hin und wieder noch nachträglich in den Kurven Erdbebenaufzeichnungen entdecken können, die sich bei der Herstellung der Wochenberichte der Aufmerksamkeit entzogen hatten. Auch waren einige kleine Irrtümer in den Zeitangaben zu verbessern.

Zeichenerklärung.**Charakter des Erdbebens.**

- I = merklich, II = auffallend, III = stark.
 d = (terrae motus domesticus) = Ortsbeben (am Orte fühlbar).
 v = (" " vicinus) = Nahbeben (unter 1000 km).
 r = (" " remotus) = Fernbeben (1000—5000 km).
 u = (" " ultimus) = sehr fernes Beben (über 5000 km).

Phasen.

- P = (undae primae) = erste Vorläufer.
 S = (" secundae) = zweite Vorläufer.
 L = (" longae) = Hauptbeben („lange Wellen“).
 M = (" maximae) = größte Bewegung im Hauptbeben.
 C = (coda) = Nachläufer.
 F = (finis) = Erlöschen der sichtbaren Bewegungen.

Art der Bewegung.

- i = (impetus) = Einsatz.
 e = (emersio) = Auftauchen.
 T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
 A = Amplitude der Erdbewegung, gerechnet von einer Seite zur andern.
 Δg = größte Beschleunigung während einer Schwingung.
 [g = Schwerkraft; $\Delta g/g$ gibt die größte scheinbare Neigung der Vertikalen während einer Schwingung an. Δg — nicht aber A — stellt ein Maß für die Intensität der Erderschütterung dar.]
 $A_N, \Delta g_N$ = N.S.-Komponenten von A und Δg .
 $A_E, \Delta g_E$ = E.W.- " " "

Zeit und Maß.

- Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.
 μ = Mikron = $1/1000$ Milimeter.
 Milligal = $1/1000$ Gal; Gal = Centimeter-Sekunden-Einheit der Beschleunigung. [Es ist $g = \text{ca. } 980 \text{ Gal}$, also 1 Milligal = ca. 1-Milliontel der Schwerkraft. — Bei periodischen Schwingungen ist $\Delta g = \text{ca. } \frac{2A}{T^2}$, wenn Δg nach Milligal, A nach Mikron, T nach Sekunden gerechnet wird.]
-

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | $\Delta E g$ milligal | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|---|--|---|--------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
| | | | | | | AE | AN | | | |
| 1 | Jan. 9 | Iu | e M F | 6 29 ^m 36,2 50 | 16 | | 30 | | 0,2 | |
| 2 | " 13 | IIu | eS L M _N M _E M _N C F | 13 51,2 14 22 30,3 32,8 34,3 15 40 | 20 35 20 20 20 18 | 15 30 80 70 | 10 60 20 85 | 0,07 0,15 0,4 0,35 | 0,05 0,3 0,1 0,4 | |
| 3 | " 13 | Iu | eL C F | 19 14 19,5 | 35 20 16 55 | 11 | 18 | 0,05 | 0,08 | |
| 4 | " 20 | IIr | P S iL M M _N C F | 2 36 6 39 3 40,9 41,7 42,2 3 25 | 1 3—4 5 12 10 12 | 1 4 7 175 90 | 1 6 7 125 140 | 2 0,9 0,6 3,5 1,8 | 2 1,3 0,6 2,5 2,8 | 19/20 nachts zerstören- des Beben in Thessalien (Larissa 1700 km). S-P = 3 ^m (2000 km). L-P = 4,8 ^m (1600 km). |
| 5 | " 20 | Iu | eM C F | 18 36 | 40 18 | 10 | 50 10 | 0,06 0,06 | 0,06 0,06 | |
| 6 | " 22 | IIu | eP iS L _N M _N C eL ₁ F | 3 1 16 8 2 28,8 33 45 4 35 5 3 5 40 | 4 12 7 7 (70) 70 20 18 70 20 | 20 15 75 15 | 5 7 15 10 500 | 2,5 0,2 3,3 0,6 | 0,6 0,09 0,6 0,4 | Um 4 ^h 35 ^m kehrt das Beben wieder, und zwar zuerst sehr lange Wellen (70 ^s Periode), nachher 5 ^h 3 ^m Wellen von 20 ^s . Die Zeit vom ersten bis zum zweiten Eintreffen der Wellen ist für die Wellen von 70 ^s um etwa 10 ^m kürzer als bei den Wellen von 20 ^s , was eine ungefähr 25 % größere Geschwindigkeit für die längeren Wellen bedeutet. Eine direkte Be- rechnung von v ist nicht möglich, da die Herddistanz nicht geschätzt werden kann ¹⁾ . |

1) Für dieses Beben sind von Åkerblom die Göttinger und Upsalaer Diagramme verglichen und bei beiden Umkehr des Bebens gefunden worden. Siehe Nachr. d. kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen Math.-phys. 1906 Heft 1. Dort findet sich auch ein Diagramm des Bebens.

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|---|---|--|---------------------|---|--------------|--|--|
| | | | | | | AE | AN | milligal | | |
| 7 | Jan. 27 | Iu | eP (eS) M F | ^h 13 ^m 6,0 13 16,7 45 14 0 | 2 ^s 16 | 2 ^μ 5 | ^μ 8 | 1 0,04 | 0,06 | |
| 8 | " 29 | Iu | eL M C F | 12 47 52,7 13 5 | 25 12 8—9 | 40 | 25 | 0,6 | 0,4 | |
| 9 | Febr. 1 | Iu | e M F | 22 47 50,3 23 0 | 12 | 15 | 8 | 0,2 | 0,1 | |
| 0 | " 7 | I(r) | e (M _E) F | 22 49 54,7 23 0 | (12) 12 | 10 | 3 | 0,14 | 0,04 | |
| 1 | " 13 | Iu | eP (L) (M _N) C eL F | 5 45,2 6 28 6 37,8 7 32 7 40 | (6) (30) 24 18 20 | | 50 | | 0,2 | Herd etwa 2000 km v Samoa. L—P = 43 ^m (14300k |
| 2 | " 14 | IIIu | P S i (L) M _N M _E C L F | 8 58 26 9 8,3 13,9 23,2 35,4 38,0 11 18 13 | 15 1—2 5 12 (25) 28 50 20 20 16 20 | | 10 1—3 5 20 100 270 (300) 500 200 10 | | 0,9 0,4 0,3 0,3 0,7 (0,2) 2,5 1 0,05 | Vorläufer auf EWsch cher und von kürze Periode als auf NS. Auf beiden Komponen stark ausgeprägte Sch bungen. Maximum der Sch bung 1 ^h 18 ^m früher in E als in NS. Herddistanz geschä auf 8700 km. 11 ^h 18 ^m glatte Sin wellen. (Wiederkehr Bebens). |

E. Angenheister,

| | | | | Zeiten (in sec) | Perioden T | Amplituden | | $\Delta \epsilon g$ | $\Delta \kappa g$ | Bemerkungen |
|----|--------|----|----|--------------------|---------------|------------|-------|---------------------|-------------------|---|
| | | | | | | AE | AN | milligal | | |
| | | | | m | s | " | " | 2 | 2 | M, Maximum der Schwingungen, deren Amplitude schnell abnehmen. Maximum der Schwebung EW um 10 ^s früher NS. |
| | | | | 52,3 | < 1 | 1 | 1 | | | |
| | | | | 1,2 | 12 | | 12 | | 0,17 | |
| | | | | 15,5 | (40) | | | | | |
| | | | | 18,0 | 40 | (200) | (350) | (0,25) | (0,4) | |
| | | | | 21,5 | 16 | 160 | 230 | 1,2 | 1,8 | |
| | | | | | 12 | | | | | |
| | | | | 13 30 | | | | | | |
| | | | | e F | | | | | | |
| | | | | 15 20 | | | | | | |
| | | | | 45 | | | | | | |
| | | | | e F | | | | | | |
| | | | | 5 | | | | | | |
| | | | | e F | | | | | | |
| | | | | 5 13,5 | 28 | 40 | 40 | 0,9 | 0,9 | Herd etwa 2000 km Samoa. |
| | | | | M F | | | | | | |
| | | | | 45,5 | 56 | | 200 | | 0,1 | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 7 10 | | | | | | |
| | | | | e M | | | | | | |
| | | | | 2 14 | (2) | < 1 | | (0,5) | | |
| | | | | 19,3 | (10) | 10 | 10 | (0,2) | (0,2) | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 30 | 7 | | | | | |
| | | | | L | | | | | | |
| | | | | 2 52 | 10 | | | 0,04 | | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 56 | | | | | | |
| | | | | L | | | | | | |
| 18 | " | 26 | I | 3 1/2 | | | | | | Äußerst schwache Wellen. |
| | | | | 4 | | | | | | |
| 19 | " | 27 | Iu | P | | | | | | Herd 1000—1500 km Samoa. |
| | | | | 17 44 45 | | | | | | |
| | | | | (S) | 20 | 20 | | | 0,1 | |
| | | | | L | (40) | | | | | |
| | | | | 18 7,7 | | | | | | |
| | | | | (M) | 35 | | 50 | | 0,08 | |
| | | | | C | 18 | | | | | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 19 30 | | | | | | |
| | | | | e | | | | | | |
| 20 | März 4 | | Iu | 16 30 | 16 | 3 | 3 | 0,02 | 0,02 | Außerordentlich regelmäßige Wellen. |
| | | | | L | (45) | | | | | |
| | | | | (M ₁) | 17 4 | 30 | 30 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | | (M ₂) | 14,4 | 40 | 20 | 0,2 | 0,1 | |
| | | | | C | 16 | | | | | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 18 | | | | | | |
| | | | | e | | | | | | |
| 21 | " | 4 | | 19 2 | 20 | | | | | |
| | | | | M | | | | | | |
| | | | | 35 | | | | | | |
| | | | | F | | | | | | |
| | | | | 20 15 | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | $\Delta E g$ | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|---|--|--------------------------------|--------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------|---|
| | | | | | | T | A _E A _N | | | |
| 22 | März 4 | IIu | eP S | 23 ^h 38,0 ^m 47,8 | 12 ^s 18 | μ μ | 3 2 | | 0,04 0,01 | Schreibarm der EW Komponente abgeschlagen. Dem vorhergehenden Beben sehr ähnlich. |
| 23 | " 5 | | LM (M) (M ₂) C F | 0 10 21 33,5 2 | 70 20 18 17 | | (100) 40 50 | | 0,04 0,2 0,3 | Maxims der Schwebun- gen. |
| 24 | " 14 | Ir | e | 11 10 | (8) | | | | | |
| 25 | " 15 | Ir | e M _N F | 18 22,3 24,5 34 | (3—4) 12 | | 3 10 | | 0,7-0,4 0,14 | |
| 26 | " 15 | I(u) | e F | 19 42 20 | 18 | 10 | 10 | 0,06 | 0,06 | |
| 27 | " 17 | | e | 2 10-15 | 2 | | | | | Den mikroseismischen Wellen überlagert. |
| 28 | " 17 | I | e F | 13 14 30 16 | 2—3 | 1 | | 0,5-0,2 | | |
| 29 | " 17 | Iu | (i(S) eM C F | 22 19 22 28 23 0 | 30 14 | 10 | 20 | 0,02 | 0,04 | Lange glatte Wellen. |
| 30 | " 18 | Iu | e F | 13 50 14 0 | 16 | 1 | 1 | 0,01 | 0,01 | |
| 31 | " 19 | IIu | eP i L _N L _E (iM _N) (M _E) eL ₂ C F | 0 16,3 20,5 1 7 1 3 1 9,0 25 1 44 3 0 | 3 8 10 40 16 17 | 2 5 80 | 1 3 10 200 | 0,4 0,1 0,1 0,6 | 0,2 0,1 0,2 0,25 | Herd etwa 2000 km von Samoa. Der IIte Vorläufer hebt sich nicht hervor. L ist unsicher. Die Herddistanz kann nicht geschätzt wer- den. Um 1 ^h 44 lehr lange Wellen. (Wohl Wiederkehr des Bebens). |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | $\Delta E g$ milligal | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|---|--|--|--|--|---|--|---|
| | | | | | | A _E | A _N | | | |
| 32 | März 22 | II u | P S i ₁ i ₂ LM M C e L ₂ F | 3 ^h 50 ^m 37 ^s 4 0,3 1,1 5,8 17,6 27 6 8 6 50 | 1—4 ^s 15 20 20 30 20 18 20 | 1 ^μ 50 20 | 1 ^μ 6 50 50 80 170 20 | ¹ / ₈ —2 0,11 0,1 | ¹ / ₈ —2 0,05 0,25 0,25 0,2 0,8 | Geschätzte Herddistanz 8700 km. i ₁ und i ₂ sind einander ähnlich. Stark ausgeprägte Schwebungen. Nachdem die Periode von C etwa auf 15 ^s gesunken und verhältnismäßig Ruhe eingetreten ist, treten sich um 6 ^h 8 ^m von neuem lange Wellen hervor (T = 20 ^s). (Wohl Wiederkehr des Bebens). Wellen gleicher Periode sind bei M 4 ^h 27 ^m . |
| 33 | " 22 | I | L F | 11 58 12 15 | 25 | | | | | |
| 34 | April 3 | I(u) | e F | 8 16 30 | 13 | 3 | 3 | 0,03 | 0,03 | Ein paar sehr schwache lange Wellen. |
| 35 | " 3 | Ir | e M C F | 16 9,2 | 16 10 | 25 | 15 | 0,2 | 0,1 | |
| 36 | " 4 | III u | P i S M _N M _E C F | 0 58 55 1 6 8 19 22 5 40 | 1—4 20—25 i 15 10 15 10 10 17 | 50 40 140 400 700 | 5 200 60 600 700 | 0,2 1 8 14 | 2 1 12 14 | Ein Einsatz S ist auf EW nicht zu erkennen (das Beben kommt von Westen). Die Schwingun- gen nehmen allmählich zu und erreichen das Maxi- mum in NS etwa 3 ^m früher als in EW. Das Maximum hält sich etwa 8 ^m in dieser Stärke nimmt dann lang- sam ab, mit wenig zuneh- mender Periode (16 ^s). Wellen von hoher Periode (40—60 ^s) sind vor Beginn des Maximums (während S) vorhanden, jedoch nur schwer aus den starken Ueberlagerungen herauszu- schälen. Perioden von 15—20 ^s lassen sich auf dem Seismogramm des 17000 kg Pendels während S und L trotz starker Ueberlagerung erkennen. Geschätzte Herd- |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g milligal | ΔN g milligal | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|--------|-----------------------|-------------------|------------|-------|------------------------------|------------------------------|--|
| | | | | | | A_E | A_N | | | |
| | | | | h m s | s | μ | μ | | | |
| 37 | April 4 | I(r) | e | 10 30 | | | | | | distanz 6200. In Ostindien verwüstendes Beben um 6 ^h 10 ^m Ortszeit = 1 ^h 14 ^m Greenwich. Zeit. Um 3 ^h 20 ^m treten im Zug der Nachläufer (C) deren Periode im Mittel bis auf 17 ^s gesunken war, lange Wellen, auf deren Periode wieder langsam von 25 ^s auf 20 ^s sinkt (3 ^h 32 ^m). In Schwebungen auf- und ab- schwellend erreichen sie um 3 ^h 45 ^m eine Amplitude $A_E = 10,5^{mm}$ im Diagramm während vorher die Ampli- tude der Nachläufer nicht über 3 ^{mm} im Diagramm stieg (Wiederkehr des Be- bens). |
| | | | L | 31 | 28 | | | | | |
| | | | M | 32,1 | 16 | 50 | 35 | 0,4 | 0,3 | |
| | | | C | | 8 | | | | | |
| | | | F | 50 | | | | | | |
| 38 | " 4 | Ir | e | 11 6,7 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | |
| | | | M | 7,15 | 16 | 15 | 10 | 0,1 | 0,08 | |
| | | | C | | 8 | | | | | |
| | | | F | 20 | | | | | | |
| 39 | " 10 | I(u) | e(M) | 12 48 | 20 | 20 | 5 | 0,1 | 0,02 | |
| | | | C | | (12) | | | | | |
| | | | F | 13 15 | | | | | | |
| 40 | " 14 | I(u) | e | 1 6,5 | 20 | 10 | 5 | 0,05 | 0,02 | |
| | | | C | | (10) | | | | | |
| | | | F | 17 | | | | | | |
| 41 | " 15 | Ir | e | 4 42,0 | 1 | < 1 | | 2 | | |
| | | | | | 8 | 5 | 5 | 0,16 | 0,2 | |
| | | | M_E | 42,4 | 17 | 40 | 15 | 0,3 | 0,1 | |
| | | | M_N | 43,7 | 10 | 20 | 12 | 0,4 | 0,2 | |
| | | | C | | (9) | | | | | |
| | | | F | 50 | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|----------|-------------------|------------------|---|-------------|-----------------------|-----------------------|--------------|--------------|---|
| | | | | | T | A _E | A _N | milligal | | |
| 42 | April 19 | Iu | P | 12 ^h 51 ^m 55 ^s | { 1½ 3—5 | 1/3 ^μ 3 | 1/3 ^μ 3 | 1/3 2/3 | 1/3 2/3 | Herd 1—2000 km von Samoa. Mehrfaches An- und Abschwellen der Bewegung. Glatte Sinuswellen. |
| | | i | 13 5 | | | | | | | |
| | | (M _E) | 13 47 | 25 | | 20 | 10 | 0,06 | 0,03 | |
| | | (M _N) | 50 | 25 | | 15 | 20 | 0,05 | 0,06 | |
| | | C | | 18 | | | | | | |
| | | F | 15 0 | | | | | | | |
| 43 | " 23 | | i | | 0,3; 1 | | 0,05— | | | April 23 1 ^h 40 ^m heftiger aber unschädlicher Erdstoß in England (Registriert vom 17000 kg Pendel, das noch keine Zeitmarkierung hatte. |
| | | M | 47-70 | 1 | | 0,1 | | | | |
| | | F | 130 n. Beginn | | | 0,3 | | 0,6 | | |
| 44 | " 24 | Iu | e | 8 57 | 25 | 5 | 10 | 0,02 | 0,03 | |
| | | M | 59 | 20 | 25 | 15 | 0,12 | 0,07 | | |
| | | C | | 14 | | | | | | |
| | | F | 9 20 | | | | | | | |
| 45 | " 25 | Iu | P | 9 43,3 | 2 | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | Im Verhältnis zu den Vorläufern ist die Hauptbewegung auffallend gering. Herd 1—2000 km von Samoa. Glatte Sinuswellen. |
| | | i | 47,1 | 5 | 5 | 10 | 0,4 | 0,8 | | |
| | | (P ₂) | 10 22,3 | 3 | 1 | 1 | 0,2 | 0,2 | | |
| | | L | 10 37,6 | | | | | | | |
| | | M | 39 | 25 | 15 | 15 | 0,05 | 0,05 | | |
| | | C | | 16 | | | | | | |
| | | F | 11 20 | | | | | | | |
| 46 | " 25 | Ir | e | 14 10,6 | 4—5 | < 1 | | | | |
| | | (M) | 12,6 | 8 | 5 | 5 | 0,2 | 0,2 | | |
| | | F | 15 | | | | | | | |
| 47 | " 26 | I | L | 5 50— | 20 | | | | | Auftauchen langer Wellen. |
| | | | | 6½ ^h | | | | | | |
| 48 | " 26 | Iu | eP | 21 59 | 4 | < 1 | | | | |
| | | iS | 22 7,2 | { i(12) | 25 | | 0,3 | | | |
| | | | | 16 | 10 | | 0,08 | | | |
| | | i ₂ | 15 | 16 | 40 | 15 | 0,3 | 0,1 | | |
| | | M | 30 | 40 | 90 | (40) | 0,1 | 0,05 | | |
| | | C | | 16 | | | | | | |
| | | F | 23 10 | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | $\Delta E g$ | $\Delta N g$ | Bemerkungen | |
|-----|----------|-----------|--------|--|----------|------------|----------------|--------------|--------------|---|----------------|
| | | | | | | T | A _E | | | | A _N |
| | | | | | | | | | | | |
| 49 | April 29 | IIr | P | ^h 1 ^m 48 ^s 13 | 0,5; 2 | " | 0,2; 0,5 | | | EW Komponente stärker als NS in der Hauptbewegung. In der West-Schweiz und Südost-Frankreich kurz vor 3 ^h MEZ Erdbeben; in Wallis einige Häuser beschädigt. | |
| | | | | 49 | 0,5; 2 | | 0,2; 1 | | | | |
| | | | | 49 46 | 0,5; 2 | | 0,2; 2 | | | | |
| | | | | 50 13 | 2 | | 7 | | 3,5 | | |
| | | | L | 50 11 | 16 | | 40 | | 0,3 | | |
| | | | iM | 22 | 12 | 200 | 100 | 3 | 1,5 | | |
| | | | C | | 1,8; 6 | | | | | | |
| | | | F | 2 20 | | | | | | | |
| 50 | " 30 | IIr | iP | 16 13 43 | i 9 | 20 | 10 | 0,5 | 0,2 | Amplitude von M bleibt fast 5 ^m ungeändert. Geschätzte Herddistanz aus P und L 1700 km aus P und S 2500 km. | |
| | | | | | 9 | 5 | | 0,1 | | | |
| | | | | | 2—3 | 2 | | | | | |
| | | | (S) | 17 11 | 9 | 10 | 15 | 0,2 | 0,4 | | |
| | | | L | 18,7 | 25 | | | | | | |
| | | | M | 19,6 | 18 | 50 | 40 | 0,3 | 0,25 | | |
| | | | C | | 12 | | | | | | |
| | | | F | 50 | | | | | | | |
| 51 | Mai 2 | Iu | e | 17 52 | 18 | 5 | 3 | 0,03 | 0,02 | | |
| | | | F | 18 20 | | | | | | | |
| 52 | " 9 | IIu | e(P) | 6 57 | | | | | | | |
| | | | iS | 7 3,9 | 14 | 5 | | 0,05 | | | |
| | | | LM | 18 | 70 | (200) | (50) | (0,1) | (0,02) | | |
| | | | C | | 18 | | | | | | |
| | | | F | 8 20 | | | | | | | |
| 53 | " 11 | Iu | S | | { 3 | 3 | 5 | 0,7 | 1 | | |
| | | | | | 7 | 3 | 5 | 0,1 | 0,2 | | |
| | | | L | 17 59 | 35 | | | | | | |
| | | | M | 18 3 | 24 | 40 | 70 | 0,1 | 0,2 | | |
| | | | C | | 16 | | | | | | |
| | | | F | 7 0 | | | | | | | |
| 54 | " 12 | Iu | eM | 3 38 | 30 | 20 | 20 | 0,04 | 0,04 | | |
| | | | C | | 16 | | | | | | |
| | | | F | 4 5 | | | | | | | |
| 55 | " 18 | IIu | P | 14 | 1 | | 1 | | 2 | P nur auf dem 17000 kg Pendel. | |
| | | | L | 14 (57) | 25 | | | | | | |
| | | | M | (59) | 20 | | 150 | | 0,7 | | |
| | | | C | | 20 | | | | | | |
| | | | F | 16 | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|----------|--------|-----------|-----------------|--|-------------------|------------------|------------------|--------------|--------------|---|
| | | | | | | ΔE | ΔN | | | |
| milligal | | | | | | | | | | |
| 56 | Mai 20 | Ir | (S) | 10 ^h 15 ^m 5 ^s | 1—2 ^s | 0,5 ^μ | 0,5 ^μ | | | 2 ^m lang vor S kurze Wellen (vielleicht P). (Stunde unsicher). |
| | | | L | 19,8 | 6 | 3 | 1 | 0,2 | 0,06 | |
| | | | M | 24 | 25 | 15 | 10 | 0,05 | 0,03 | |
| | | | C | | 11 | | | | | |
| | | F | 40 | | | | | | | |
| 57 | " 21 | Iu | e | 11 20 | 18 | 5 | 5 | 0,03 | 0,03 | |
| | | | F | 11 30 | | | | | | |
| 58 | " 23 | Iu | e | 6 49 | 22 | 10 | 10 | 0,04 | 0,04 | |
| | | | L | 7 14 | | | | | | |
| | | | F | 8 0 | | | | | | |
| 59 | " 29 | Iv | P | 11 17 30 | 1,2 | | 0,3 | | 0,4 | In Steiermark heftiges Beben. Vom 17000 Pendel registriert. M wegen noch fehlender Dämpfung unsicher. |
| | | | S | 18 39 | 1,5 | | 0,7 | | 0,6 | |
| | | | M | 19 (35) | 1,6 | | (5) | | 4 | |
| | | | F | 24 | | | | | | |
| 60 | " 31 | IIu | P | 18 36,5 | 3 | 1 | | 0,2 | | |
| | | | S | 47 | 8 | 10 | 10 | 0,3 | 0,3 | |
| | | | L | 19 10 | (35) | | | | | |
| | | | M | 12,7 | 20 | 75 | 90 | 0,4 | 0,5 | |
| | | | C | | 16 | | | | | |
| | | | F | 20 0 | | | | | | |
| 61 | Juni 1 | IIv | P | 4 45 1 | 0,5—1 | 1 | 1 | 8 | 8 | Zerstörendes Beben in Dalmatien. S und L stärker in EW als in NS. Das Beben kommt fast von Süden. |
| | | | L _N | 47 45 | 12 | | | | 0,9 | |
| | | | iM | 48 45 | 8 | 470 | 300 | 15 | 10 | |
| | | | | | 2 | | 25 | | 13 | |
| | | | C | | 15 | | | | | |
| | | F | 5 30 | | | | | | | |
| 62 | " 1 | Iv | P | 21 49 29 | 0,5 | | 0,5 | | 4 | Herddistanz ca. 1000 km, wahrscheinlich Dalmatien. |
| | | | S | 51 (25) | 1 | | 0,2 | | 0,4 | |
| | | | | | 3 | | 1 | | 0,2 | |
| | | | iM _E | 53 13 | 7 | 20 | 10 | 0,8 | 0,4 | |
| | | | C | | 6; 11 | | | | | |
| | | | F | 22 10 | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|----------------|--|----------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--|
| | | | | | | ΔE | ΔN | | | |
| | | | | | | milligal | | | | |
| 63 | Juni 2 | IIu | P | 5 ^h 51 ^m 47 ^s | 3 ^s | 3 ^μ | 2 ^μ | 0,7 | 0,4 | Herddistanz ca. 9500 km, zerstörendes Beben in Ja- pan. Die Hauptbewegung zeigt besonders auf EW unregel- mäßige eckige Wellen. |
| | | | iS | 6 1 52 | 5—8 i 7 | 3 25 | 3 10 | 0,2 1 | 0,2 0,4 | |
| | | | L | 21 | 14 | 10 | 10 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | M _E | 27,0 | 35 | 100 | 45 | 0,9 | 0,4 | |
| | | | C | | 15 | | | | | |
| | | | F | 7 15 | 12 | | | | | |
| 64 | " 3 | IIr | P | 5 13 59 | 2 | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | |
| | | | iS | 17 5 | 10 | 30 | 10 | 0,6 | 0,2 | |
| | | | iM | 19,5 | 12 | 140 | 90 | 2 | 1,3 | |
| | | | C | | 10 | | | | | |
| | | | F | 6 0 | | | | | | |
| 65 | " 5 | Iu | e | 22 52 | 25 | 10 | 10 | 0,03 | 0,03 | |
| | | | F | 23 10 | | | | | | |
| 66 | " 6 | I(r) | e | 2 5,6 | 4 | 1 | 1 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | M | 15 | 15 | 10 | 10 | 0,09 | 0,09 | |
| | | | C | | 10 | | | | | |
| | | | F | 30 | | | | | | |
| 67 | " 6 | Iu | (e | 2 48,3) | (6 | > 1 | > 1 | 0,06 | 0,06) | |
| | | | M | 3 20 | 25 | 10 | 10 | 0,03 | 0,03 | |
| | | | C | | (14) | | | | | |
| | | | F | 4 0 | | | | | | |
| 68 | " 7 | Iu | M _E | 6 25 | (20) | 5 | 5 | 0,025 | 0,025 | |
| | | | M _N | 29,6 | 14 | 5 | 10 | 0,05 | 0,1 | |
| | | | C | | 11 | | | | | |
| | | | F | 50 | | | | | | |
| 69 | " 9 | Iu | eP | 12 50,5 | 3 | 2 | 1 | 0,4 | 0,2 | Herddistanz 2—3000 km von Samoa. |
| | | | LM | 13 28 | 45 | 70 | 100 | 0,07 | 0,1 | |
| | | | C | | 14 | | | | | |
| | | | F | 14 0 | | | | | | |
| 70 | " 12 | IIu | P | 5 37 2 | 1—2 | 1 | 1 | 2 | 2 | Herddistanz etwa 2000 km von Samoa. |
| | | | | | 5 | 5 | 5 | 0,4 | 0,4 | |
| | | | M | 6 28 | 50 | | 150 | | 0,1 | |
| | | | C | | 18 | | | | | |
| | | | F | 7 20 | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|----------|---------|-----------|--------------------------|---|----------------------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--|
| | | | | | | A_E | A_N | | | |
| milligal | | | | | | | | | | |
| 71 | Juni 14 | II u | eP (S) L C F | 11 ^h 49 ^m 35 ^s 11 14 12 44 14 | 2—3 ^s 16 | 1 ^μ | 1 ^μ | | | Herddistanz etwa 2 bis 3000 km von Samoa. Zweiter Vorläufer, Beginn und Maximum der Hauptbewegung sind nicht zu erkennen von 13 ^h ab sehr regelmäßige Wellen mit geringen Schwebungen von T = 22 (A = 60") auf T = 16 abnehmend. |
| 72 | " 18 | I v | e(P) M F | 13 30 21 51 81 23 | 0,2 0,3 | | < 0,05 0,3 | | 0,25 | |
| 73 | " 19 | I u | eP M C F | 1 32,4 54 2 20 | 3 16 6 | > 1 10 | 10 | 0,08 | 0,08 | |
| 74 | " 23 | I u | e F | 12 34 45 | 18 | 10 | | 0,06 | | |
| 75 | " 23 | I u | e C F | 13 42 14 5 | 25 18 | 15 | 3 | 0,05 | 0,01 | Bis 24 ^h tauchen auf EW immer wieder solche schwache regelmäßige Wellenzüge auf von T = 18" A 10" besonders 15 ^h 12 ^m 16 ^h 7 ^m 16 ^h 45 ^m |
| 76 | " 26 | I u | P M C F | 16 22 6 46 17 25 | 0,7 23 (16) | 6 | 0,2 3 | 0,02 | 0,08 0,01 | |
| 77 | " 26 | I v | eP M C F | 22 53 35 57 54 50 | 0,3 0,3 0,3 | | 0,05 0,6 | | 1 13 | |
| 78 | " 26/27 | I u | e M C F | 23 51 0 0 20 | 2,3 20 15 | 6 | 0,5 3 | 0,03 | 0,2 0,015 | 23 ^h 56 ^m 45 ^s ist ein Nahbeben im Vogtland. |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|----------|---------|-----------|--|---|--|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|--|--|
| | | | | | | A_E | A_N | | | |
| milligal | | | | | | | | | | |
| 79 | Juni 28 | I(r) | e M C F | ^h 17 ^m 24 26,3 40 | ^s 4 18 9 | ^μ 8 | ^μ 6 | 0,05 | 0,04 | |
| 80 | " 30 | IIu | P (S?) L M _E M _N eL eM C F | 17 27 17 43 18 11 18 13 21 20 42-45 49 59 1/2 21 35 | 5 0,5; 2,5 6 40 30 20-30 30 15 18 | 3 90-100 30 10 15 | 0,1; 0,5 3 20 70 20 | 0,2 0,15 0,07 0,02 0,1 | 0,8; 0,2 0,2 0,02 0,2 0,04 | Herd etwa 3000 km von Samoa. Neu Auftauchen der Bewegung. Neuer Stoß. |
| 81 | Juli 1 | I | L | 2 1/2 —3 | | | | | | Lange sehr schwache Wellen. |
| 82 | " 2 | Iu | P (S) M C F | 3 52 4 3,4 15,1 30 | 25 1 13 8 | | 0,1 4 | 0,2 0,07 | 0,05 | Auffällig ist die geringe Größe von Amplitude und Periode in M. |
| 83 | " 3 | Iu | eP L M C F | 0 4 39 57 1 15 | 1,2 30 18 | | 0,05 20 20 | | 0,07 0,04 0,04 | |
| 84 | " 5 | Ir | e F | 1 0 20 | 10 | 3 | 3 | 0,06 | 0,06 | |
| 85 | " 5 | Ir | e (M) C F | 16 45,3 52 17 10 | 5-6 15 8 | 5 | 2 3 | 0,04 | 0,1 0,03 | |
| 86 | " 6 | (Ir) | e (M) F | 15 52,8 16 2 7 | 1-3 7 | 2 | 0,5 2 | 0,08 | 1 0,08 | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|----------------|----------|-----------|--------------------------------|---|----------------|------------|--------|--------------|--------------|---|
| | | | | | T | A_E | A_N | | | |
| 87 | Juli 6 | III u | P | 16 ^h 33 ^m 17 ^s | 1 ^a | " | 0,5" | | 1 | Auffällig sind die einzelnen sich schroff hervorhebenden Maxima. Mehrfach Schwebungen. Etwa um 18 ^h 45 ^m tauchen Wellen längerer Periode und stärkerer Amplitude aus den Nachläufern von kürzerer Periode hervor (Wiederkehr des Bebens). Herddistanz auf 9500 km geschätzt. |
| | | | iS | 43,6 | 1,5 | 8 | 8 | 7 | 7 | |
| | | | | | i 18 | 160 | 25 | 1 | 0,15 | |
| | | | | | 12 | | | | | |
| | | | | | 40 | | | | | |
| | | | L | 17 3 | 30 | | | | | |
| | | | (M _E) ₁ | 7,5 | 25 | 600 | | 2 | | |
| | | | (M _E) ₂ | 9,3 | 22 | 500 | | 2 | | |
| | | | (M _N) ₁ | 13,4 | 22 | | 450 | | 2 | |
| | | | (M _N) ₂ | 14,3 | 20 | | 350 | | 1,7 | |
| | | | (M _N) ₃ | 16,3 | 18 | | 250 | | 1,5 | |
| | | | C | | 14 | | | | | |
| 88 | " 9 | III u | P | 9 49 40 | 1 | | 2 | | 4 | M konnte nur schätzungsweise als untere Grenze angegeben werden, beide Pendel schlugen ca. 20 ^m lang gegen die Arretierschrauben, die ein Abbrechen der Feder durch zu große Elongationen verhindern. Ebenso ist das Maximum von ΔG wahrscheinlich noch zu klein geschätzt. Kurzperiodige Wellen überlagert (17000 kg Pendel). Schwebungen. Kurzperiodige Wellen (17000 kg Pendel) Zweimal um 11 ^h 28 ^m u. 11 ^h 50 ^m treten Anschwellungen ein. Den langen Wellen sind mehrfach Wellen kurzer Periode überlagert. Es ist schwer zu sagen, ob die Anschwellungen neue Stöße oder eine Wiederkehr des Bebens sind und ob die kurzperiodigen Wellen aus der Ferne stammende Vorläuferwellen zu den als neue Stöße aufzufassenden Anschwellungen oder ob es Relaisbeben aus der Nachbarschaft sind. Ersteres scheint der Fall zu sein. |
| | | | | | 4 | 30 | 20 | 3,7 | 2,5 | |
| | | | | | 10—20 | ca. 30 | ca. 20 | | | |
| | | | iS | 9 57 25 | i 14 | 200 | 100 | 2 | 1 | |
| | | | | | 4—6 | 20 | 15 | 1,2 | | |
| | | | | | 40 | 1000 | 500 | 1,2 | 0,6 | |
| | | | i | 10 1 44 | 18 | 700 | 500 | | 3,1 | |
| | | | M | 7 | 40 | 10000 | 10000 | | 12,5 | |
| | | | M für | | | | | | | |
| | | | e ₁ | 11 8-13 | 1—3 | | | | | |
| | | | e ₂ | 11 23 | 6 | | 3 | | 0,2 | |
| | | | M ₁ | 28 | (20) | 150 | 300 | 0,8 | 1,5 | |
| e ₃ | 11 30-35 | | | | | | | | | |
| e ₄ | 36,5-40 | | | | | | | | | |
| M ₂ | 50 | 30 | | 100 | | 0,2 | | | | |
| C | | 20—15 | | | | | | | | |
| L ₂ | 12 18 | 30 | 30 | | 0,07 | | | | | |
| F | 14 10 | | | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | | | Perioden | Amplituden | | $\Delta_E g$ | $\Delta_N g$ | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|---|-----------------------|--|----------|--|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---|
| | | | | h | m | s | T | A_E | A_N | milligal | | |
| | | | | | | | | μ | μ | | | |
| 89 | Juli 9 | Ir | e M C F | 23 | 17,3 18,3 30 | | 2—3 14 7 | 5 | 0,5 3 | 0,05 | 0,25 0,03 | Zunächst haben die Anschwellungen nicht das glatte sinusförmige Aussehn, wie Wellen, die bei der Rückkehr des Bebens auftreten. Wenn ferner die Anschwellungen um 11 ^h 28 ^m und 50 ^m neue Stöße sind, so müßten ihre kurzperiodigen 1ten Vorläufer von 11 ^h 10—18 ^m und 11 ^h 32—40 ^m auftreten. Tatsächlich sind um diese Zeit 11 ^h 8—13 ^m und 11 ^h 30 ^m bis 35 ^m 36,5—40 ^m kurzperiodige Wellen den langen Wellen überlagert (17000 kg Pendel). Um 12 ^h 18 ^m setzen langperiodige Wellen (30 ^m) zwischen den Nachläufern kürzerer Periode ein (Wiederkehr des Bebens). |
| 90 | " 10 | Ir | e M C F | 12 | (51) 55,3 13 10 | | 18 3 | 5 | 5 | 0,03 | 0,03 | |
| 91 | " 10 | Iu | e M C F | 22 | 3 5 35 | | 12 26 12 | 10 | (3) | 0,03 | 0,01 | |
| 92 | " 11 | IIu | P iS _E i L M C F e F | 8 | 48 56 9 0,0 6 8 10-30 11 51 11 15 | 51 13 | 2 10 20 { 30 7 14 20 | 7 25 140 30 5 | 0,2 15 120 30 2 | 0,1 0,1 0,3 1,2 0,03 | 0,1 0,08 0,3 1,2 0,01 | |
| | | | | | | | | | | | | Herddistanz geschätzt auf 5750 km. 11 ^h 51 ^m Wiederkehr des Bebens. |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|---|---|--|------------------------------|------------------------------------|------------------|---------------------------|---|
| | | | | | | A _E | A _N | | | |
| | | | | | | milligal | | | | |
| 93 | Juli 11 | Iu | P i ₁ i ₂ i(M) C F | 15 ^h 50 ^m 5 ^s 16 0 23 2 27 7,9 17 15 | 1—2 ^s 4 6 18 14 | ^μ 4 8 15 | 0,2 ^μ 6 8 < 15 | | 0,4 0,8 0,4 0,09 | Kein ausgeprägtes Maximum, wahrscheinlich vom selben Herd wie das vorige Beben. |
| 94 | " 12 | Ir | eP M _N C F | 11 45 57,7 12 10 | 1 8 20 9 | | < 0,1 8 | | < 0,2 0,25 0,04 | |
| 95 | " 12 | Ir | e F | 12 58 13 5 | 6 (20) | 3 | 2 3 | | 0,1 0,02 | |
| 96 | " 13 | Ir | e M F | 0 4 9 15 | 6 20 | 5 | 2 2 | | 0,1 0,01 | |
| 97 | " 13 | Ir | e M C F | 6 16,6 21,1 35 | 3—4 20 10 | 5 | 0,3 5 | | 0,06 0,02 | |
| 98 | " 13 | I(r) | e | 7 37 | 15 | | 2 | | 0,02 | |
| 99 | " 13 | Iu | e F | 11 5 30 | 15 | 2 | 2 | 0,02 | 0,02 | |
| 100 | " 13 | I(v) | e F | 13 7,1 9 | 1 3—4 | | 0,2 0,5 | | 0,4 0,1 | |
| 101 | " 14 | Iv | eL F | 6 9 5 11 13 | 1—2 5 | 1 | 0,1 1 | 0,08 | 0,2 0,08 | |
| 102 | " 14 | Iu | P (S) M C F | 9 1 26 10 15 20 10 50 | 1—3 6 40 17 | 0,5 2 50 | 0,5 2 (5) | 1 0,1 0,06 | 1 0,1 (0,01) | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|--------|---|------------------|------------------|------------------|--------------|--------------|---|
| | | | | | | T | A_E | | | |
| 103 | Juli 14 | II u | P | 22 ^h 11 ^m 23 ^s | 1—2 ^s | 0,5 ^μ | 0,5 ^μ | 1 | 1 | S vielleicht schon 22 ^h 17 ^m . |
| | | | S | 22,5 | 1 | | | | | |
| | | | L | 29 | 6 | 3 | 3 | 0,2 | 0,2 | |
| | | | M | 31,7 | 30 | | | | | |
| | | | C | | 18 | 300 | 200 | 2 | 1,3 | |
| | | | F | 23 40 | 12 | | | | | |
| 104 | " 16 | Ir | eP | 12 23 5 | 1 | | 0,2 | | 0,4 | |
| | | | M | 27,2 | 7 | 5 | 7 | 0,2 | 0,3 | |
| | | | | | 3 | 2 | 2 | 0,4 | 0,4 | |
| | | | C | | 6 | | | | | |
| | | | F | 40 | | | | | | |
| 105 | " 16 | Ir | P | 19 0 29 | | | | | | |
| | | | M | 10,6 | 10 | 3 | 3 | 0,06 | 0,06 | |
| | | | C | | 6—8 | | | | | |
| | | | F | 25 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 106 | " 17 | II u | iP | 0 43 5 | 1,2 | 5 | 3 | 7 | 4 | Die ersten Vorläufer sind auffällig stark gegenüber dem übrigen Bebenbilde. M und L schwer zu erkennen. Herd etwa 2—3000 km von Samoa. |
| | | | | | 2—3 | | 2 | | 0,06 | |
| | | | M | 1 30 | 25 | 15 | 10 | 0,05 | 0,03 | |
| | | | C | | 40 | 50 | (10) | 0,06 | 0,01 | |
| | | | F | 2 50 | 18 | | | | | |
| 107 | " 17 | I(u) | e | 21 45,7 | 4—6 | 1 | 1 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | (M) | 51 | 14 | 3 | | 0,03 | | |
| | | | F | 22 0 | | | | | | |
| 108 | " 18 | Iu | e | 3 13 | 18 | 3 | 2 | 0,02 | 0,01 | |
| | | | F | 35 | | | | | | |
| 109 | " 19 | Ir | e | 13 45 | 10 | 3 | | 0,06 | | |
| | | | F | 14 0 | | | | | | |
| 110 | " 20 | Ir | | 1 30— | 12—14 | 1—2 | > 1 | 0,02 | 0,01 | Sehr unruhig, wahrscheinlich Bebenschwärme, nicht mikroseism. Bewegung, da auf N. S. nur schwach sichtbar und sehr unregelmäßig. |
| | | | | 20 | 3—6 | | 0,5 | | 0,1 | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | $\Delta E g$ | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|------------|--|------------------|--------------|----------------|--------------|--------------|--|
| | | | | | T | A_E | A_N | | | |
| 111 | Juli 23 | III u | P | 2 ^h 55 ^m 32 ^s | 1,2 ^s | ^μ | 4 ^μ | | 5 | Rußschrift auf dem 17 Tonnen-Pendel mangelhaft Die Amplitude von M und ΔG max. nur als un- tere Grenzen geschätzt, da ca. 25 Minuten lang das Pendel rechts und links gegen die Anschläge schlug Schwebungen. Herddistanz ca. 6700 km. dieselbe wie bei III u Juli 9. dem dieses Beben sehr ähn- lich ist, z. B. auch in der Anschwellung i. Auffällig ist die große Periode der Nachläufer. Um 4 ^h 58 ^m tauchen ein paar lange Wellen (70 ^s) auf, denen sich die Nach- läufer überlagern (wohl Wiederkehr des Bebens). Wellen von gleicher Peri- ode lassen sich um etwa 3 ^h 7—10 ^m trotz starker Ueberlagerung erkennen. |
| | | | | | 7 | 30 | 30 | 1,2 | 1,2 | |
| | | | | | 20—30 | 100 | 70 | 0,3 | 0,2 | |
| | | | iS | 3 3 14 | 20 | 530 | 570 | 2,6 | 3 | |
| | | | | | 7; 14 | 70 | 70 | 3,1 | 3,1 | |
| | | | i | 7,1 | 16 | 600 | 600 | 5 | 5 | |
| | | | M | 13 | 40 | 10000 | 10000 | 13 | 13 | |
| | | | ΔG | | | | | | | |
| | | | max. | ca. 20 | 6 | 600 | 600 | 30 | 30 | |
| | | | C | | 19 | | | | | |
| L | 4 58 | 70 | | | | | | | | |
| F | 7 20 | | | | | | | | | |

Bemerkungen zu den Beben vom 4. April und vom 9.
und 23. Juli 1905 von E. Wiechert¹⁾.

Im mittleren Europa sind neuerdings eine Reihe von Erdbeben-
warten neu gegründet oder mit Apparaten für verschärfte Beob-
achtung ausgerüstet worden und mehrere Stationen veröffentlichen
in kurzen Fristen regelmäßige Berichte über die Registrierungen.
Diese erfreulichen Zeichen lebhaften Fortschrittes lassen den Ver-
such aussichtsvoll erscheinen, schon jetzt die Ergebnisse der euro-
päischen Stationen für eine Bearbeitung der Fernbeben zusammen-
zufassen. Eine Probe, welche ich mit den beiden außergewöhnlich
heftigen und einander sehr ähnlichen Erdbeben vom 9. und vom
23. Juli unternahm, führte zu so einem überraschend günstigen
Erfolg, daß ich die Resultate hier kurz angeben möchte. Ich hoffe,
daß sich daran manche weitere Anregung knüpfen wird.

Die Untersuchungen mußten sich bisher auf den Beginn des
Bebens beschränken, da eine Behandlung späterer Phasen ohne
Verwendung von Kopien aussichtslos schien. Folgende Angaben
konnten benutzt werden:

| | | | | |
|------------------|--|--|--|--|
| Beginn d. Bebens | in Pola | Wien | Straßburg | Göttingen |
| vom 9. Juli | — — | 9 ^h 49 ^m 18 ^s | 9 ^h 50 ^m 2 ^s | 9 ^h 49 ^m 40 ^s |
| " 23. " | 2 ^h 55 ^m 43 ^s | 2 ^h 55 ^m 23 ^s | 2 ^h 55 ^m 52 ^s | 2 ^h 55 ^m 32 ^s |

Um die Geschwindigkeit und die Richtung des Herannahens der Erdbebenwellen, also die Richtung zum Herde, festzustellen, sind 3 Stationen erforderlich. Für den 9. Juli, wo diese eben vorliegen, verwendete ich ein halb graphisches, halb rechnerisches Verfahren. Für den 23. Juli, wo eine Station im Ueberschuß vorhanden ist, ging ich rein rechnerisch mit der Methode der kleinsten Quadrate vor. Zur Bestimmung des Ortes des Herdes wurde noch berücksichtigt, das aus den Göttinger Diagrammen in beiden Fällen auf seine Entfernung von 6700 km zu schließen ist. So ergab sich für den Ort des Herdes:

am 9. Juli: Breite 37° N. Länge 98° E (Greenwich).

am 23. Juli: Breite 43° N. Länge 107° E (Greenwich).

Hiernach lag der Herd beide Male in dem Wüstengebiet der Mongolei, am 9. Juli südwestlich vom Baikalsee — und etwa 1500 km von der sibirischen Grenze, am 23. Juli südlich vom Baikalsee und etwa 600 km von der sibirischen Grenze. Diese Resultate lassen es leicht verstehen, warum über gefühlte Wirkung des Bebens vom 9. Juli gar keine Nachrichten bekannt geworden sind und warum das Beben vom 23. Juli zwar genau in den Gebieten Sibiriens, welche nach der Rechnung zunächst in Frage kommen, wirklich gespürt worden ist, aber nur als unschädliches, wellenförmiges Schwanken des Erdbodens: der eigentliche Herd lag eben auch hier noch in weiter Entfernung. —

Eine gerade Linie, welche die beiden Herde verbindet, führt nach Indien, in die Nähe des Schauplatzes des schrecklichen Bebens vom 4. April dieses Jahres. Es liegt darum die Vermutung nahe, daß alle drei Beben in ursächlichen Zusammenhang mit einander stehen. Es erfolgten hier auf einer 3000—4000 km langen Linie quer durch den Kontinent Asiens nacheinander drei gewaltige Brüche, wobei jeder folgende Bruch weiter nordöstlich vor sich ging. —

Der Erfolg der Rechnung in diesen beiden Fällen führt zu der sicheren Erwartung, daß es bei vollständigen Betriebe der bestehenden und noch geplanten europäischen Stationen schon durch die Beobachtungen an diesen leicht möglich sein wird, den Ort des Herdes jedes größeren und nicht zu fernen Bebens auf wenige Hundert Kilometer genau zu bestimmen. —

Für die Geschwindigkeit, mit welcher die Erderschütterungen durch Mitteleuropa hindurch gingen, ergaben die Beobachtungen vom 9. bezüglich 23. Juli die Werte 12 bezüglich 16 Kilometer in der Sekunde. Da in Wirklichkeit die Geschwindigkeit beide Male sehr nahe gleich gewesen sein muß, werden wir einen Wert zwischen 12 und 16 suchen müssen, und zwar wegen der größeren Zahl der Beobachtungen am 23. wohl näher an 16 als an 12. Das stimmt mit bisherigen Erfahrungen gut zusammen.

E. Angenheister,

| | | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden A _E A _N | | ΔE g milligal | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|----|---|---------------------------|---|---------------------|------------------|--------------|--|
| | | 8 ^h 24 ^m 27,0 40 | 6 ^s 14 9 | 1 ^{''} 5 | 1 ^μ 5 | 0,06 0,05 | 0,06 0,05 | Die folgenden Be- obachtungen sind als Nachstöße an- statt als Vorläufer Form (Periode) und Vorläufer zu er- kennen und wohl von einer Umkehr des Bebens zu trennen. |
| | | P 9 22 | 0,8—1,7 6 | 2 | 0,2 2 | 0,1 | 0,6 0,1 | |
| | | L 40,0 | 20 | | | | | |
| | | M 40,8 | 20 | 10 | 10 | 0,05 | 0,05 | |
| | | M ₂ 44,5 | 14 | 20 | 10 | 0,2 | 0,1 | |
| | | C 8 | | | | | | |
| | | F 10 0 | | | | | | |
| | | M 10 34,0 | 4—6 20 | 10 | 1 10 | 0,05 | 0,1 0,05 | |
| | | C 50 | 10 | | | | | |
| | | F 50 | | | | | | |
| | 23 | Iu e 11 55 | 6 | < 1 | 1 | 0,06 | 0,06 | |
| | | M 12 0,5 | 14 | 5 | 3 | 0,05 | 0,03 | |
| | | C 10 | 8 | | | | | |
| | | F 10 | | | | | | |
| 116 | 23 | Iu P 20 44 51 | 1,7 6 | | 0,5 | | 0,3 | |
| | | M 21 5 | 20 | 20 | 30 | 0,1 | 0,2 | |
| | | M ₂ 8 | 14 | 10 | 6 | 0,1 | 0,06 | |
| | | C 25 | 8 | | | | | |
| | | F 25 | | | | | | |
| 117 | 24 | Iu e P 23 25,3 | 1,2 6 | | 0,1 5 | | 0,001 0,3 | |
| | | M 49,5 | 12 | 3 | | 0,1 | 0,1 | |
| | | C 9 | 9 | 10 | 10 | 0,1 | 0,1 | |
| | | F 1 5 | | | | | | |
| 118 | 27 | Iu e 22 (39) | (4) | < 1 | | 0,1 | | |
| | | S 47 | 6—8 | 2 | 2 | 0,1 | 0,1 | |
| | | M 23 16 | 20 | 10 | 10 | 0,05 | 0,05 | |
| | | C 14 | 14 | | | | | |
| | | F 0 15 | | | | | | |

| Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | $\Delta E g$ | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-------|-----------|---|--|---------------------------------|-----------------|-----------------------------|-------------------------|---|---|
| | | | | T | A _E | A _N | | | |
| i 28 | Iu | e F | 1 ^h 45 ^m 50 ^s | 16 ^s | 5 ^{''} | 3 ^{''} | 0,04 | 0,02 | Nur von dem 17000 kg Pendel registriert. (Plauen??) |
| 30 | Iu | e F | 0 58 1 5 | 16 | 2 | 2 | 0,02 | 0,02 | |
| 30 | Iv | P i M ₁ i M ₂ C F | 1 26 22 41 43 27,5 | 0,4 0,4 0,3 0,3 | | 0,1 0,5 0,4 | | 1 6 9 | |
| 30 | Iu | e (S) M C F | 12 10 45 13 20 | (12) 6 18 9 | 1 2 8 | 3 8 | 0,01 0,1 0,05 | 0,2 0,05 | |
| 31 | Ir | eP (S) M C F | 12 22,0 33,5 13 0 | 6 10 20 8—12 | 1 2 10 | 1 2 10 | 0,06 0,04 0,05 | 0,06 0,04 0,05 | |
| 31 | Ir | e F | 15 33 40 | 20 | | 5 | | 0,02 | |
| g. 2 | I(r) | e (M) F | 10 57 59 11 5 | 6 16 | 1 3 | — 3 | 0,05 0,02 | 0,02 | |
| 4 | IIr | P (S) L M ₁ M ₂ C F | 5 11 45 15,5 16,5 18,3 6 0 | 0,6; 1,5 8 12 12 12 | 5 150 200 | 0,1; 0,7 5 120 150 | 0,2 0,05 1,7 2 | Von dem neu aufgestellten Vertikalseismographen ist ein Diagramm von ähnlichen Dimensionen mit gut ausgeprägten Vorläufern aufgezeichnet. Belgrad 6 ^h 10 ^m M. E. Z. starkes Erdbeben gespürt. | |

Von dem neu aufgestellten Vertikalseismographen ist ein Diagramm von ähnlichen Dimensionen mit gut ausgeprägten Vorläufern aufgezeichnet. Belgrad 6^h 10^m M. E. Z. starkes Erdbeben gespürt.

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|--------------------|--|----------------|------------|------------------|--------------|--------------|--|
| | | | | | T | A_E | A_N | milligal | | |
| 127 | Aug. 4 | I r | | ^h 9 ^m 39 ^s 47 41,0 | 1 ^s | " | 0,2 ["] | | 0,4 | |
| | | | (S) | | 6 | 4 | 4 | 0,2 | 0,2 | |
| | | | | | 1,5 | | 0,5 | | 0,4 | |
| | | | M | 43,5 | 12 | 7 | | 0,1 | | |
| | | | F | 50 | | | | | | |
| 128 | " 6 | I u | e | 19 48 | 30 | 15 | | 0,03 | | |
| | | | F | 20 5 | | | | | | |
| 129 | " 6/7 | II r | e P | 23 57,7 | 1,2 | | 0,1 | | 0,1 | |
| | | | M | 0 1,3 | 14 | 10 | 10 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | C | | 6 | | | | | |
| | | | F | 15 | | | | | | |
| 130 | " 8 | I u | e P | 13 30,2 | 3—5 | 1 | 1 | 0,2 | 0,2 | Herd etwa 1—2000 km von Samoa. |
| | | | M | 14 17 | 45 | 30 | 15 | 0,02 | 0,01 | |
| | | | C | | 17 | | | | | |
| | | | F | 15 45 | | | | | | |
| 131 | " 11 | I u | e | 4 6 | 20 | 5 | 3 | 0,02 | 0,02 | |
| | | | F | 30 | | | | | | |
| 132 | " 12 | I(r) | e P | 21 31 10(?) | 1,2 | | 0,1 | | 0,1 | |
| | | | i ₁ (L) | 32 41 | 5 | 5 | 3 | 0,4 | 0,2 | |
| | | | | | 3 | | | | | |
| | | | | | 1,8 | | | | | |
| | | | i ₂ (M) | 33 2 | 8 | 6 | 5 | 0,2 | 0,2 | |
| | | | C | | 8 | | | | | |
| | | | F | 44,5 | | | | | | |
| 133 | " 13 | II v | e P | 10 23 11 | 0,5—1 | | | | | Amplitude steigert sich allmählich in klein. Stufen, Schwingungen unregel- mäßig. Am Genfer See gspürt. Im Hauptbeben eine lange Welle. T = 15 ^s A _E = 5 ["] . |
| | | | i ₁ (S) | 24 17 | | | 0,2 | | 1 | |
| | | | i ₂ | 49 | | | | | | |
| | | | M | 25 5 | 1,2 | | 2,5 | | 4 | |
| | | | C | | 1—2 | | | | | |
| | | | F | 35,5 | | | | | | |
| 134 | " 13 | I v | e L | 7 30 ³ / ₄ | 1 | | 0,05 | | 0,1 | |
| | | | F | 33 ¹ / ₂ | | | | | | |
| 135 | " 14 | I(v) | e | 11 21 5 | 0,8 | | 0,1 | | 0,4 | |
| | | | F | 23,5 | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|-----------------------------|---|---------------------------------|------------------|--------------|--------------|--------------|---|
| | | | | | T | A_E | A_N | milligal | | |
| 136 | Aug. 15 | Iu | e | 19 ^h 5 ^m 5 ^s | 18 ^s | 2,5 ^μ | ^μ | 0,02 | | Etwa 6 Wellen. |
| 137 | " 17 | IIv | e P L M C F | 3 21 55 22 12 14 3 24,5 | 0,3 0,3 0,3 1,2 0,3 | | 0,1 1 | | 2 20 | In Leipzig gespürt. Vielleicht um 3 ^h 22 ^m 10 ^s zweite Vorphase. |
| 138 | " 17 | I(u) | L F | 20 41 21 | 20 | 3 | | 0,015 | | |
| 139 | " 18 | I | L F | 4 12 15 | 7 | 1,5 | | 0,06 | | |
| 140 | " 19 | I r | e M F | 2 4,0 6,5 10,6 | 0,6 1,5 | | 0,1-0,2 | | 0,1 | |
| 141 | " 23 | I(r) | e M F | 4 36 36,9 38 | 2,5 | | 0,3 | | 0,1 | |
| 142 | " 23 | Iu | e | 16 47,8 | 12 | 1,5 | | 0,02 | | Etwa 10 Wellen. |
| 143 | " 24 | I(r) | e (M) F | 11 6,5 10 13 | 13 | 2 | | 0,02 | | |
| 144 | " 25 | I r | i P S L F | 9 57 21 10 6 4 25 55 | 1 3 7 8 | 0,3 1—2 4 | | 0,3 0,12 | 0,6 0,3 | |
| 145 | " 25 | I(r) | e M F | 19 59 38 20 8 41 10 | 9 12 | 1 2,5 | | 0,02 0,03 | | |
| 146 | " 25 | Iv | e P i(L) C F | 20 43 16 46 18 54 | 2 8 7 | 5 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|----------|---------|-----------|----------------|----------------------------------|-------------------------------|------------------|------------------------------|--------------|---------------------------|--|
| | | | | | | ΔE | ΔN | | | |
| milligal | | | | | | | | | | |
| 147 | Aug. 28 | Iu | e | 5 ^h 14,5 ^m | 12 " | 2,5 ^μ | 0,5 ^μ | 0,03 | 0,01 | Etwa 15 Wellen. |
| 148 | " 31 | Iu | e | 0 6 | 17 6—12 | 2,3 2—3 | 2—3 | 0,02 | | |
| | | | F | 0 22 | | | | | | |
| 149 | " 31 | Iu | e | 15 26 | 18—20 | 4 | | 0,02 | | |
| | | | F | 16 6 | | | | | | |
| 150 | Sept. 1 | IIu | iP | 2 56 57 | 1 | | 0,5 | | 1 | In der Vertikalkomponente ist P stärker als in der Horizontalkomp. u. umgekehrt in der Horizontalkomponente stärker als in der Vertikalkomp. |
| | | | i(S) | 3 6 15 | 2—4 5—10 | 1—5 5 | 1—4 | 0,2 0,04 | 1 | |
| | | | L | 3 19 | 15 | | | | | |
| | | | C | | 10 | | | | | |
| | | | F | 4 20 | | | | | | |
| 151 | " 1 | Iv | iP | 22 3 39 | 1—2 | | 0,5 | | 0,5 | P ist zugleich M. |
| | | | C | | 2 | | | | | |
| | | | F | 22 17 | | | | | | |
| 152 | " 4 | Ir | e | 22 47 18 | | | | | | |
| | | | L | 51,2 | 2 7 | | 0,4 2 | | 0,2 0,1 | |
| | | | F | 23,0 | | 1,5 | | 0,1 | | |
| 153 | " 5 | Ir | e | 1 27,7 | 2 | | | | | |
| | | | M | 30,5 | 8 | 3 | 2 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | F | 40 | | | | | | |
| 154 | " 8 | IIIr | iP | 1 46 22 | 0,5 1—2 5—10 25 3 | | 0,1 1—3 40 80 10 | | 1 1 1,5 0,3 2 | Zerstörendes Beben in Calabrien. Unmittelbar vor P in Welle T = 3 ^h , $\Delta N = 1,5$ P im Seismogramm des Vertikalseismometers scharf, doch klein, T = 5 ^h $\Delta = 15\mu$. S in E W bedeutend (fast doppelt) stärker als in N S (Beben kommt von Süden). S beim Vertikalseismometer nicht sehr deutlich. Das 1200 Kilo Pendel hat 5 Minuten lang gegen die Anschläge geschlagen. Die großen Ausschläge |
| | | | (S) | 49,1 | 10—20 | 50— 210 | 50— 150 | 0,1 1 | 1 | |
| | | | L | 50,7 | 2 10—15 | | 3 500— 1000 1100 | | 1,5 10 27 | |
| | | | M | 53,5 | 9 | | | | | |
| | | | C | | 10—15 | | | | | |
| | | | F | 4 2 | | | | | | |
| | | | L ₂ | 4 49 | 18—20 | 3 | | 0,02 | | |
| | | | L ₃ | 5 6 | 17 | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | | | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|--|-----------------------|----|--|---|------------|----------------------------|--------------|--------------------------|---|
| | | | | h | m | s | T | A_E | A_N | | | |
| | | | | | | | | μ | μ | | | |
| 55 | Sept. 9 | II r | (e) L C F | 13 | 8 | 18 12,8 30 | 2 12 18 9 | 15 15 | 0,1 5 | 0,2 0,1 | 0,05 0,1 | treten in E W fast $1\frac{1}{2}^m$ früher als in NS auf. Die vertikale Komponente zeigt M noch später (etwa 1^m später). Etwa $\frac{3}{4}$ Stunden nach Erlöschen der Bewegung $4^h 49^m$ glatte lange Wellen (Wiederkehr des Bebens). In Calabrien gefühlt. L ist zugleich M. E W Komponente zeigt das Beben stärker als NS. |
| 56 | " 12 | I(r) | e F | 22 | 1 | 33 3,6 | 1,2 | | 0,05 | | 0,1 | In der Stundenangabe kann ein Irrtum vorliegen. |
| 57 | " 13 | I v | e F | 11 | 43 | 46 45,1 | 0,5—1 | | 0,5 | | 1 | In Gloggnitz gespürt. |
| 58 | " 14 | I r | e (M) F | 9 | 10 | 40 15,1 20 | 1,3 2 8 | | 0,05 1 2 | | 0,1 0,5 0,06 | In Calabrien gespürt. |
| 59 | " 14 | I u | iP S (M) C F | 19 | 54 | 3 3 $\frac{1}{2}$ 41 22 | 1,5 6 15—20 15 10—15 | | 0,5 4 10—30 40 | | 0,5 0,2 0,1 0,4 | |
| 60 | " 15 | III u | eP S L C L ₂ F | 6 | 14 | 14 24 $\frac{1}{2}$ 40 8 $\frac{1}{2}$ 9 | 1,3 1—2 15—20 40—50 30 15—20 20 | | 0,5 0,5—1 100 700 | | 1 1 1 1,5 | Die langen Wellen (40 bis 50 ^s) finden sich in der Vertikalkomponente. S ist in der Vertikalkomp. sehr gering. Von 7 ^h 9—14 ^m ist ein Nahbeben überlagert (17000 kg Pendel) von T = 1 ^s u. A _N = 0.1 μ . Gegen 8 $\frac{1}{2}$ steigt die Periode der Nachläufer, die auf 14 ^s gesunken war, wieder über 20 ^s . Die Amplituten wachsen dabei. Wahrscheinlich Wiederkehr des Bebens. |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | Δg g | Δs g | Bemerkungen |
|-----|----------|-----------|--------------------|-----------------------|---------------|----------------|----------------|--------------|--------------|---|
| | | | | | | A _g | A _s | | | |
| 161 | Sept. 15 | Iu | e | 13 23 22 | 1,5 | " | 0,05 | " | 0,05 | |
| | | | S | 34 | | | | | | |
| | | | L | 13 55 | 25 | | 5 | | 0,02 | |
| | | | F | 14 14 14,6 | 10—15 | 2 | 2,5 | 0,03 | 0,03 | |
| 162 | " 15 | I(r) | e | 22 52 40 | 1,5 1—2 | | 0,05 0,1 | | 0,05 0,1 | |
| | | | F | 23,0 | | | | | | |
| 163 | " 16 | Iv | eP | 3 6 45 | 0,3 | | 0,05 | | 1 | |
| | | | i | 7 9 | 0,5 | | | | | |
| | | | i(M ₁) | 7 15 | 0,5 | | 0,2 | | 1,6 | |
| | | | F | 8,0 | | | | | | |
| 164 | " 18 | Ir | e | 10 20,6 | 6—12 | 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,05 | In Calabrien ger |
| | | | F | 25 | | | | | | |
| 165 | " 23 | I(r) | e | 11 41,7 | 10 | 2 | 1 | 0,04 | 0,02 | |
| | | | F | 46 | | | | | | |
| 166 | " 26 | IIu | P | 1 35 17 | 1,2 3—5 | | 0,2 1 | | 0,3 0,2 | iP in der Vertikal- komponente etwa 2° fr in der Horizontal- komponente (17000 kg). |
| | | | S | 42 29 | 15 6 | 3 3 | | 0,7 0,03 | | |
| | | | L | 54 | 20—30 | 10—20 | 3 | | 0,16 | |
| | | | M | 59 | 15 | 30 | 10—20 60 | 0,05 0,3 | 0,05 0,5 | |
| | | | C | | 10—12 | | | | | |
| | | | F | 3,2 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 167 | " 28 | I(r) | (e) | 4 2 | 4 | 1 | 1 | 0,1 | 0,1 | |
| | | | | 5 | 6 | 2 | 3 | 0,1 | 0,2 | |
| | | | | 10 | 8 | 3 | 2 | 0,09 | 0,06 | |
| | | | F | 19 | | | | | | |
| 168 | " 29 | IIu | eP | 12 10,8 | | | | | | Nach dem Vertikal- seismograph, da beide horizontalen Seismograph gen Arbeiten an d strumenten außer waren. Von 12h 47m bis 1200-Kilopendel wie schrieben. Etwa 14h 8m sch die schon fast unu |
| | | | i | 11,7 | | | | | | |
| | | | S | 20 | | | | | | |
| | | | L | 36 | | | | | | |
| | | | | 47 | 10—30 | | 30 | | 0,6 | |
| | | | (M) | 52 | 20 | | 50 | | 0,25 | |
| | | | C | | 15—20 | | | | | |
| | | | F | 14 40 | | | | | | |

| Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | | | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-------|-----------|----------------|-----------------------|----|----|----------|------------|-------|--------------|--------------|--|
| | | | h | m | s | T | A_E | A_N | milligal | | |
| | | | | | | | μ | μ | | | |
| t. 2 | I | e(L) | 14 | 15 | 36 | 10 | | 1 | | 0,02 | gewordenen Nachläufe wieder bis zu $A = 4\mu$ s ($T = 15-20_s$). Vielleicht ein neues Beben. Vielleicht ein Beben. |
| 3 | I | e | 23 | 50 | | 14 | | 1 | | 0,01 | |
| | | (L) | 24 | | | 20 | | | | | |
| | | M | 0 | 3 | | 20 | 3 | 9 | 0,01 | 0,05 | |
| | | F | 0 | 20 | | | | | | | |
| 6 | Iv | e | 1 | 28 | 38 | 0,7 | | | | | In Cosenza gefühlt. |
| | | M | | 30 | 8 | 1,2 | | 0,2 | | 0,3 | |
| | | F | | 31 | | | | | | | |
| 8 | IIr | iP | 7 | 30 | 36 | 5 | 11 | 7 | 1 | 0,5 | In Bulgarien und Mac- donien gefühlt. |
| | | iS | | 33 | 16 | 6 | 8 | | 0,4 | | |
| | | (L) | | 34 | 16 | (30) | (50) | | (0,1) | | |
| | | M | | 36 | 15 | 10-12 | 120 | 110 | 2 | 2 | |
| | | C | | | | 10 | | | | | |
| | | F | 8 | 35 | | | | | | | |
| 14 | Ir | e | 14 | 48 | 22 | 1,3 | | 0,1 | | 0,1 | In Monteleone gefühlt. |
| 14 | Iu | e | 15 | 9 | | 20 | | | | | |
| | | M _N | | 9 | 40 | 20 | | 4 | | 0,02 | |
| | | M _E | | 18 | 40 | 18 | 3 | | 0,02 | | |
| | | F | | 25 | | | | | | | |
| 15 | Iu | P | 21 | 53 | 45 | 12 | (3) | | | | Durch starke mikro- seismische Bewegung i die Messung von A fi für P und S unsicher. |
| | | (S) | 22 | 3 | 9 | 7 | (4) | (4) | 0,2 | 0,2 | |
| | | L | | 14 | 50 | 20 | | | | | |
| | | M _N | | 15 | 47 | 20 | 6 | 12 | 0,03 | 0,06 | |
| | | M _E | | 23 | 5 | 18 | 16 | 6 | 0,1 | 0,04 | |
| | | C | | | | 13 | | | | | |
| | | F | | 45 | | | | | | | |
| 16 | I(u) | e | 12 | 10 | | | | | | | iP in der Vertikalkom- um $11^h 41^m = 80_s$. |
| | | M _N | | 14 | | 20 | | 7 | | 0,04 | |
| | | M _E | | 17 | | 18 | 5 | | 0,03 | | |
| | | F | | 31 | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|--|--|--------------------------|-------------|-----------------------|-------------------|---------------------------|--|
| | | | | | | A_E | A_N | | | |
| | | | | | | milligal | | | | |
| 177 | Okt. 17 | I(n) | e (L) F | 11 ^h 43 ^m 11 58 12 10 | 18 | | 3 | | 0,02 | |
| 178 | " 19 | I(r) | e M F | 4 41 4 45 46 50 | 10 | | 1,5 | | 0,03 | Vielleicht ein Bob |
| 179 | " 19 | Iu | i(S) M F | 16 44 10 16 58 17 28 | 10 30 | 1 | 2 6 | 0,02 | 0,04 0,01 | iP in der Vertikal 16h 34m 30s |
| 180 | " 21 | IIr | iP iS (L) M _N C F | 11 6 30 11 10 50 16 18 23 40 | 2—4 7 9 12 7 | | 6 30 100 | | 3 1,2 1,4 | P in der Vertikal sehr stark, S dort gering. |
| 181 | " 21 | Ir | Pi Si L M _N M _E F | 13 25 22 29 39 34 34 28 38 37 14 | 2 6 6—9 6 6 | 5 5 6 | 2 6 7 | 2,5 0,3 0,3 | 1 0,3 0,4 | |
| 182 | " 21 | Iu | iP eM F | 18 48 15 19 47 20 | 20 | | 2,5 | | 0,01 | iP nur in der Ve komponente. |
| 183 | " 22 | Ir | P (S) (S) M _N M _E F | 3 58 ^{3/4} 4 1 55 4 25 6 16 6 30 | 7 9 12 9 | 4,5 | 1,5 10 28 12 | 0,1 | 0,07 0,2 0,4 0,3 | In Konstantinope fühlt. |
| 184 | " 22 | Iu | e M F | 8 38 9 0 9 7 25 10 | 9 30 15 | 2,5 | 2 20 15 | | 0,05 0,04 0,1 | |
| 185 | " 23 | I(v) | (eL) F | 2 46 50 | 6—9 | | 1,5 | | 0,01 | |

| atum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-------|-----------|--|---|------------------------------|------------|--------------------|--------------|----------------------------|--|
| | | | | T | A_E | A_N | | | |
| t. 24 | I(u) | P _i i S L M _N F | 3 ^h 58 ^m 26 ^s 4 1 48 8 39 28 39 18 55 | 1—2,5 3—12; 6 12 | 2 8 | 0,7 " | 0,4 0,4 | 0,4 | |
| 24 | I(u) | (e) L M F | 18 6 4 30 48 31 19 | 5—9 15—20 17 | | 4 40 | | 0,04 0,3 | Um 17 ^h 56 ^m vielleicht P (T = 3—5). |
| v. 1 | I | | 11 0 34 12 17 | 2—5 20 | | 0,2 | | 0,1 | |
| 3 | I(u) | (P) (S) L M F | 18 42 12 51 45 19 4 35 14 35 20 | 3—4 4 24 | | 1 2 12 20 | | 0,1 0,2 0,04 0,07 | |
| 6 | Iu | e P (e) (S) e L M C | 17 14,6 17 23,3 30 39 48,1 54,2 18 6 | 18 8 35—40 18 15 | 2 1 | 1 1 | 0,01 0,03 | 0,006 0,03 | Das 1200 kg-Pendel hat vom 30. Okt. bis zum 2. No- vember nicht geschrieben. |
| 6 | Iu | e L M F | 18 33 40 37 40 19 | 20 | 11 | 14 | 0,05 | 0,07 | F geht in ein neues Beben über. |
| 8 | Ir | (P) S L M F | 1 19 45 24 27 15 28 45 41 | 3—4 18 | 1 4 | | 0,25 0,02 | | Dieser Wellenzug sieht dem vorigen sehr ähnlich. |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | $\Delta E g$ milligal | $\Delta N g$ | Bemerkungen |
|-----|--------|-----------|---|--|--|--|--------------------------------------|------------------------------|---|-----------------------|
| | | | | | | A _E | A _N | | | |
| 193 | Nov. 8 | Ir | P e L M _E M _N F | ^h 2 56 ^m 15 ^s 3 20 45 25 45 37 5 54 | 1—2 30 15 | ^μ 0,1 ^μ 3 3 | 0,007 3 | 0,2 0,03 | | |
| 194 | " 8 | I | | 13 15 | 30 | | | | | Ein paar lange Weller |
| 195 | " 8 | III r | i P i S L M _N C F | 22 9 45 12 55 14 59 16 4 24 | 3,5 1,8 1 (12) 5 45 25 10,5 16 | 5 8,5 1,6 (150) 80 1800 2250 | 0,8 5 3 (2) 6 6 42 | | Das 1200 kg-Pendel wa nicht in Betrieb. Das 100 kg-Pendel zeig lange Wellen (45°), die zu gleich mit dem Einsetze von S beginnen. Das 17000 kg - Pende schlug mehrfach an di Hemmung. M _N = 2250 μ ist aus der weiteren Verlauf der Kurv geschlossen. | |
| 196 | " 9 | Ir | P (S) L F | 0 31 17 0 35 35 37 22 49 | 2 7 12 | 1 12 | 0,5 0,2 | | | |
| 197 | " 9 | Ir | P L F | 1 17 22 22 22 31 | 2 10—12 | 0,4 20 | 0,2 0,1 | | | |
| 198 | " 9 | Ir | (P) S L F | 19 9 47 12 27 14 37 21 | 2—3 6 9 | 2 5 | 0,05 0,1 0,1 | | | |
| 199 | " 9 | Iv | P L F | 19 54 10 56 27 20 | 1,5 1,5 2,5 | 0,3 0,3 0,3 | 0,3 0,3 0,1 | | | |
| 200 | " 15 | Ir | P (S) e L F | 6 24 55 28 58 32 44 | 3 12 | 2 3 | 0,03 0,05 | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden | Amplituden | | ΔE g | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|--------------------|--|----------------|--------------|----------|---------------------|--------------|--|
| | | | | | | A_E | A_N | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | ^h ^m ^s | T | μ | μ | milligal | | |
| 201 | Nov. 15 | Iv | e(S) L F | 14 38 13 39 22 40 30 | 1—2 | | 0,4 | | 0,2 | In Weißenfels und Raibl (Kärnten) gefühlt. |
| 202 | " 18 | Ir | P eL F | 0 23 35 27 30 29 30 35 30 | 2 7 9 | | 1 3 | 0,1 | 0,5 0,1 | |
| 203 | " 19 | Iv | e(L) | 23 41 | 1—3 | | < 1 | | 0,5 | Wahrscheinlich Vorläufer eines Bebens; da das Pendel (17000 kg) nicht weiter registriert hat, fehlt der übrige Teil. EKomponente bedeutend stärker als N Komponente. |
| 204 | " 21 | Iu | e(P) e(S) eL | 23 21 30 27 30 42 30 54 30 | 10 30 10 | 1 11 5 | | 0,02 0,02 0,1 | 0,06 | |
| 205 | " 22 | Iu | eL M C | 0 25 2 35 53 | 30 13 12 | 27 35 | 6 9 | 0,06 0,4 | 0,01 0,1 | F geht in das nächste Beben über. |
| 206 | " 22 | Iu | eL F | 1 31 48 42 | 12 | 3 | 2 | 0,04 | 0,03 | |
| 207 | " 25 | Iv | eL M F | 10 51 30 52 34 53 30 | 1—1,5 1,5 | | 1 | | 1 | Möglicherweise gehören diese 3 Beben vom 21. u. 22. Nov. zusammen. |
| 208 | " 26 | Iv | e eL M F | 6 55 22 58 3 59 5 7 2 30 | 1—2 3 | | 1 1,5 | | 1 0,3 | |
| 209 | Dez. 1 | I | L | 2 2 25 | 15 | | 6 | | 0,05 | Ein paar lange Wellen. |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Grosswich) | | Perioden T | Amplituden | | Δz g | Δy g | Bemerkungen |
|-----|-------|-----------|----------------|-----------------------|--------|-------------------|------------|------|--------------|--|-------------|
| | | | | A_z | A_y | | milligal | | | | |
| 210 | Dez. | 4 r II | iP | 7 10 43 | 6 3 | 31 | 10 | 1,7 | 0,6 | i B sehr deutlich Vertikalkomponente ring in der Vert. ponente. S in N S doppelt wie in E W. Die langen W. Hauptbebens sind der N S Komponente während der Dauer zu erkennen (7 ^h 11 ^m) | |
| | | | iS | 15 7 | 15 6 | 27 | 90 | 1,5 | 0,8 | | |
| | | | L ₂ | 18 | | | 330 | | 0,4 | | |
| | | | M ₂ | 19 31 | 40 | | 260 | | 1 | | |
| | | | | 20 13 | 20 25 | | 600 | | 2 | | |
| | | | L ₂ | 21 43 | | | | | | | |
| | | | M ₂ | 22 13 | 12 | 143 | | 2 | | | |
| | | | C | | 10 | | | | | | |
| | | | L ₂ | 9 17 | 15 | | 7 | | 0,07 | | |
| | | | F | 28 | | | | | | | |
| 211 | " | 4 r I | P | 9 44 32 | 3 | | | | | Zum vorigen Be- hörig. (Wiederh. Bebens?) | |
| | | | L | 56 | 20 | 5 | 10 | 0,03 | 0,05 | | |
| | | | F | 10 3 | | | | | | | |
| 212 | " | 4 Ir | iP | 12 25 29 | 4 u. 2 | 1,5 | 0,5 | 0,2 | 0,06 | | |
| | | | iS | 29 54 | 6 | 10 | | 0,6 | | | |
| | | | L | 34 15 | 20 | 2 | 12 | 0,01 | 0,06 | | |
| | | | F | 50 | | | | | | | |
| 213 | " | 6 Iv | aP | 0 9 25 | 0,5—1 | | 0,04 | | 0,1 | Nur beim 17000k, deutlich. In der Schweiz (Martigny). | |
| | | | (S) | 10 25 | 1 | | 0,2 | | 0,4 | | |
| | | | L | 11 | 1,2 | | 1 | | 1,4 | | |
| | | | F | 14 | | | | | | | |
| 214 | " | 8 | | 3 55 | 15—20 | | | | | Ein paar lange | |
| 215 | " | 8 I(r) | aL | 5 11 | 15 | | 7 | | 0,06 | | |
| | | | F | 18 | | | | | | | |
| 216 | " | 9 I(r) | (P) | 20 4 | | | | | | | |
| | | | L | 8 | 15 | 3 | 10 | 0,03 | 0,1 | | |
| | | | F | 17 | | | | | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | | Perioden T | Amplituden | | ΔE g milligal | ΔN g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|----------------|-----------------------|-------|-------------------|------------|-------|------------------------------|---------------------------|-------------|
| | | | | | | | A_E | A_N | | | |
| 217 | Dez. 10 | II u | i P | 12 46 54 | 3 | 1 " | 1 " | 0,2 | 0,2 | Schon bei S lange Wellen. | |
| | | | S | 56 19 | 15 | | 7 | | 10,06 | | |
| | | | (eL) | 13 2 | 12 | 9 | 8 | 0,1 | 0,1 | | |
| | | | L | 17 | 30 | | 30 | | 0,07 | | |
| | | | M | 28 | 25 | 18 | 40 | 0,06 | 0,1 | | |
| | | | C | | 20 | 20 | 75 | 0,1 | 0,4 | | |
| | | | F | 14 35 | 15 | | | | | (Wiederkehr des Bebens) | |
| | | | L ₂ | 15 7 | 20 | | 13 | | 0,06 | | |
| 218 | " 10 | I u | e(P) | 18 25 | 1—2 | | | | | | |
| | | | e(S) | 35 1/2 | 4—6 | | 3 | | 0,4 | | |
| | | | eL | 53 | | | | | | | |
| | | | M | 19 11 29 | 20 | 22 | 60 | 0,1 | 0,3 | | |
| | | | F | 20 | | | | | | | |
| 219 | " 15 | I v | i L | 17 50 44 | 1,5 | | 0,5 | | 0,4 | | |
| | | | F | 53 | | | | | | | |
| 220 | " 16 | I(r) | L | 23 1 | 6—12 | | | | | | |
| | | | M | 1 33 | 10 | 10 | 3 | 0,2 | 0,06 | | |
| | | | F | 7 | | | | | | | |
| 221 | " 17 | I u | i ₁ | 5 54 42 | 12 | | 5 | | 0,1 | | |
| | | | i ₂ | 6 0 | 12 | | 4 | | 0,05 | | |
| | | | L | 13 | | | | | | | |
| | | | M | 19 1/2 | 18 | 6 | 50 | 0,04 | 0,3 | | |
| | | | F | 15 1/2 | 30 | | 60 | | 0,1 | | |
| | | | | 7 20 | | | | | | | |
| 222 | " 17 | I u | eL | 10 14 | | | | | | | |
| | | | M | 29 | 15 | 12 | 14 | 0,1 | 0,1 | | |
| | | | F | 11 | | | | | | | |
| 223 | " 17 | I v | eP | 22 18 13 | 0,5—1 | | > 0,1 | | > 0,2 | In Agram gefühlt. | |
| | | | i ₁ | 18 47 | | | | | | | |
| | | | i ₂ | 19 8 | | | 0,4 | | | | |
| | | | S | 19 45 | 1 | | 0,8 | | 2 | | |
| | | | L | 20 5 | 1,5 | | 4 | | 4 | | |
| | | | M | 21 27 | 4 | | 7,4 | | 1 | | |
| | | | F | 29 | 5 | 7 | | 0,5 | | | |

| Nr. | Datum | Charakter | Phasen | Zeiten (Greenwich) | Perioden T | Amplituden | | Δz g | Δs g | Bemerkungen |
|-----|---------|-----------|-----------------------|--|---------------------------------------|----------------|--------------------------------|--------------|--------------|-------------------------------------|
| | | | | | | A _E | A _S | milligal | | |
| 224 | Dez. 23 | Iv | eL | ^h 2 ^m 48 ^s 42 | 1 | | ^μ 0,05 ^μ | | 0,1 | |
| 225 | " 24 | I(r) | eL M F | 20 8 ¹ / ₂ 15 19 | 15 | 2 | 2 | 0,02 | 0,02 | |
| 226 | " 25 | Iv | eP L M F | 17 7 28 8 28 8 34 14 | 1,2 1 1 12 | 2,5 3 | 0,5 1,6 | 5 0,04 | 0,7 3 | In der Ost-Schw fühlt. |
| 227 | " 26 | Iv | eP L M F | 0 21 41 22 59 23 3 27 | 0,5 u. 1 1 1 12 | 2,5 5 | 2,6 | 5 0,07 | 5 | In der Ost-Schw fühlt. |
| 228 | " 27 | I(u) | L F | 1 13 25 | 20 | 5 | | 0,02 | | |
| 229 | " 28 | Iv | e L F | 22 26,2 28 30 | ¹ / ₃ 1 9 | | 0,1 | | 0,2 | In Agram gefühlt |
| 230 | " 29 | I | L | 0 38 | 15 | | | | | Ein paar lange V |
| 231 | " 29 | I(r) | e F | 3 53 55 | 15 | 7 | 3 | 0,06 | 0,03 | Vielleicht mik inische Bewegung. |

Mikroseismische Bewegung 1905.

| Datum | Januar | | Februar | | März | | April | | Mai | | Juni | |
|-------|--------|-------|---------|-----|------|------|-------|-----|-----|-----|------|-----|
| | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN |
| 1 | | | (5) | 1 | 5 | 1 | | < 1 | 6 | 1 | | < 1 |
| 2 | 5-6 | 2 | 6-3 | 3-4 | | < 1 | 6-10 | < 1 | 6 | 1 | | < 1 |
| 3 | 5-6 | 2-3 | 6-8 | 1 | | < 1 | 7 | 1 | | < 1 | 8 | 3 |
| 4 | 5-6 | 2 | (6) | 1 | | < 1 | | < 1 | 5 | < 1 | 7 | 2 |
| 5 | 5-6 | 2 | 5-6 | 1 | | < 1 | 5 | 1 | | < 1 | | < 1 |
| 6 | 5-6 | 1 | 8-10 | 4-5 | < 1 | < 1 | 5-7 | 2 | | < 1 | | < 1 |
| 7 | 5-6 | 2 | 6 | 1-2 | 7-8 | 2 | 6 | 1 | | < 1 | | < 1 |
| 8 | 5-6 | 2-3 | 5-6 | 1-2 | 8 | 3 | 5 | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 9 | 5-6 | 4-6 | 5-6 | 2 | 7-8 | 3-4 | 4-5 | 1 | | < 1 | | < 1 |
| 10 | 6-8 | 10-12 | 7-8 | 5 | 7 | 2 | 5 | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 11 | 7-8 | 7-5 | 7-5 | 3 | 6-7 | 3 | 5 | < 1 | 6 | < 1 | | < 1 |
| 12 | 6 | 2-1 | 6 | 3-4 | 5 | 5 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 13 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 3 | 5 | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 14 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 3 | 6-7 | 2 | | < 1 | | < 1 |
| 15 | 6-8 | 3-5 | | < 1 | 8; 4 | 5; 1 | 5-7 | 1-2 | | < 1 | | < 1 |
| 16 | 5-6 | 2-3 | 6 | 1-2 | 6 | 3-2 | 7 | 1-2 | | < 1 | | < 1 |
| 17 | 6-7 | 3-8 | | | | | | | | | | |
| 18 | 6-7 | 8-5 | 9-10 | 5 | 7 | 1 | 7 | 1 | | < 1 | | < 1 |
| 19 | 6 | 4-2 | 9 | 3-5 | 5-6 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 20 | 5-6 | 1 | 9 | 5 | | < 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 21 | 6 | 3-6 | 7 | 4 | 4-6 | < 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 22 | 6 | 4-2 | | < 1 | 5-6 | < 1 | (5) | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 23 | 5-6 | 1 | — | — | 6 | 1 | 6 | 1 | | < 1 | 7-8 | < 1 |
| 24 | 6-7 | 2-3 | 4-5 | 1-2 | 6-7 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 25 | 6-7 | 1 | | < 1 | 5-7 | 1-2 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 26 | 6-7 | 1-2 | | < 1 | 6 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 27 | 6-7 | 2-3 | 6-7 | 2-3 | 6-7 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 28 | 6-7 | 2-5 | 7-8 | 3-4 | 5 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 29 | 7-8 | 5-8 | 5 | 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 30 | 7-8 | 7-4 | | | | < 1 | | < 1 | 6 | < 1 | | 1 |
| 31 | 6 | 3 | | | | < 1 | (4) | < 1 | | < 1 | | < 1 |
| 32 | 5-6 | 2-3 | | | | < 1 | | < 1 | | < 1 | | < 1 |

Mikroseismische Bewegung 1905.

| Datum | Juli | | August | | September | | Oktober | | November | | Dezember | |
|-------|------|-----|--------|-----|-----------|-----|---------|-----|----------|-------|----------|-----|
| | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN | T | AN |
| 1 | | < 1 | | < 1 | 4-5 | < 1 | 4-6 | 1 | 3-5 | 1,5 | 10 | 5 |
| 2 | | < 1 | 5,5 | 1-2 | 4-5 | < 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 10 | 5 |
| 3 | | < 1 | 7 | 2 | 4-5 | 1-2 | 6 | 1 | 6 | < 1 | 8 | 5 |
| 4 | | < 1 | 6 | 1-2 | 4-6 | < 1 | 7 | 2 | 7 | 1 | 7 | 1,5 |
| 5 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | 1-2 | 7 | 2 | 6 | 1 | 6 | < 1 |
| 6 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 7 | 2 | 6 | 1 | 9 | 3 |
| 7 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 5-7 | 1 | 6 | 1 | 9 | 5 |
| 8 | | < 1 | | < 1 | 4-5 | < 1 | 6 | < 1 | 5 | < 1 | 9 | 7 |
| 9 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | < 1 | 7 | 1 | 9 | 5 |
| 10 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | 1 | 6 | < 1 | 7 | 3 |
| 11 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | 1 | 5 | 1 | 8 | 5 |
| 12 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 7 | 1 | 6 | 2 | 9 | 11 |
| 13 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | 2 | 6 | 6 | 7 | 2 |
| 14 | | < 1 | | < 1 | ? | ? | 7 | 2 | 6 | 3 | 7 | 1 |
| 15 | | < 1 | | < 1 | 5-6 | < 1 | 7 | 4 | 5 | 2 | 8 | 2 |
| 16 | | < 1 | | < 1 | 7-8 | 5 | 7 | 2 | 5 | 1 | 7 | 2 |
| 17 | | < 1 | | < 1 | 4-6 | < 1 | | | | | | |
| 18 | | < 1 | 4-6 | 1-2 | 6-7 | < 1 | 5 | 1 | 5 | < 1,5 | 7 | 1 |
| 19 | | < 1 | 4-6 | 1-2 | 6-7 | < 1 | 6 | 1 | — | — | 8 | 1 |
| 20 | | < 1 | 4-6 | 1-2 | 6-7 | < 1 | 6 | 1 | 5 | 1 | 8 | 1 |
| 21 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | 1-2 | 4 | 1 | 5 | 1 | 10 | 5 |
| 22 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 4-6 | < 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 10 | 5 |
| 23 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 4-6 | < 1 | 6 | 1 | 6 | 2 | 8 | 2 |
| 24 | | < 1 | 4-6 | < 1 | — | — | 5 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| 25 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 4-6 | < 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 6 | < 1 |
| 26 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 4-5 | < 1 | 5 | 1 | 6 | 3 | 7 | 1 |
| 27 | | < 1 | 4-6 | < 1 | 4-5 | < 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 9 | 2 |
| 28 | | < 1 | 4-5 | < 1 | 4-5 | < 1 | 7 | 2 | 6 | 1 | 8 | 4 |
| 29 | | < 1 | 4-5 | < 1 | 4-5 | < 1 | 6 | 2 | 6 | 1 | 9 | 2 |
| 30 | | < 1 | 4-5 | < 1 | 6-8 | 2-5 | 6 | 2 | 8 | 5 | 7 | 2 |
| 31 | | < 1 | 4-5 | < 1 | | | 6 | 2,5 | | | 6 | 5 |

Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers.

Erste Mitteilung.

Von

Ph. Furtwängler.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Mai 1906 von Herrn D. Hilbert.

Nachdem ich in 3 Noten, die in diesen Nachrichten¹⁾ erschienen sind, allgemein die Existenz des Klassenkörpers für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper bewiesen habe, wird es jetzt meine Aufgabe sein, auch die charakteristischen Eigenschaften des Klassenkörpers allgemein herzuleiten. Als solche kommen folgende drei in Betracht:

1) Der Klassenkörper ist der *umfassendste relativ Abel'sche unverzweigte Körper* in bezug auf seinen Grundkörper oder mit anderen Worten: Jeder Körper, der in bezug auf einen gegebenen Körper k unverzweigt und relativ Abelsch ist, ist im Klassenkörper von k enthalten.

2) Alle Ideale des Grundkörpers werden im Klassenkörper *Hauptideale*.

3) Alle Primideale derselben Klasse des Grundkörpers erfahren im Klassenkörper eine *gleichartige Zerlegung* oder noch genauer: Ist h die Klassenzahl des Grundkörpers k und ist \mathfrak{p} ein Primideal aus k mit dem Exponenten q , d. h. ist \mathfrak{p}' die niedrigste Potenz von \mathfrak{p} , die in k in die Hauptklasse fällt, so zerfällt \mathfrak{p} im Klassenkörper von k in $\frac{h}{q}$ verschiedene Primideale.

1) 1903, Heft 4 u. 5; 1904, Heft 3. Eine zusammenfassende Bearbeitung des Existenzbeweises wird demnächst in den mathematischen Annalen erscheinen.

Ich werde mich zunächst in zwei Mitteilungen mit dem Beweis der ersten Eigenschaft beschäftigen, weil er die Grundlage für den Beweis der zweiten Eigenschaft bildet. Um dann auch das unter 3) angeführte Gesetz der Zerlegung der Primideale des Grundkörpers im Klassenkörper abzuleiten, sind zunächst noch die Reziprozitätsgesetze in beliebigen Zahlkörpern weiter zu entwickeln. Ich habe es deshalb an die letzte Stelle gesetzt.

Bei dem Aufbau des Klassenkörpers betrachtet man die verschiedenen Primzahlpotenzen, die in der Klassenzahl h aufgehen, gesondert; dabei lassen die ungeraden Primzahlen eine gemeinsame Behandlung zu, während die Primzahl 2 für sich zu betrachten ist. Dasselbe ist auch hier der Fall. Ich beschäftige mich deshalb in den ersten beiden Paragraphen zunächst mit demjenigen Teile des Klassenkörpers, der den in der Klassenzahl h aufgehenden ungeraden Primzahlpotenzen entspricht, und beweise für ihn vollständig die unter 1) genannte Eigenschaft. Die Untersuchung desjenigen Teiles des Klassenkörpers, dessen Relativgrad eine Potenz von 2 ist, gestaltet sich wesentlich komplizierter, weil der schärfere Äquivalenzbegriff einzuführen ist. Ich habe deshalb in den letzten Paragraphen zur Vorbereitung für den allgemeinen Beweis, den ich in der zweiten Mitteilung geben werde, zunächst zwei einfachere Fälle betrachtet, bei denen aber die wesentlichen Ueberlegungen bereits zum größten Teil zur Geltung kommen.

Kronecker hat zuerst behauptet, und H. Weber¹⁾ und D. Hilbert²⁾ haben es bewiesen, daß jeder im natürlichen Rationalitätsbereiche Abelsche Körper ein Kreiskörper ist, d. h. daß er in einem durch eine Einheitswurzel definierten Körper enthalten ist. Der Beweis der unter 1) genannten Eigenschaft bildet den ersten Schritt zu einer weitgehenden Verallgemeinerung des Kroneckerschen Satzes auf beliebige algebraische Rationalitätsbereiche.

§ 1.

Es seien zunächst einige Bezeichnungen festgesetzt. Der Grundkörper soll stets mit k bezeichnet werden; es bedeute ferner l eine ungerade Primzahl. Die Aufgabe dieses ersten Paragraphen ist dann der Beweis des folgenden Satzes, der als Analogon zu dem bekannten Satze³⁾ über die Zahlen relativzyklischer Oberkörper mit der Relativnorm 1 betrachtet werden kann.

1) Acta mathematica. 8 (1886) und 9 (1887).

2) Diese Nachrichten 1896.

3) D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, p. 272, Satz 90. Der Satz ist dort allerdings nur für relativzyklische Körper

Satz 1: Es sei K ein unverzweigter relativzyklischer Körper vom Relativgrad l^h in bezug auf k , der im Klassenkörper von k enthalten ist. Ist dann C eine Klasse aus K , deren Relativnorm in k in die Hauptklasse fällt, so giebt es eine Klasse D in K , so daß

$$1) \quad C \sim D^{S-1}$$

ist, wo S eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k bedeutet.

Zum Beweise des vorstehenden Satzes gehen wir schrittweise vor, indem wir zunächst die Richtigkeit spezieller Fälle des Satzes beweisen und so allmählich zu dem allgemeinen Satze vordringen. Wir zeigen zunächst die Richtigkeit folgender Tatsache, die sofort als spezieller Fall des Satzes 1 zu erkennen ist.

Ist c eine Klasse in k , für die $c' \sim 1$ gilt, so giebt es in jedem unverzweigten relativzyklischen Oberkörper K vom Relativgrad l eine Klasse C , so daß $c \sim C^{s-1}$ ist. S bedeutet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k .

Daß dieser Satz ein spezieller Fall des Satzes 1 ist, folgt daraus, daß die Relativnorm von c , als Klasse in K betrachtet, in bezug auf k gleich c' ist, da natürlich $c \sim Sc$ gilt. Zum Beweise machen wir zunächst die Annahme, daß k eine primitive l -te Einheitswurzel ξ enthält. Unter Beibehaltung unserer früheren Bezeichnungen gilt dann ¹⁾

$$\begin{aligned} v &= m' \\ v^* &= m' - e_1 + 1. \end{aligned}$$

Da es demnach $v - v^* = e_1 - 1$ unabhängige Einheiten in k giebt, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen aus K sind, und jede solche Einheit eine ambige Klasse in K liefert und umgekehrt, so gilt, wenn wir die Anzahl aller unabhängigen ambigen Komplexe ohne ambige Klasse ²⁾ mit e' und demnach diejenige der unabhängigen Komplexe mit ambiger Klasse mit $e - 1 - e'$ bezeichnen:

$$e - 1 - e' = e_1 - 1$$

oder

$$e - e_1 = e'$$

mit Primzahlrelativgrad ausgesprochen und bewiesen; er läßt sich aber auf solche relativzyklische Körper, deren Relativgrad eine Primzahlpotenz ist, ausdehnen.

1) Vgl. § 7 meiner zweiten Mitteilung in diesen Nachr. 1903, Heft 5.

2) Zwei ambige Komplexe P_1 und P_2 ohne ambige Klasse sollen unabhängig heißen, wenn das System $P_1^{x_1} P_2^{x_2}$ ($x_i = 0, 1, \dots, l - 1$) nur für $x_1 = x_2 = 0$ einen ambigen Komplex mit ambiger Klasse liefert.

d. h. die Anzahl der unabhängigen Klassen in k vom Grade l , die in K nicht in die Hauptklasse gehen, ist gleich der Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe ohne ambige Klasse. Da aber jeder solche Komplex eine Klasse aus k vom Grade l absorbiert — denn es gilt $C^{h-1} \sim c \cdot 1$, wo C eine Klasse eines solchen Komplexes bedeutet und c eine Klasse aus k —, so ist damit der letzte Satz bewiesen für den Fall, daß der Körper k ξ enthält. Ist dies nicht der Fall, so adjungiere man ξ zu k und erhalte dadurch k' . Der Satz gilt dann für k' und daraus folgt seine Richtigkeit für k , indem man die Relativnormen der betreffenden Klassen von k' in bezug auf k bildet.

Wir verallgemeinern jetzt unseren letzten Satz zu dem folgenden, den wir zunächst beweisen:

Ist C eine Klasse des unverzweigten relativzyklischen Oberkörpers K von k vom Relativgrad l und gilt $C^{1+S+\dots+S^{l-1}} \sim 1$ in k , so giebt es eine Klasse C' in K , so daß $C \sim C'^{h-1}$ ist. S bedeutet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k .

Es sei das Klassensystem von k :

$$2) \quad c_1^{x_1} \dots c_l^{x_l} (x_i = 0, 1, \dots, l^h - 1),$$

indem wir das System aller Klassen, deren Grad zu l prim ist, als 1 annehmen; dieselbe Festsetzung gelte auch für K . Es läßt sich dann, wenn K zu der durch die Kongruenz $x_i \equiv 0$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, was wir durch eine geeignete Bezeichnungsweise immer erreichen können, das Klassensystem von K in der Gestalt schreiben:¹⁾

$$3) \quad (c)_s C_s^{F_1(S)} \dots C_s^{F_l(S)}$$

wo $(c)_s$ das Klassensystem von k bedeutet und C_1, \dots, C_l Klassen aus K , deren Relativnormen in k in die Klassen c_1, \dots, c_l fallen, während $F_1(S), \dots, F_l(S)$ ganze, ganzzahlige Funktionen von S bedeuten. Es läßt sich daher auch die Klasse C unseres Satzes in der Gestalt 3) schreiben:

$$4) \quad C = c' C_s^{F_1(S)} \dots C_s^{F_l(S)}.$$

Zufolge der Voraussetzung $C^{1+S+\dots+S^{l-1}} \sim 1$ in k folgt dann aus 4)

1) Vgl. § 5 und § 7 meiner zweiten Mitteilung in diesen Nachrichten 1903, Heft 5. Die Darstellung 3) gilt auch, wenn k keine primitive l -te Einheitswurzel ξ enthält. Man zeigt dies leicht durch Betrachtung des Körpers (k, ξ) .

$$1 \sim c'^l c_1^{F_1(1)} \dots c_s^{F_s(1)} \text{ in } k$$

und daher

$$5) \quad F_1(1) \equiv F_2(1) \dots \equiv F_s(1) \equiv 0 \ (l).$$

Da nun stets die l -te Potenz einer Klasse aus K als symbolische $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K multipliziert mit einer Klasse aus k dargestellt werden kann¹⁾, so folgt aus 4) und 5)

$$6) \quad C = c'' C^{*(S-1)},$$

wo c'' eine Klasse aus k und C^* eine solche aus K bedeutet. Aus der Voraussetzung über C folgt dann nach 6), daß $(c'')^l \sim 1$ in k ist, und daher ist nach dem zuletzt bewiesenen Satze c'' als symbolische $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K darstellbar. Daraus folgt dann aber, was wir beweisen wollten, daß eine Klasse C' in K existiert, so daß

$$C \sim C'^{S-1}$$

ist.

Der Beweis des allgemeinen Satzes wird durch den Schluß von n auf $n+1$ erhalten. Der einfachen Ausdrucksweise halber beweise ich ihn hier nur noch für relativzyklische Oberkörper vom Relativgrad l^n , daraus ist die Richtigkeit im allgemeinen Falle (Relativgrad l^h) sofort zu entnehmen.

Es sei also K ein unverzweigter relativzyklischer Oberkörper vom Relativgrad l^n in bezug auf k und zwar möge er zu der durch die Kongruenz $x_i \equiv 0 \ (l^n)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehören, was durch geeignete Bezeichnung stets erreicht werden kann; das Klassensystem k habe dabei die Gestalt 2). Es sei ferner K_1 der in K enthaltene Unterkörper vom Relativgrad l in bezug auf k .

Ist nun zunächst c eine Klasse aus k , die die Bedingungen des Satzes 1 bezüglich K erfüllt, d. h. gilt die Äquivalenz $c^{l^n} \sim 1$ in k , so folgt nach dem bereits Bewiesenen, da man die letzte Äquivalenz auch in der Gestalt $(c')^l \sim 1$ schreiben kann, daß es eine Klasse C^* in K_1 giebt, so daß

$$7) \quad c^l \sim C^{*S-1} \text{ in } K_1.$$

Da wir C^* mit einer beliebigen Klasse aus k multiplizieren können, ohne daß die letzte Äquivalenz ihre Gültigkeit verliert, können wir C^* in der Gestalt ansetzen:

1) Vgl. Gleichung 3) in § 8 meiner zweiten Mitteilung l. c.

$$8) \quad C^* \sim C_1^{F_1(S)} \dots C_i^{F_i(S)} \text{ in } K_1,$$

wo C_1, \dots, C_i Klassen aus K_1 bedeuten, deren Relativnormen in k in c_1, \dots, c_i fallen. Da das Klassensystem von K nun in der Gestalt

$$9) \quad c_1^{x_1} \bar{C}_1^{G_1(S)} \dots \bar{C}_i^{G_i(S)}$$

geschrieben werden kann, wo $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_i$ Klassen aus K bedeuten, deren Relativnormen in bezug auf K_1 in C_1, \dots, C_i fallen, so folgt aus 8), daß es eine Klasse \bar{C}^* in K giebt, so daß:

$$10) \quad C^* \sim \bar{C}^{*1+S^1+\dots+S^{(t-1)}} \text{ in } K_1.$$

Wir setzen nun

$$11) \quad c = \bar{C}^{*(S-1)} \cdot A$$

und zeigen, daß die durch 11) definierte Klasse A die $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K ist. Aus 11) ergibt sich durch Bildung der Relativnorm in bezug auf K_1 und Vergleich mit 7):

$$12) \quad A^{1+S^1+\dots+S^{(t-1)}} \sim 1 \text{ in } K_1.$$

Es ist deshalb nach dem schon Bewiesenen A die (S^t-1) -te und daher auch die $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K , womit für c die Richtigkeit unseres Satzes bewiesen ist.

Es sei zweitens C_1 eine Klasse aus K_1 , die die Bedingungen unseres Satzes 1 erfüllt, d. h. es gelte:

$$13) \quad C_1^{1+S+\dots+S^{(t-1)}} \sim 1 \text{ in } k.$$

Es giebt dann nach dem schon Bewiesenen eine Klasse C'_1 in K_1 , so daß

$$14) \quad C'_1 \sim C_1^{(S-1)} \text{ in } K_1.$$

Da C'_1 mit einer beliebigen Klasse aus k multipliziert werden kann, ohne daß 14) zu gelten aufhört, so können wir wieder C'_1 in der Gestalt 8) ansetzen und daraus wie oben die Existenz einer Klasse C'_1 in K folgern, so daß:

$$15) \quad C'_1 \sim \bar{C}'_1^{1+S^1+\dots+S^{(t-1)}}.$$

Definieren wir dann A durch die Aequivalenz:

$$16) \quad C_1 = \bar{C}'_1^{(S-1)} \cdot A,$$

so gilt wieder für A ebenso wie oben:

$$A^{1+S^1+\dots+S^{(t-1)}} \sim 1 \text{ in } K_1,$$

d. h. A ist die $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K , womit nach 16) auch dieser Fall erledigt ist.

Wir verstehen endlich unter C eine beliebige Klasse aus K , die die Bedingung:

$$17) \quad C^1 + S + S^2 + \dots + S^{l-1} \sim 1 \text{ in } k$$

erfüllt. Nach der allgemeinen Gestalt 9) des Klassensystems von K können wir dann für C ansetzen:

$$C = c_1^a \bar{C}_1^{F_1(S)} \dots \bar{C}_l^{F_l(S)}.$$

Aus 17) folgt dann:

$$c_1^{al^2} c_1^{F_1(1)} \dots c_l^{F_l(1)} \sim 1 \text{ in } k,$$

folglich:

$$c_1^{al^2} \sim 1 \text{ in } k \text{ und } F_1(1) \equiv \dots \equiv F_l(1) \equiv 0 \pmod{l}.$$

c_1^a ist demnach die $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K . Beachtet man außerdem, daß jede l -te Potenz einer Klasse aus K als Produkt einer Klasse aus K_1 und der $(S-1)$ -ten Potenz einer Klasse aus K darstellbar ist, so folgt:

$$18) \quad C = C^* C'^{(S-1)}$$

wo C^* eine Klasse aus K_1 und C' eine solche aus K bedeutet. Aus 17) und 18) folgt dann, daß

$$C^{*l}(1 + S + \dots + S^{l-1}) \sim 1 \text{ in } k$$

und daraus ergibt sich, wie wir oben gesehen haben, daß C^* als $(S-1)$ -te Potenz einer Klasse aus K dargestellt werden kann. Damit ist aber der Satz 1 für relativzyklische Oberkörper vom Relativgrad l^2 vollständig bewiesen und von hier aus ergibt sich durch einfache Forsetzung des Verfahrens ohne Schwierigkeit die allgemeine Gültigkeit von Satz 1.

§ 2.

Um für diejenigen Teile des Klassenkörpers, deren Relativgrad in bezug auf den Grundkörper eine *ungerade* Primzahlpotenz ist, das Bestehen der unter 1) in der Einleitung genannten Eigenschaft nachzuweisen, genügt der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2: Ist die Klassenzahl des Körpers k genau durch l^2 teilbar, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet, so existiert in bezug auf k kein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad $l^{2^{\nu+1}}$.

Zum Beweise nehmen wir wieder die Gruppe aller Klassen in k , deren Grad zu l prim ist, als Einheitselement an und schreiben dementsprechend die Klassengruppe von k :

$$1) \quad c_1^{x_1} \dots c_s^{x_s} (x_i = 0, 1, \dots, l^{h_i} - 1) \quad (h_1 + h_2 + \dots + h_s = h')$$

Aus dem Existenzbeweise für den Klassenkörper von k ergibt sich dann, daß in bezug auf k unverzweigte relativzyklische Körper von den Relativgraden l^{h_1}, \dots, l^{h_s} existieren, die zusammen einen unverzweigten relativ Abel'schen Körper vom Relativgrad $l^{h'}$ bilden. Es ist nun nachzuweisen, daß der Prozeß, der zur Bildung dieser Körper geführt hat, an keiner Stelle weiter fortgesetzt werden kann, wenn man an der Forderung festhält, daß die konstruierten Relativkörper in bezug auf den Grundkörper relativ Abel'sch sein sollen.

Es seien K_1, \dots, K_s die unverzweigten relativzyklischen Körper in bezug auf k , die resp. zu den durch die Kongruenzen

$$x_i \equiv 0 (l^{h_i}), \dots, x_s \equiv 0 (l^{h_s})$$

definierten Untergruppen der Klassengruppe von k gehören und $K = (K_1, \dots, K_s)$ sei der hier in betracht kommende Teil des Klassenkörpers vom Relativgrad $l^{h'}$ in bezug auf k . Ferner bezeichnen wir die in K_1, \dots, K_s enthaltenen Körper vom Relativgrad l in bezug auf k , die resp. zu den durch die Kongruenzen

$$x_i \equiv 0 (l), \dots, x_s \equiv 0 (l)$$

definierten Untergruppen der Klassengruppe von k gehören, mit $K_1^{(u)}, \dots, K_s^{(u)}$.

Angenommen es gäbe nun einen umfassenderen unverzweigten relativ Abel'schen Körper K' in bezug auf k , dessen Relativgrad eine Potenz von l ist. Wir können dann annehmen, daß K' den Körper K enthält, indem wir, wenn dies nicht der Fall sein sollte, K zu K' adjungieren. Es ist dann zunächst klar, daß die Relativgruppe von K' in bezug auf k nicht mehr als e Basis-substitutionen enthalten kann, weil sonst mehr als e unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren würden, was nach früher Bewiesenem unmöglich ist. Es müßte daher die Erweiterung des Körpers K zum Körper K' dadurch vor sich gehen, daß ein relativzyklischer Körper in K existiert, der in keinem umfassenderen relativzyklischen Körper von K , wohl aber in einem solchen von K' enthalten wäre. Ich kann annehmen, indem ich die Bezeichnung geeignet gewählt denke, daß K_1 ein solcher Körper sei. Ich will dann zeigen, daß es keinen unver-

zweigten relativzyklischen Körper in bezug auf k giebt, der K_1 als Unterkörper enthält.

Man bemerke zu diesem Zweck, daß sich das Klassensystem von K_1 in der Gestalt schreiben läßt:

$$2) \quad (c)_1 C_2^{F_1(S_1)} \dots C_i^{F_i(S_1)},$$

wo $(c)_1$ das Klassensystem von k , S_1 eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K_1 in bezug auf k und C_2, \dots, C_i Klassen aus K_1 bedeuten, deren Relativnormen in k in c_2, \dots, c_i fallen; $F_1(S_1), \dots, F_i(S_1)$ sind ganze ganzzahlige Funktionen von S_1 . Man kann sogar in 2) das System $(c)_1$ fortlassen und demnach alle Klassen aus K_1 in der Gestalt:

$$3) \quad C_2^{F_1(S_1)} \dots C_i^{F_i(S_1)}$$

darstellen. Denn daß sich c_2, \dots, c_i durch 3) darstellen lassen, ist unmittelbar evident; daß es auch für c_1 gilt, folgt aus Satz 1 in § 1. Die Relativnorm von c_1 , als Klasse von K_1 betrachtet, in bezug auf k ist $c_1^{h_1}$, fällt also in die Hauptklasse. Demnach giebt es eine Klasse C' in K_1 , so daß

$$4) \quad c_1 \sim C'^{S_1-1} \text{ in } K_1$$

wird. Da man C' mit einer beliebigen Klasse aus k multiplizieren kann, ohne daß 4) seine Gültigkeit verliert, kann man C' in der Gestalt 3) und demnach c_1 in derselben Gestalt annehmen.

Es läßt sich also das Klassensystem von K_1 in der Gestalt 3) darstellen und demnach auch in der folgenden:

$$5) \quad C_2^{x_2} \dots C_i^{x_i} C^{(S_1-1)} C^{*l} \quad (x = 0, 1, \dots, l-1),$$

wo C und C^* alle Klassen aus K_1 durchlaufen.

Es sind nun die Untergruppen von 5) vom Index l aufzusuchen, die relativ Galois'sche Körper in bezug auf k definieren — sie müssen gegenüber der Substitution S_1 invariant sein — und dann ist zuzusehen, ob unter den durch sie definierten Körpern ein relativzyklischer in bezug auf k vorhanden ist. Jede Untergruppe G von 5) vom Index l , die gegenüber S_1 invariant ist, muß notwendig das Klassensystem $C^{S_1-1} C^{*l}$ enthalten. Denn das System 5) läßt sich, wenn G eine Untergruppe vom Index l ist, in der Gestalt

$$A^x G \quad (x = 0, 1, \dots, l-1)$$

schreiben, wo A eine bestimmte Klasse aus 5) bedeutet, die nicht

in G liegt. Aus der Voraussetzung $G = S_1 G$ läßt sich nun folgern, daß A^{S_1-1} in G liegt. Denn $S_1 A$ liegt nicht in G , folglich gilt:

$$6) \quad S_1 A = A^a \cdot B,$$

wo B eine Klasse aus G bedeutet, und zwar ist, wie man leicht erkennt, $a \equiv 1(l)$. Denn wäre $a \not\equiv 1(l)$, so würde aus 6) folgen:

$$A^{a-1} = A^{S_1-1} B^{-1},$$

folglich

$$7) \quad A = A^{a'(S_1-1)} B',$$

wo B' ebenfalls eine Klasse aus G bedeutet. Aus 7) würde folgen:

$$A^{S_1-1} = A^{a'(S_1-1)^2} B'^{(S_1-1)},$$

folglich

$$A = A^{a''(S_1-1)^2} B''$$

und schließlich durch Fortsetzung des Verfahrens:

$$A = A^{a^{(l^h)}(S_1-1)^{l^h}} B^{(l^h)},$$

wo $B'', \dots B^{(l^h)}$ sämtlich Klassen aus G bedeuten. Nach der letzten Gleichung läge A in G , weil die symbolische $(S_1-1)^{l^h}$ -te Potenz einer Klasse auch eine wirkliche l -te Potenz einer Klasse ist. Das ist unmöglich, es ist daher in 6) der Exponent $a \equiv 1(l)$ und demnach liegt A^{S_1-1} in G . Ist nun D eine beliebige Klasse aus K_1 , die nicht in G liegt, so liegt DA^d in G , folglich auch

$$D^{S_1-1} A^{d(S_1-1)}$$

und demnach D^{S_1-1} . G enthält deshalb, da jede l -te Potenz einer Klasse in G als einer Untergruppe vom Index l enthalten ist, wie oben behauptet war, das Klassensystem $C^{S_1-1} C^{*l}$. Daraus folgt, daß alle Untergruppen G vom Index l , die gegenüber S_1 invariant sind, durch eine Kongruenz von der Art:

$$a_1 x_1 + \dots + a_l x_l \equiv 0(l)$$

definiert werden. Sie liefern infolgedessen keine relativzyklischen Körper in bezug auf k . Denn der durch die Kongruenz 8) definierte Körper ist derselbe, der zu der durch dieselbe Kongruenz definierten Untergruppe der Klassengruppe 1) von k gehört, er liefert also mit K_1 zusammen keinen relativzyklischen Körper in bezug auf k .

Damit ist gezeigt, daß es keinen unverzweigten relativzyklischen Körper in bezug auf k giebt, der K_1 enthält, und dadurch ist der aufgestellte Satz bewiesen.

§ 3.

Wir gehen jetzt dazu über, uns mit den unverzweigten relativ Abel'schen Körpern zu beschäftigen, deren Relativgrad eine Potenz von 2 ist, und machen in diesem Paragraphen zunächst die vereinfachende Annahme, daß die Klassenzahl des Grundkörpers k im weiteren Sinne gleich 1 und bei Zugrundelegung des engeren Äquivalenzbegriffes gleich 2 sei. Es sei ferner vorweg bemerkt, daß im folgenden überall dieselben Bezeichnungen angewandt werden, wie in meiner dritten Mitteilung über den Klassenkörper¹⁾.

Unter den s reellen Körpern, die unter den mit k konjugierten Körpern existieren, mögen p nach dem an der angegebenen Stelle aufgestellten Verfahren ausgewählt sein, und zwar sollen dies die Körper $k^{(s_1)}, \dots, k^{(s_p)}$ sein. Da in unserem Falle $s = p + 1$ ist, existiert noch ein weiterer reeller Körper unter den konjugierten von k , den wir mit $k^{(s_{p+1})}$ bezeichnen. Es möge nun $K = (k, \sqrt{\omega})$ der nach den Vorschriften der angegebenen Stelle konstruierte unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k sein. Die Zahl a ist dann für den Körper K gleich Null, d. h. es existiert nur ein ambiger Komplex in K , der Hauptkomplex. Hieraus schließt man sofort, daß die Klassenzahl von K im weiteren Sinne ungerade ist²⁾. Wir wollen zeigen, daß die Klassenzahl von K auch bei Zugrundelegung des engeren Äquivalenzbegriffes ungerade ist.

Die konjugierte Zahl von ω in $k^{(s_{p+1})}$, die Zahl $\omega^{(s_{p+1})}$, ist negativ; ferner seien die konjugierten von ω in n_1 der Körper $k^{(s_1)}, \dots, k^{(s_p)}$, nämlich in $k^{(y_1)}, \dots, k^{(y_{n_1})}$ negativ und daher in $r = p - n_1$ Körpern positiv, nämlich in $k^{(x_1)}, \dots, k^{(x_r)}$. Es existieren dann unter den konjugierten von K im ganzen $2r$ reelle Körper, nämlich $(k^{(x_i)}, \sqrt{\omega^{(x_i)}})$ ($i = 1, 2, \dots, r$), von denen jeder doppelt zu zählen ist und die ich in analoger Bezeichnungsweise durch

$$K^{(x_1)}, K^{(x_1)}, \dots, K^{(x_r)}, K^{(x_r)}$$

1) Vgl. diese Nachrichten 1904, p. 174.

2) Vgl. Ph. Furtwängler, Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-physik. Kl. Neue Folge, Bd. II, No. 3, p. 61 oder Math. Ann. 58, p. 43.

wiedergebe. Ist nun H' die Klassenzahl von K im weiteren und H die Klassenzahl im engeren Sinne, so ist leicht nachzuweisen, daß $H' = H$ ist. Wir haben zu diesem Zweck nur zu zeigen, daß, wenn man die folgenden Vorzeichenreihen bildet:

$$1) \quad \operatorname{sgn} H^{(x_1)}, \operatorname{sgn} H^{(x_1)}, \dots, \operatorname{sgn} H^{(x_r)}, \operatorname{sgn} H^{(x_r)},$$

indem man H alle Einheiten aus K durchlaufen läßt, man alle möglichen Vorzeichenreihen, also 2^r verschiedene, erhält.

Es folgt nun aus den Entwicklungen der zitierten Stelle, daß $v = v^* = m' - n_1$ ist, d. h. daß alle Einheiten ξ aus k , welche die Bedingungen:

$$2) \quad \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_1)}} \right) = 1, \dots, \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_{n_1})}} \right) = 1$$

erfüllen, Relativnormen von Einheiten aus K sind. Denken wir uns nun die Einheiten ε in k ebenfalls wie an der zitierten Stelle so gewählt, daß

$$3) \quad \varepsilon_{x_i}^{(x_i)} < 0, \varepsilon_{x_i}^{(x_i)} > 0 \quad \left(\begin{matrix} \varepsilon_{x_i} \varepsilon_j = \varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} \dots \varepsilon_{x_r} \\ \varepsilon_j \neq \varepsilon_i \end{matrix} \right),$$

so erfüllen alle Einheiten $\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_r}$ die Bedingungen 2) und sind daher Relativnormen von Einheiten aus K , nämlich

$$4) \quad \varepsilon_{x_i} = H'_{x_i} \cdot H''_{x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Da $\varepsilon_{x_i}^{(x_i)} < 0$, müssen $H'_{x_i}^{(x_i)}$ und $H''_{x_i}^{(x_i)}$ verschiedene Zeichen haben; die Bezeichnung sei so gewählt, daß $H'_{x_i}^{(x_i)}$ negativ ist. Ich betrachte nun das Einheitensystem:

$$5) \quad H'^{u'_1}_{x_1} \cdot \varepsilon^{u''_1}_{x_1} \dots H'^{u'_r}_{x_r} \cdot \varepsilon^{u''_r}_{x_r} \quad (u'_i, u''_i = 0, 1)$$

und zeige leicht, daß unter diesen nur eine total positive Einheit vorhanden ist, die erhalten wird, wenn man sämtliche Exponenten gleich Null setzt. Denn soll eine Einheit aus 5) total positiv sein, so muß auch ihre Relativnorm in bezug auf k total positiv sein und daraus folgt, daß dann notwendig $u'_1 = \dots u'_r = 0$ sein muß. Es könnte daher nur eine in 5) enthaltene Einheit von der Gestalt $\varepsilon^{u''_1}_{x_1} \dots \varepsilon^{u''_r}_{x_r}$ total positiv sein, was aber nach 3) nur möglich ist, wenn $u''_1 = \dots u''_r = 0$ ist. Läßt man daher H in 1) alle Einheiten des Systems 5) durchlaufen, so erhält man im ganzen 2^r verschiedene Vorzeichenreihen, was wir beweisen wollten. Auf Grund des im Vorstehenden Bewiesenen können wir folgenden

Satz aussprechen, indem wir die Annahme über die Klassenzahl von k etwas weiter fassen, was ohne weiteres gestattet ist.

Satz 3: Es sei k ein Zahlkörper, dessen Klassenzahl im weiteren Sinne eine ungerade Zahl und bei Zugrundelegung des schärferen Äquivalenzbegriffes das Doppelte einer ungeraden Zahl ist. Es existiert dann in bezug auf k ein einziger unverzweigter relativ Abel'scher Zahlkörper K vom Relativgrad 2, dagegen keiner vom Relativgrad 4. Die Klassenzahl von K ist auch im engeren Sinne ungerade. Alle Ideale aus k , deren Quadrate in der Hauptklasse liegen, gehen daher in K in die Hauptklasse über.

§ 4.

Wir betrachten in diesem Paragraphen den Fall, daß die Klassenzahl h' des Grundkörpers k im weiteren Sinne gleich 1 ist und bei Benutzung der schärferen Äquivalenz gleich 4; die Klassengruppe ist dann keine zyklische, weil das Quadrat jeder Klasse die Hauptklasse im engeren Sinne ergibt. Daß wir h' gerade gleich 1 genommen haben, geschieht nur der einfachen Ausdrucksweise wegen, die Entwicklungen sind auch gültig, wenn h' eine beliebige ungerade Zahl ist. Es sei also das Klassensystem von k für den schärferen Äquivalenzbegriff:

$$1) \quad d_1^{x_1} d_2^{x_2} \quad (x = 0, 1).$$

Es existieren dann drei unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k , von denen zwei unabhängig sind. Wir bezeichnen diese Körper mit

$$K_1 = (k, \sqrt{\omega_1}), \quad K_2 = (k, \sqrt{\omega_2}), \quad K_3 = (k, \sqrt{\omega_3}) = (k, \sqrt{\omega_1 \omega_2})$$

und nehmen an, daß K_1 zu der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0 (2)$ definierten Untergruppe des Klassensystems 1) gehöre. Entsprechend soll K_2 zu der Kongruenz $x_2 \equiv 0 (2)$ und K_3 zu $x_1 + x_2 \equiv 0 (2)$ gehören.

Es mögen nun unter den s reellen Körpern, die mit k konjugiert sind, $p = s - 2$ nach Vorschrift ausgewählt sein, die wir mit $k^{(s_1)}, \dots, k^{(s_p)}$ bezeichnen. Die beiden noch übrigen reellen Körper seien dann $k^{(s_{p+1})}, k^{(s_{p+2})}$. Ich nenne nun eine Zahl α aus k normiert, wenn die sämtlichen konjugierten $\alpha^{(s_1)}, \dots, \alpha^{(s_p)}$ positiv sind. Jede Zahl aus k kann, wie aus der Auswahl der Körper

$k^{(z_1)}, \dots, k^{(z_p)}$ folgt, durch Multiplikation mit einer Einheit aus k normiert werden. Wir wollen uns nun weiter die Bezeichnung der Klassen d_1, d_2 so gewählt denken, daß, wenn δ_1 eine normierte Zahl aus d_1 bedeutet, $\delta_1^{(z_{p+1})} < 0$ und $\delta_1^{(z_{p+2})} > 0$ ist; entsprechend soll, wenn δ_2 eine normierte Zahl aus d_2 bedeutet, $\delta_2^{(z_{p+1})} > 0$ und $\delta_2^{(z_{p+2})} < 0$ sein.

Wir betrachten nun zunächst den Körper K_1 , der durch $\sqrt{\omega_1}$ erzeugt wird; es giebt dann nur in der Klasse d_1 Primideale, die in K_1 in das Produkt zweier Primideale zerfallen, aber nicht in den Klassen d_1 und d_2 . Aus unseren Festsetzungen ergibt sich, daß $\omega_1^{(z_{p+1})} < 0$ und $\omega_1^{(z_{p+2})} > 0$ ist¹⁾. Aus den an der früher zitierten Stelle entwickelten Ungleichungen folgt dann $a = 0$, d. h. der einzige ambige Komplex in K_1 ist der Hauptkomplex; hieraus schließt man, daß die Klassenzahl von K_1 im weiteren Sinne ungerade ist.

Es mögen nun weiter unter den Zahlen

$$\omega_1^{(z_1)}, \dots, \omega_1^{(z_p)}$$

die Zahlen

$$\omega_1^{(y_1)}, \dots, \omega_1^{(y_{n_1})}$$

negativ und die $r = p - n_1$ Zahlen

$$\omega_1^{(x_1)}, \dots, \omega_1^{(x_r)}$$

positiv sein.

Es gilt dann für K_1

$$v = v^* = m' - n_1,$$

d. h. alle Einheiten ξ , welche die Bedingungen:

$$2) \quad \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_1)}} \right) = 1, \dots, \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_{n_1})}} \right) = 1$$

erfüllen, sind Relativnormen von Einheiten aus K_1 . Unter den konjugierten Körpern von K_1 sind folgende $2(r+1)$ reelle vorhanden:

1) Denn ist δ_2 eine Zahl aus d_2 , die Relativnorm einer Zahl aus K_1 ist, so können wir δ_2 normiert annehmen (vgl. meine dritte Mitteilung p. 188 u. 189) und daher $\delta_2^{(z_{p+2})} < 0$. Es folgt dann aus

$$\left(\frac{\delta_2, \omega_1}{1^{(z_{p+2})}} \right) = 1, \text{ daß } \omega_1^{(z_{p+2})} > 0 \text{ ist.}$$

$$3) \quad K_1^{(x_1)}, K_1^{(x_1)}, \dots, K_1^{(x_r)}, K_1^{(x_r)}, K_1^{(x_{r+1})}, K_1^{(x_{r+1})}.$$

Um den Klassenzahlquotienten H_1/H_1' (die Klassenzahl mit einem Strich oben beziehe sich immer auf den weiteren Äquivalenzbegriff) für K_1 zu ermitteln, haben wir deshalb festzustellen, wie viel verschiedene Vorzeichenreihen sich ergeben, wenn wir in:

$$4) \quad \begin{aligned} &\text{sgn } H^{(x_1)}, \text{sgn } H^{(x_1)}, \dots, \text{sgn } H^{(x_r)}, \text{sgn } H^{(x_r)}, \\ &\text{sgn } H^{(x_{r+1})}, \text{sgn } H^{(x_{r+1})} \end{aligned}$$

H alle Einheiten aus K_1 durchlaufen lassen. Wir denken uns zu diesem Zweck die Einheiten ε_i wieder wie im vorigen Paragraphen gewählt. Es sind dann alle Einheiten $\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_r}$ Relativnormen von Einheiten aus K_1 und es folgt dann in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen, daß man, wenn man in 4) H alle Einheiten des Systems:

$$5) \quad H^{u_1'} \varepsilon_{x_1}^{u_1'} \dots H^{u_r'} \varepsilon_{x_r}^{u_r'} \quad (u_i, u_i' = 0, 1)$$

durchlaufen läßt, sicher 2^{2r} verschiedene Vorzeichenreihen erhält. Daraus folgt, daß $H_1/H_1' \leq 2^2$ ist.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste Fall ist der, daß es noch eine Einheit E in K_1 giebt, die zu 5) hinzugefügt dies System derart erweitert, daß durch das erweiterte System 2^{2r+1} verschiedene Vorzeichenreihen in 4) erhalten werden. Es ist dann $H_1 \leq 2H_1'$; da andererseits $H_1 \geq 2H_1'$ ist, muß in diesem Falle $H_1 = 2H_1'$ sein. Die Klassenzahl von K_1 ist bei schärferer Äquivalenz daher jetzt das Doppelte einer ungeraden Zahl und es folgt deshalb aus dem vorigen Paragraphen, daß nur ein einziger unverzweigter relativquadratischer Körper in bezug auf K_1 existiert, das ist der Körper (K_1, K_1) . Gleichzeitig folgt, daß alle Klassen aus k in K_1 in die Hauptklasse im engeren Sinne übergehen.

Zweitens ist der Fall zu erörtern, daß es eine Einheit von der Art E nicht giebt, daß also alle überhaupt durch 4) dargestellten Vorzeichenreihen erhalten werden, wenn man H in 4) alle Einheiten des Systems 5) durchlaufen läßt. Es zeigt sich, daß in diesem Falle nicht alle Klassen aus k in K_1 in die Hauptklasse übergehen können. Es sei nämlich δ , eine normierte Zahl aus der Klasse d_i ; δ kann dann in K_1 nicht in der Hauptklasse liegen. Denn sollte dies der Fall sein, so müßte man eine Einheit H^* in K_1 angeben können, so daß $H^*\delta$ in K_1 total positiv wäre. Da

das System 5) alle möglichen Vorzeichenreihen 4) erschöpft, können wir H^* als eine Einheit des Systems 5) annehmen:

$$H^* = H_{x_1}^{u'_1} \varepsilon_{x_1}^{u''_1} \dots H_{x_r}^{u'_r} \varepsilon_{x_r}^{u''_r}.$$

Wenn $H^* \delta_i$ in K_1 total positiv ist, so muß auch die Relativnorm in k total positiv sein, daraus schließt man:

$$u'_1 = \dots u'_r = 0.$$

Da ferner δ_i in k normiert sein sollte, also $\delta_i^{(x_1)}, \dots, \delta_i^{(x_r)}$ positiv sind, folgt dann weiter $u''_1 = \dots u''_r = 0$. Es müßte also δ_i selbst in K_1 total positiv, folglich $\delta_i^{(x_{r+1})} > 0$ sein, was unserer Festsetzung über die Klassen d_1, d_2 widerspricht. Das Klassensystem von K_1 ist demnach in dem jetzigen Falle in der Gestalt:

$$6) \quad D_i^{w_1} d_i^{w_2} \quad (w = 0, 1)$$

darstellbar und es ist, wenn wir die Substitution $\sqrt{\omega_1} | - \sqrt{\omega_1}$ mit S_1 bezeichnen:

$$7) \quad d_i \sim D_i^{S_1+1} \sim D_i^{S_1-1}$$

im engeren Sinne. Daraus folgt, daß zu der durch die Kongruenz $w_2 \equiv 0 \pmod{2}$ definierten Untergruppe von 6) kein unverzweigter Körper gehören kann, der relativ Abel'sch in bezug auf k wäre. Denn da die genannte Untergruppe, wie aus 7) folgt, gegenüber S_1 nicht invariant ist, ist der zugehörige Körper nicht einmal ein relativ Galois'scher in bezug auf k . Es giebt also sicher außer (K_1, K_2) keinen unverzweigten relativ Abel'schen Körper vom Relativgrad 4 in bezug auf k , der K_1 als Unterkörper enthält.

Da für den Körper K_2 genau dasselbe gilt wie für K_1 , erübrigt nur noch die Behandlung des Körpers K_2 . Die beiden Zahlen $\omega_i^{(x_{r+1})}, \omega_i^{(x_{r+2})}$ sind beide negativ; es folgt deshalb aus meiner früheren Mitteilung, daß $a \leq 1$ ist. Wir haben zunächst nachzuweisen, daß wieder $a = 0$ ist, d. h. daß auch in K_2 nur der Hauptkomplex existiert.

Es mögen unter den Zahlen $\omega_i^{(x_1)}, \dots, \omega_i^{(x_r)}$ die folgenden

$$\omega_i^{(y_1)}, \dots, \omega_i^{(y_{n_1})} \text{ negativ und} \\ \omega_i^{(x_1)}, \dots, \omega_i^{(x_r)} \text{ positiv sein.}$$

Es sei ferner α die Relativnorm einer Zahl aus K_2 , die in k nicht in der Hauptklasse liegt, und es seien unter den Zahlen

$\alpha^{(z_1)}, \dots, \alpha^{(z_r)}$ die folgenden: $\alpha^{(v_1)}, \dots, \alpha^{(v_r)}$ negativ. Es sind dann alle Indizes v von allen Indizes y verschieden, weil $\left(\frac{\alpha, \omega_s}{1^{(y_i)}}\right) = 1$ sein muß, da α die Relativnorm einer Zahl aus K_s ist. Setzt man nun

$$8) \quad \varepsilon = \varepsilon_{v_1} \varepsilon_{v_2} \dots \varepsilon_{v_r},$$

so ist $\varepsilon \alpha$ eine normierte Zahl in k und daher $(\varepsilon \alpha)^{(z_{p+1})}$ oder $(\varepsilon \alpha)^{(z_{p+2})}$ negativ. Ist etwa die erste Zahl negativ, so ergibt sich

$$\left(\frac{\varepsilon \alpha, \omega_s}{1^{(z_{p+1})}}\right) = -1;$$

folglich, da

$$\left(\frac{\alpha, \omega_s}{1^{(z_{p+1})}}\right) = +1 \text{ ist,}$$

$$9) \quad \left(\frac{\varepsilon, \omega_s}{1^{(z_{p+1})}}\right) = -1,$$

d. h. ε ist nicht die Relativnorm einer Zahl aus K_s . Andererseits genügt aber ε , wie aus 8) folgt, den Bedingungen:

$$\left(\frac{\varepsilon, \omega_s}{1^{(y_i)}}\right) = 1, \dots, \left(\frac{\varepsilon, \omega_s}{1^{(y_{n_1})}}\right) = 1.$$

Es ist daher

$$v < m' - n_1.$$

Da ferner

$$v \geq a + m' - n_1 - 1,$$

folgt für unseren Fall:

$$10) \quad a = 0, \quad v = v^* = m' - n_1 - 1.$$

Es ist daher die Klassenzahl von K_s im weiteren Sinne ungerade.

Die reellen Körper unter den konjugierten von K_s sind nun:

$$K_s^{(x_1)}, K_s^{(x_2)}, \dots, K_s^{(x_r)}, K_s^{(x_r)},$$

also im ganzen $2r$. Da $v^* = m' - n_1 - 1$ ist, so folgt, daß unter den durch die Einheiten $\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_r}$ definierten Einheitenverbänden 2^{r-1} sind, die Relativnormen von Einheiten aus K_s sind. Daraus schließt man in analoger Weise wie oben, daß durch

$$\text{sgn } H^{(x_1)}, \text{sgn } H^{(x_2)}, \dots, \text{sgn } H^{(x_r)}, \text{sgn } H^{(x_r)}$$

im ganzen 2^{r-1} verschiedene Vorzeichenreihen dargestellt werden, wenn man H alle Einheiten aus K_s durchlaufen läßt. Es ist des-

halb die Klassenzahl $H_2 = 2H'_2$, also das Doppelte einer ungeraden Zahl. Daraus folgt wieder, daß der Körper (K_2, K_1) der einzige unverzweigte relativ Abel'sche Körper vom Relativgrad 4 in bezug auf k ist, der K_2 enthält. Gleichzeitig ergibt sich, daß für den Körper K_1 von den beiden oben betrachteten Fällen immer der erste eintreten muß, was man auch durch gruppentheoretische Betrachtungen zeigen kann.

Auf Grund des im Vorstehenden Bewiesenen können wir zum Schluß folgenden Satz aussprechen:

Satz 4: Es sei k ein Zahlkörper, dessen Klassenzahl im weiteren Sinne eine ungerade Zahl und bei Zugrundelegung des schärferen Äquivalenzbegriffes das Vierfache einer ungeraden Zahl ist. Es existiert dann in bezug auf k ein einziger unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad 4, dagegen keiner vom Relativgrad 8. In diesem Körper befriedigen alle Ideale j aus k auch bei Zugrundelegung des schärferen Äquivalenzbegriffes eine Äquivalenz

$$j^q \sim 1,$$

wo q eine ungerade Zahl ist.

**Numerische Uebersicht
der am Samoa-Observatorium im Jahre 1905
registrierten Fern- und Naherdbeben.**

Von

F. Linke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. October 1906 von Herrn H. Wagner.

Das im Samoa-Observatorium aufgestellte Wiechert'sche Pendel von 1000 kg Masse registrierte im Jahre 1905 440 Erdbeben, von denen 338 aus einer Entfernung unter 1000 Kilometern stammten (Nahbeben) und 102 fernere Herde hatten (Fernbeben).

Die Verteilung auf die Jahreszeiten ist folgende:

| Monate | Nahbeben | Fernbeben |
|-----------|----------|-----------|
| Januar | 18 | 7 |
| Februar | 21 | 11 |
| März | 14* | 8 |
| April | 27 | 10 |
| Mai | 30 | 4 |
| Juni | 28 | 15 |
| Juli | 50 | 9 |
| August | 54 | 4 |
| September | 28 | 11 |
| Oktober | 32 | 8 |
| November | 17 | 6 |
| Dezember | 19 | 9 |
| Jahr | 338 | 102 |

Während in den Fernerdbeben keine jährliche Periode zu erkennen ist, tritt sie unter den Nahbeben überraschend deutlich hervor. Das hervorspringende Maximum im Juli und August ist zwar hauptsächlich auf Rechnung eines Erdbebenschwarmes zu setzen, der dem am 1. oder 2. August erfolgten Ausbruch eines

Vulkans in Sawail vorausging und ihn begleitete. Immerhin ist die jährliche Periode, die den Erfahrungen in andern Erdteilen entspricht, unverkennbar.

Die Verteilung auf die Jahreszeiten giebt folgende in Prozenten der Gesamtzahl ausgedrückten Zahlen:

| Vierteljahr | Nahbeben | Fernbeben |
|-----------------------------|----------|-----------|
| Februar-März-April | 18.3 % | 28.5 % |
| Mai-Juni-Juli | 32.0 | 27.5 |
| August-September-Oktober | 33.7 | 22.5 |
| November-Dezember-Januar | 16.0 | 21.5 |
| Mai bis Oktober (Winter) | 65.7 | 50.0 |
| November bis April (Sommer) | 34.3 | 50.0 |

Ich konnte es mir nicht versagen, innerhalb des Monats eine Auszählung nach den Mondphasen vorzunehmen, indem stets die Erdbeben am Tage der betreffenden Phase mit drei Tage vor- und nachher zusammen genommen wurden, und finde folgende merkwürdigen monatlichen Perioden:

Monatliche Periode der Nahbeben.

| Monat | Neumond | Erstes Viertel | Vollmond | Letztes Viertel | Neumond |
|------------------------|---------|----------------|----------|-----------------|---------------|
| Januar | 4 (8) | 2 | 2 | 5 | |
| Februar | 16 | 1 | 4 | 1 | |
| März | 4 | 3 | 1 | 6 | |
| April | 13 | 5 | 7 | 2 | |
| Mai | 6 | 5 | 8 | 8 | |
| Juni | 12 | 2 | 7 | 8 | |
| Juli | 5 | 3 | 9 | 23* | 24* |
| August | | 9* | 19* | 9 | 7 |
| September | | 9 | 6 | 4 | 9 |
| Oktober | | 3 | 7 | 9 | 8 |
| November | | 9 | 2 | 3 | 6 |
| Dezember | | 4 | 4 | 6 | 2 (5) |
| Jahr | (60) | 55 | 76 | 84 | 56 + 60 = 116 |
| Prozent d. Gesamtzahl: | 16.6 % | 23.0 % | 25.4 % | | 35.0 % |

Bemerkung: Da das Jahr 1905 13 Neumonde hatte, wurde vom ersten und letzten nur die Hälfte der registrierten Erdbeben zur Berechnung herbeigezogen.

Die mit einem Stern * bezeichneten Zahlen enthalten den

Uebersicht der am Samoa-Observatorium registrierten Fern- u. Naherdbeben. 437

Erdbebenschwarm in sich. Läßt man sie aus, so ergibt sich die monatliche Periode:

Erstes Viertel 18.0 %

Vollmond 22.3 %

Letztes Viertel 23.8 %

Neumond 35.9 %.

Erstes + letztes Viertel 41,8 %

Vollmond + Neumond 58,2 %.

Monatliche Periode der Fernerdbeben.

| Monat | Neumond | Erstes Viertel | Vollmond | Letztes Viertel | Neumond |
|-----------------------------|---------|----------------|----------|-----------------|-----------|
| Januar | 1 (2) | 1 | 2 | 2 | |
| Februar | 1 | 3 | 5 | 2 | |
| März | 2 | 1 | 4 | 1 | |
| April | 2 | 0 | 2 | 6 | |
| Mai | 1 | 2 | 1 | 0 | |
| Juni | 4 | 2 | 3 | 2 | |
| Juli | 6 | 3 | 2 | 2 | 0 |
| August | | 1 | 2 | 1 | 0 |
| September | | 3 | 5 | 1 | 2 |
| Oktober | | 2 | 4 | 2 | 0 |
| November | | 4 | 0 | 1 | 1 |
| Dezember | | 1 | 3 | 3 | 1 (2) |
| Jahr | (17) | 23 | 33 | 23 | 4+17 = 21 |
| (Zugleich % der Gesamtzahl) | | | | | |

Erstes + letztes Viertel 46 %

Vollmond + Neumond 54 %.

Erstes und letztes Viertel zusammengenommen ergeben sowohl bei Nahbeben wie bei Fernbeben einen geringeren Prozentsatz als Vollmond und Neumond zusammengenommen. Diese monatlichen Perioden können kaum auf Zufall beruhen, da sie sich auch für beliebige Teile des Jahres ergeben.

Es scheint, daß die Erdbeben in dieser Gegend ein Maximum um Neumond haben, wie auch der Vulkanausbruch in Sawaii auf Neumond fiel. Hiergegen zeigen die aus weiter Ferne hier noch registrierten Erdbeben ein Maximum um Vollmond. Es liegt nahe die Ursache dieses Unterschiedes in dem Umstande zu suchen, daß die Erdbeben in unserm Teile der Südsee meist

vulkanischen Ursprungs, während die auf der ganzen Erde registrierten großen Erdbeben tektonische sind, aber es ist zu bedenken, daß jedenfalls für die durch die Gravitation bewirkten Deformationen der Erde Neumond und Vollmond sich gleich verhalten.

Eine genauere Bearbeitung der Nahbeben wird später unternommen werden; über die Fernerdbeben liegen regelmäßige Berichte vor, die vom Geophysikalischen Institute in Göttingen versandt werden.

Apia, den 20. März 1906.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

(Fünfte Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Juli 1906.

In dieser Mitteilung will ich die in meiner vierten Mitteilung entwickelte Theorie der linearen, der quadratischen und bilinearen Formen mit unendlichvielen Variabeln auf die Theorie der linearen Integralgleichungen anwenden. Es werden durch dieses neue einfachere und durchsichtigere Verfahren nicht nur alle bekannten Resultate über Integralgleichungen wiedergewonnen werden, sondern es gelingt auch, die Theorie der Integralgleichungen wesentlich auszudehnen und zu vervollkommen. — Weiterhin entsteht dann die Aufgabe, die Methode der unendlichvielen Variabeln direkt ohne Vermittelung der Integralgleichungen in die Theorie der Differentialgleichungen einzuführen.

XIII.

Die Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern.

In meiner vierten Mitteilung (S. 200) habe ich den Begriff „vollstetig“ für eine Funktion der unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, \dots definiert; ich will nunmehr an Stelle von „vollstetig“ kurz das Wort „stetig“ gebrauchen¹⁾: wir nennen somit fortan eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots)$ der unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, \dots für ein bestimmtes Wertsystem derselben stetig, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \dots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ für sich zu Null werden läßt, d. h.

1) An Stelle der auf S. 177 meiner vierten Mitteilung erklärten Bezeichnung „stetig“ sind alsdann die Worte „beschränkt stetig“ zu gebrauchen.

wenn

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \dots \quad L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \dots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$L_{n=\infty} \varepsilon_1^{(n)} = 0, \quad L_{n=\infty} \varepsilon_2^{(n)} = 0, \quad \dots$$

ist; dabei sind die Variablen stets an die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots \leq 1$$

gebunden.

Wenn eine Funktion für jedes dieser Ungleichung genügende Wertsystem der Variablen stetig ist, so heiße sie schlechthin *stetig*. Eine solche Funktion bleibt, wie man unmittelbar durch das bei endlicher Variablenzahl angewandte Verfahren erkennt, für alle Werte der Variablen absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze und besitzt stets ein Maximum.

Wenn wir in der Funktion F den Variablen x_{n+1}, x_{n+2}, \dots sämtlich den Wert 0 erteilen, so heiße die so entstehende Funktion der n Variablen x_1, \dots, x_n *der n te Abschnitt* von F ; derselbe werde mit $[F]_n$ oder mit F_n bezeichnet.

Ist F eine stetige Funktion von x_1, x_2, \dots , so konvergiert das Maximum von

$$|F - F_n|$$

mit unendlichwachsendem n gewiß gegen Null. Im entgegengesetzten Falle nämlich müßte es unendlichviele Wertsysteme

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots$$

geben, so daß die Differenz

$$(1) \quad |F(a^{(n)}) - F_n(a^{(n)})|$$

für alle n oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfällt. Wählen wir aus jenen Wertsystemen nach einem in meiner vierten Mitteilung oft angewandten Verfahren solche unendlichvielen Wertsysteme

$$b_1^{(n)} = a_1^{(n_k)}, \quad b_2^{(n)} = a_2^{(n_k)}, \quad \dots$$

aus, daß

$$L_{n=\infty} b_1^{(n)} = b_1, \quad L_{n=\infty} b_2^{(n)} = b_2, \quad \dots$$

existiert, wo b_1, b_2, \dots gewisse Werte bedeuten, so ist wegen der Stetigkeit der Funktion F

$$(2) \quad L_{n=\infty} F(b^{(n)}) = F(b).$$

Setzen wir nun allgemein

$$\begin{aligned} c_p^{(n)} &= b_p^{(n)}, & p \leq n_h \\ c_p^{(n)} &= 0 & p > n_h \end{aligned}$$

so ist

$$\lim_{h \rightarrow \infty} c_1^{(h)} = b_1, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} c_2^{(h)} = b_2, \quad \dots$$

und folglich auch

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} F(c^{(h)}) = \lim_{h \rightarrow \infty} F_{n_h}(b^{(h)}) = F(b);$$

die Grenzgleichungen (2), (3) widersprechen aber der obigen Annahme, wonach (1) stets oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfallen sollte.

Aus der eben bewiesenen Tatsache, daß das Maximum von $|F - F_n|$ mit unendlichwachsendem n gegen Null konvergiert, folgern wir leicht folgende Sätze:

1. Die Abschnitte $F_n(x)$ einer stetigen Funktion $F(x)$ konvergieren *gleichmäßig* für alle x_1, x_2, \dots gegen $F(x)$.

2. Ist $F(x_1, x_2, \dots)$ eine stetige Funktion von x_1, x_2, \dots und werden $x_1(\xi), x_2(\xi), \dots$ solche stetige Funktionen der endlichvielen oder unendlichvielen Variablen ξ_1, ξ_2, \dots , daß stets

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \dots \leq 1$$

ausfällt, so geht F in eine stetige Funktion der neuen Variablen über. Wird allgemein

$$\begin{aligned} F(x_1(\xi), x_2(\xi), \dots) &= F(x(\xi)), \\ F_n(x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)) &= F_n(x(\xi)) \end{aligned}$$

gesetzt, so konvergiert die Funktionenreihe

$$F_1(x(\xi)), F_2(x(\xi)), \dots$$

gleichmäßig für alle ξ gegen $F(x(\xi))$.

3. Ist insbesondere eine stetige Linearform

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots$$

vorgelegt, so ist der n^{te} Abschnitt nichts anderes als die Summe der n ersten Glieder der unendlichen Reihe rechter Hand. Nach Satz 1 konvergiert diese Summe mit wachsendem n gleichmäßig für alle x_1, x_2, \dots gegen $L(x)$. Die Konvergenz jener unendlichen Reihe ist zugleich eine absolute; denn wenn wir die Variablen x_1, x_2, \dots in irgend einer anderen Anordnung mit x'_1, x'_2, \dots benennen, so müssen nach Satz 1, da $L(x)$ in eine stetige Funktion von x'_1, x'_2, \dots übergeht, die dieser neuen Benennung entsprechend gebildeten Abschnitte der Funktion $L(x)$ d. h. die Summen der

n ersten Glieder der entsprechend umgeordneten unendlichen Reihe ebenfalls gegen den Wert $L(x)$ konvergieren. Ebenso lehrt Satz 2, daß, wenn wir an Stelle von x_1, x_2, \dots stetige Funktionen von endlichvielen oder unendlichvielen Variablen ξ_1, ξ_2, \dots setzen, die der Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \dots \leq 1$$

genügen, die Reihe

$$L(x(\xi)) = l_1 x_1(\xi) + l_2 x_2(\xi) + \dots$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Wegen des linearen und homogenen Charakters von $L(x)$ kann jene Bedingung auch durch die Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \dots \leq M$$

ersetzt werden, wenn M irgend eine von den Variablen ξ_1, ξ_2, \dots unabhängige Größe bedeutet.

Die in Satz 3 aufgestellten Behauptungen sind auch leicht direkt beweisbar.

Als Bindeglied und zur Vermittelung zwischen der Theorie der Funktionen und Gleichungen mit unendlichvielen Variablen, wie ich sie in meiner vierten Mitteilung entwickelt habe, und andererseits der Theorie der Integralgleichungen, die doch Relationen für Funktionen einer Variablen s ausdrücken, bedarf es irgend eines Systems von unendlichvielen stetigen Funktionen

$$\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$$

der Variablen s , die im Intervalle $s = a$ bis $s = b$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die sogenannte *Orthogonalitätseigenschaft*:

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_a^b \Phi_p(s) \Phi_q(s) ds &= 0, & (p \neq q) \\ \int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds &= 1; \end{aligned}$$

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s), v(s)$ der Variablen s

$$\begin{aligned} \int_a^b u(s) v(s) ds &= \int_a^b u(s) \Phi_1(s) ds \int_a^b v(s) \Phi_1(s) ds \\ &+ \int_a^b u(s) \Phi_2(s) ds \int_a^b v(s) \Phi_2(s) ds + \dots \end{aligned}$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... als ein *orthogonales vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgend eine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige Funktion von s , so mögen die Integrale

$$\int_a^b u(s) \Phi_1(s) ds, \int_a^b u(s) \Phi_2(s) ds, \dots$$

die *Fourier-Koeffizienten* der Funktion $u(s)$ in Bezug auf das orthogonale vollständige Funktionensystem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... heißen und kurz bez. mit

$$\{u(*)\}_1, \{u(*)\}_2, \dots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b u(s) \Phi_p(s) ds, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

ist. Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(5) \quad \int_a^b u(s) v(s) ds = \{u(*)\}_1 \{v(*)\}_1 + \{u(*)\}_2 \{v(*)\}_2 + \dots$$

Um für ein gegebenes Intervall $s = a$ bis $s = b$ ein orthogonales vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, bestimme man zunächst irgend ein System von stetigen Funktionen

$$P_1(s), P_2(s), \dots$$

die die Eigenschaft besitzen, daß für eine endliche Anzahl von ihnen niemals eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht, und die überdies von der Art sind, daß, wenn $u(s)$ irgend eine stetige Funktion von s , und ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, allemal eine endliche Anzahl von Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n gefunden werden kann, für die

$$(6) \quad \int_a^b (u(s) - c_1 P_1(s) - c_2 P_2(s) - \dots - c_n P_n(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt. Wie man sieht, bildet beispielsweise das System aller ganzen Potenzen von s

$$P_1(s) = 1, \quad P_2(s) = s, \quad P_3(s) = s^2, \quad \dots$$

ein Funktionensystem von der verlangten Art.

Wir setzen

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \gamma_1 P_1, \\ \Phi_2 &= \gamma_2 P_2 + \gamma'_2 \Phi_1, \\ \Phi_3 &= \gamma_3 P_3 + \gamma'_3 \Phi_1 + \gamma''_3 \Phi_2, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

und können dann, wie leicht ersichtlich, der Reihe nach die Konstanten $\gamma_1; \gamma_2, \gamma'_2; \gamma_3, \gamma'_3, \gamma''_3; \dots$ so bestimmen, daß die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ den Orthogonalitäts-Relationen (4) sämtlich Genüge leisten¹⁾. Die so konstruierten Funktionen Φ_1, Φ_2, \dots erfüllen alsdann auch die Vollständigkeits-Relation (5).

Um dies einzusehen, bedenken wir zunächst, daß wenn $u(s)$ eine stetige Funktion von s ist, die Summe der Quadrate aller Fourier-Koeffizienten von $u(s)$ konvergiert und den Wert des Integrals

$$\int_a^b (u(s))^2 ds$$

niemals übersteigen kann. In der Tat ist für eine beliebige ganze Zahl n gewiß

$$\int_a^b (u(s) - \{u(*)\}_1 \Phi_1(s) - \dots - \{u(*)\}_n \Phi_n(s))^2 ds \geq 0$$

und mithin, wie die Rechnung lehrt,

$$\{u(*)\}_1^2 + \dots + \{u(*)\}_n^2 \leq \int_a^b (u(s))^2 ds;$$

also auch

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \dots \leq \int_a^b (u(s))^2 ds.$$

Wir zeigen sodann, daß genau

$$(7) \quad \{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \dots = \int_a^b (u(s))^2 ds$$

ausfällt. Wäre nämlich im Gegenteil

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \dots < \int_a^b (u(s))^2 ds$$

d. h.

$$(8) \quad \varepsilon = \int_a^b (u(s))^2 ds - \{u(*)\}_1^2 - \{u(*)\}_2^2 - \dots > 0,$$

so denken wir uns zu $u(s)$ und ε in (6) die Koeffizienten c_1, \dots, c_n bestimmt; setzen wir

$$(9) \quad u'(s) = c_1 P_1(s) + \dots + c_n P_n(s) = c'_1 \Phi_1(s) + \dots + c'_n \Phi_n(s),$$

1) Vgl. hiermit E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen etc., Inaugural-Dissertation (Göttingen 1905), § 3.

wo c'_1, \dots, c'_m ebenfalls gewisse Konstanten bedeuten, so fällt

$$(10) \quad \int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds < \varepsilon$$

aus. Andererseits ergibt sich mit Rücksicht auf (9) und (8)

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds &= \int_a^b (u(s) - c'_1 \Phi_1(s) - \dots - c'_m \Phi_m(s))^2 ds \\ &= \int_a^b u(s)^2 ds - 2c'_1 \{u(*)\}_1 - \dots - 2c'_m \{u(*)\}_m + c_1'^2 + \dots + c_m'^2 \\ &= \varepsilon + \{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \dots - 2c'_1 \{u(*)\}_1 - \dots - 2c'_m \{u(*)\}_m + c_1'^2 + \dots + c_m'^2 \\ &= \varepsilon + (\{u(*)\}_1 - c'_1)^2 + \dots + (\{u(*)\}_m - c'_m)^2 + \{u(*)\}_{m+1}^2 + \{u(*)\}_{m+2}^2 + \dots \end{aligned}$$

und folglich

$$\int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds \geq \varepsilon,$$

was der Ungleichung (10) widerspricht.

Damit ist die Gleichung (7) bewiesen und aus dieser folgt, wenn wir einmal für $u(s)$ die Summe und dann die Differenz irgend zweier stetiger Funktionen nehmen und die erhaltenen Gleichungen subtrahieren, auch die allgemeine Vollständigkeits-Relation (5).

Es sei noch erwähnt, daß man in analoger Weise auch für beliebige Intervallsysteme, ferner für mehrere unabhängige Variable und auf einer beliebiger Fläche ein vollständiges orthogonales Funktionensystem konstruieren kann.

Wir zeigen zunächst, wie die Fredholmschen Sätze¹⁾ über die Lösung der Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern aus der in der vierten Mitteilung von mir entwickelten Theorie der linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten folgen.

Es sei die Integralgleichung zweiter Art

$$(11) \quad f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

vorgelegt; in derselben bedeute der Kern $K(s, t)$ eine stetige nicht notwendig symmetrische Funktion von s, t und $f(s)$ sei ebenfalls als eine stetige Funktion gegeben; $f(s)$ möge überdies nicht identisch für alle Werte der Variablen Null sein; $\varphi(s)$ ist die zu bestimmende Funktion. Wir bilden die Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$ als einer Funktion von t und alsdann die Fourier-Koeffi-

1) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27. (1903.)

zienten der so entstandenen Funktion von s , wie folgt:

$$k_q(s) = \{K(s, *)\}_q = \int_a^b K(s, t) \Phi_q(t) dt,$$

$$a_{pq} = \{k_q(*)\}_p = \int_a^b \int_a^b K(s, t) \Phi_p(s) \Phi_q(t) ds dt.$$

Setzen wir in der Vollständigkeits-Relation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen

$$u(t) = v(t) = K(s, t)$$

ein, so finden wir

$$(12) \quad \int_a^b (K(s, t))^2 dt = (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \dots$$

Setzen wir andererseits in (5)

$$u(s) = v(s) = k_q(s),$$

so ergibt sich

$$\int_a^b (k_q(s))^2 ds = a_{1q}^2 + a_{2q}^2 + \dots$$

Aus (12) entnehmen wir die Ungleichung

$$(k_1(s))^2 + \dots + (k_m(s))^2 \leq \int_a^b (K(s, t))^2 dt;$$

mithin folgt aus der zuletzt gefundenen Gleichung für jedes m

$$\sum_{\substack{p=1,2,\dots \\ q=1,\dots,m}} a_{pq}^2 \leq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt$$

und daher ist auch

$$\sum_{(p,q=1,2,\dots)} a_{pq}^2 \leq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt.$$

Diese Ungleichung lehrt mit Rücksicht auf eine Bemerkung meiner vierten Mitteilung (S. 218), daß die mit den Größen a_{pq} als Koeffizienten gebildete Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

gewiß stetig in den unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ ist. Setzen wir endlich noch

$$a_p = \{f(*)\}_p = \int_a^b f(s) \Phi_p(s) ds,$$

so wird

$$\int_a^b (f(s))^2 ds = a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

Wegen der Stetigkeit der Bilinearform $A(x, y)$ und der eben bewiesenen Endlichkeit der Quadratsumme der a_1, a_2, \dots , ist die Anwendung des Satzes X (S. 219) meiner vierten Mitteilung auf jene Bilinearform $A(x, y)$ und dieses Größensystem a_1, a_2, \dots gestattet: es sei — dem ersten Falle des Satzes X entsprechend —

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (93) (S. 219) daselbst, d. h. es sei

$$(13) \quad \alpha_p + a_{p1}a_1 + a_{p2}a_2 + \dots = a_p, \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Wegen der Endlichkeit der Quadratsumme der a_1, a_2, \dots stellt die Linearform

$$(14) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$$

eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots dar. Bezeichnen wir mit M eine endliche obere Grenze für die Werte des Integrales

$$\int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

als Funktion von s , so sind wegen (12)

$$k_1(s), k_2(s), \dots$$

eine unendliche Reihe stetiger Funktionen von s , deren Quadratsumme den Wert M nicht übersteigt. Setzen wir daher diese Funktionen in die Linearform (14) an Stelle der Variablen x_1, x_2, \dots ein, so wird dieselbe nach dem zu Anfang dieses Abschnittes XIII bewiesenen Satze 3 (S. 441) eine stetige Funktion von s : wir setzen

$$(15) \quad \alpha(s) = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \dots$$

Hier konvergiert nach Satz 3 (S. 441) die Reihe rechter Hand gleichmäßig für alle s ; multiplizieren wir demnach (15) mit $\Phi_p(s)$ und integrieren nach s zwischen den Grenzen $s = a$ und $s = b$, so erhalten wir

$$\int_a^b \Phi_p(s) \alpha(s) ds = \alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \dots$$

und wegen (13)

$$\alpha_p + \int_a^b \Phi_p(s) \alpha(s) ds = a_p$$

oder, wenn

$$(16) \quad \varphi(s) = f(s) - \alpha(s)$$

gesetzt wird,

$$\alpha_p = \{f(*)\}_p - \{\alpha(*)\}_p = \{\varphi(*)\}_p$$

d. h. die Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ unserer linearen Gleichungen ergeben sich als die Fourier-Koeffizienten einer in s stetigen Funktion $\varphi(s)$.

Nunmehr folgt unmittelbar, daß $\varphi(s)$ eine Lösung der ursprünglich vorgelegten Integralgleichung (11) ist. In der Tat, setzen wir in der Vollständigkeitsrelation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen,

$$u(t) = \varphi(t), \quad v(t) = K(s, t),$$

so ergibt sich aus derselben

$$(17) \quad \int_a^b \varphi(t) K(s, t) dt = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \dots$$

d. h. wegen (15) und (16)

$$(18) \quad \int_a^b \varphi(t) K(s, t) dt = f(s) - \varphi(s).$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ irgend eine in s stetige Lösung der Integralgleichung (11) oder (18) bezeichnet und dann $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ die Fourier-Koeffizienten dieser Lösung $\varphi(s)$ bedeuten, so folgt nach der Vollständigkeits-Relation (5) zunächst (17) und wegen (18)

$$\alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \dots = f(s) - \varphi(s).$$

Da wegen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots = \int_a^b (\varphi(s))^2 ds$$

die Quadratsumme der $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ endlich ist, so stellt

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$$

eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots dar und somit entnehmen wir, wie vorhin, aus der letzten Gleichung durch Multiplikation mit $\Phi_p(s)$ und Integration nach s das Gleichungssystem

$$\alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \dots = a_p - \alpha_p, \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Wir erkennen somit, daß die Fourier-Koeffizienten einer Lösung der Integralgleichung stets auch ein System von Lösungen unserer linearen Gleichungen (13) und zwar ein solches mit endlicher Quadratsumme liefert.

Zugleich ist klar, daß, wenn irgend e linear unabhängige Lösungen der Integralgleichung vorliegen, die aus diesen durch Bildung der Fourier-Koeffizienten entstehenden e Lösungssysteme der linearen Gleichungen ebenfalls von einander linear unabhängig sind.

Trifft für die aus $A(x, y)$ entspringenden linearen Gleichungen der zweite Fall des Satzes X meiner vierten Mitteilung (S. 219) zu, so gibt es diesem Satze zufolge ein Lösungssystem der homogenen linearen Gleichungen (94) (S. 219); es sei alsdann

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \dots$$

ein solches Lösungssystem mit der Quadratsumme 1. Nehmen wir nunmehr in der vorigen Betrachtung

$$f(s) = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \dots,$$

so erweisen sich genau wie vorhin, die Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ als die Fourier-Koeffizienten einer in s stetigen Lösung der homogenen Integralgleichung

$$(19) \quad \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0.$$

und wegen

$$\int_a^b (\varphi(s))^2 ds = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots = 1$$

erkennen wir, daß $\varphi(s)$ nicht identisch verschwindet.

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Integralgleichung (19) ist, so liefern deren Fourier-Koeffizienten ein Lösungssystem unserer homogenen linearen Gleichungen.

Aus den Entwicklungen meiner vierten Mitteilung folgt, daß, wenn e die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der homogenen Gleichungen

$$(20) \quad L_p(x) = x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots = 0, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

sind, zwischen den Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ genau e von einander unabhängige lineare Identitäten von der Gestalt

$$(21) \quad \beta_1^{(h)} L_1(x) + \beta_2^{(h)} L_2(x) + \dots = 0, \quad (h = 1, \dots, e)$$

bestehen müssen, wobei die Koeffizienten $\beta_1^{(h)}, \beta_2^{(h)}, \dots$ in diesen Identitäten eine endliche Quadratsumme besitzen und ferner, daß die inhomogenen Gleichungen (13)

$$x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots = a_p, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

nur dann und stets dann lösbar sind, wenn die Größen a_1, a_2, \dots die e Bedingungen

$$(22) \quad \beta_1^{(h)} a_1 + \beta_2^{(h)} a_2 + \dots = 0, \quad (h = 1, \dots, e)$$

erfüllen ¹⁾.

1) In der Tat, es sei wie oben e die genaue Zahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichungen (20) und f die Zahl der von einander unabhängigen

Das Bestehen der ϵ linearen Relationen (21) sagt aus, daß die aus (20) durch Transposition entstehenden linearen homogenen

Identitäten von der Gestalt (21): dann lassen sich aus den Variablen x_1, x_2, \dots gewiß ϵ solche auswählen, daß die Gleichungen (20) keine Lösung mehr besitzen, bei der die ϵ ausgewählten Variablen sämtlich Null sind; wir bezeichnen die übrigbleibenden Variablen mit x'_1, x'_2, \dots . Wäre nun $f > \epsilon$, so müßten sich aus den Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots$ ϵ solche aussuchen lassen, die lineare Kombinationen der übrigen sind, während die übrigbleibenden unendlichvielen Linearformen, die mit $L'_1(x), L'_2(x), \dots$ bezeichnet werden mögen, gewiß noch einer linearen Identität von der Gestalt

$$(21^*) \quad \beta_1 L'_1(x) + \beta_2 L'_2(x) + \dots = 0$$

genügen, wo die Koeffizienten β_1, β_2, \dots eine endliche Quadratsumme haben und nicht sämtlich Null sind. Wir setzen nun in den Linearformen $L'_1(x), L'_2(x), \dots$ die vorhin ausgewählten ϵ Variablen Null und bezeichnen die so entstehenden Linearformen der Variablen x'_1, x'_2, \dots mit $L'_1(x'), L'_2(x'), \dots$. Endlich bestimmen wir irgend welche Größen a_1, a_2, \dots mit endlicher Quadratsumme die für welche

$$(21^{**}) \quad \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots \neq 0$$

ausfällt. Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$(21^{***}) \quad \begin{aligned} L'_1(x') &= a_1, \\ L'_2(x') &= a_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

mit den Unbekannten x'_1, x'_2, \dots ; dasselbe nimmt bei geeigneter Anordnung der Gleichungen wieder die Gestalt des Gleichungssystems (93) meiner vierten Mitteilung (S. 219) an. Wir sehen dies am leichtesten ein, indem wir zum Gleichungssystem (20) den zugehörigen Bilinear Ausdruck

$$(21^\dagger) \quad y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots = (x, y) + A(x, y)$$

bilden; darin ist $A(x, y)$ eine stetige Bilinearform der Variablen $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$. Der entsprechende Bilinear Ausdruck für das Gleichungssystem (21^{***})

$$y'_1 L'_1(x') + y'_2 L'_2(x') + \dots$$

entsteht dem Obigen zufolge, indem wir in (21^\dagger) gewisse ϵ von den Variablen x_1, x_2, \dots und gewisse ϵ von den Variablen y_1, y_2, \dots Null setzen und die übrigbleibenden Variablen mit x'_1, x'_2, \dots bez. y'_1, y'_2, \dots bezeichnen. Hierbei verwandelt sich nun (x, y) , wenn wir noch nötigenfalls gewisse Produkte $x'_i y'_i$ in endlicher Anzahl addieren, in

$$(x', y') = x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + \dots$$

und da sich zugleich $A(x, y)$ in eine stetige Bilinearform der Variablen $x'_1, x'_2, \dots, y'_1, y'_2, \dots$ verwandelt, so haben wir

$$y'_1 L'_1(x') + y'_2 L'_2(x') + \dots = (x', y') + A'(x', y'),$$

wo $A'(x', y')$ gewiss ebenfalls eine stetige Bilinearform von $x'_1, x'_2, \dots, y'_1, y'_2, \dots$ wird; daraus folgt die behauptete Gestalt des Gleichungssystems (21^{***}). Aus (21^*), (21^{**}) erkennen wir, daß das Gleichungssystem (21^{***}) keine Lösung be-

Gleichungen

$$x_q + a_{1,q}x_1 + a_{2,q}x_2 + \dots = 0, \quad (q = 1, 2, \dots)$$

die e Lösungssysteme

$$(23) \quad x_1 = \beta_1^{(h)}, \quad x_2 = \beta_2^{(h)}, \quad \dots, \quad (h = 1, \dots, e)$$

zulassen. Dieselben Schlüsse, die wir oben auf die ursprünglichen linearen Gleichungen und deren Lösungssystem $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ angewandt haben, lassen uns erkennen, daß die Grössen (23) die Fourier-Koeffizienten gewisser e linear von einander unabhängiger in s stetiger Funktionen $\psi^{(1)}(s), \dots, \psi^{(e)}(s)$ sind. In Folge dieses Umstandes erhalten die e Bedingungen (22) die Gestalt

$$(24) \quad \int_a^b \psi^{(1)}(s)f(s)ds = 0, \quad \dots, \quad \int_a^b \psi^{(e)}(s)f(s)ds = 0,$$

Nach den obigen Ausführungen zieht unsere Annahme, daß die homogenen Gleichungen (20) genau e linear unabhängige Lösungen besitzen, die Folge nach sich, daß auch die homogene Integralgleichung (19) genau e linear unabhängige stetige Lösungen besitzt. Da ferner jedes System von Lösungen der inhomogenen linearen Gleichungen (13) eine Lösung der inhomogenen Integralgleichung (11) liefert und umgekehrt, so erweisen sich alsdann die e Bedingungen (24) für die Funktion $f(s)$ als notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der ursprünglich vorgelegten inhomogenen Integralgleichung (11); dabei sind die $\psi^{(1)}(s), \dots, \psi^{(e)}(s)$ die Lösungen der homogenen Integralgleichung mit dem transponierten Kern $K(t, s)$.

Die erhaltenen Lösungen der Integralgleichungen (11), (19) sind von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ wesentlich unabhängig: in der Tat jede aus $K(s, t)$ unter Vermittelung eines anderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems entspringende Bilinearform geht aus der Bilinearform $A(x, y)$ durch eine simultane orthogonale Transformation der Variablen $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ hervor, so daß auch das neue Gleichungssystem und dessen Lösungen sich von dem ursprünglichen Gleichungssysteme und dessen Lösungen nicht wesentlich unterscheidet.

sitzt; da aber das aus ihm durch Nullsetzen der linken Seiten entstehende homogene Gleichungssystem ebenfalls keine Lösung zuläßt, so zeigt dieser Widerspruch mit dem Satze X meiner vierten Mitteilung (S. 219), daß die Annahme $f > e$ unzutreffend war. Da die Anwendung des eben Bewiesenen auf das transponierte Gleichungssystem zeigt, daß auch $e > f$ unzutreffend sein muß, so ist notwendig $e = f$. Zugleich erkennen wir auch die Richtigkeit der letzten oben gemachten Aussage.

XIV.

Die Theorie der orthogonalen Integralgleichung.

Derselbe Grundgedanke, der uns in Abschnitt XIII zur Herleitung der Fredholmschen Sätze über die Lösung von Integralgleichungen zweiter Art gedient hat, ermöglicht auch die Neubegründung der von mir in der ersten Mitteilung entwickelten Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischen Kern. Um dies einzusehen, sei eine Integralgleichung von der Gestalt

$$(25) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

vorgelegt, worin $K(s, t)$ eine stetige symmetrische Funktion von s, t , $f(s)$ eine ebenfalls gegebene stetige Funktion von s , $\varphi(s)$ die zu bestimmende Funktion von s und λ einen Parameter bedeute. Der Kürze halber werde eine Integralgleichung von der Gestalt (25) mit symmetrischem Kern als *orthogonale Integralgleichung* bezeichnet.

Wir bilden zunächst durch Vermittelung des orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ aus dem Kern $K(s, t)$ eine Bilinearform, indem wir wie in Abschnitt XIII

$$(26) \quad \begin{aligned} k_i(s) &= \{K(s, *)\}_i^- = \int_a^b K(s, t) \Phi_i(t) dt, \\ k_{rs} &= \{k_i(*)\}_r = \int_a^b \int_a^b K(s, t) \Phi_r(s) \Phi_i(t) ds dt \end{aligned}$$

setzen. Wegen der Symmetrie des Kerns $K(s, t)$ in s, t haben wir

$$k_{rs} = k_{sr}$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{rs} gebildete Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p y_q$$

eine solche symmetrische Form, wie sie aus der quadratischen Form

$$(27) \quad K(x) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p x_q$$

abgeleitet wird.

Analog wie vorhin in Abschnitt XIII (S. 446) schließen wir aus der wie dort folgenden Ungleichung

$$\sum_{(p, q)} k_{pq}^2 \leq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds dt$$

mit Hülfe des Satzes VI meiner vierten Mitteilung (S. 203), daß

die aus $K(s, t)$ entsprungene quadratische Form $K(x)$ eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots ist. Infolgedessen ist die Anwendung des Satzes V meiner vierten Mitteilung (S. 201) gestattet und dieser Satz ergibt, daß jene quadratische Form durch eine orthogonale Substitution der Variablen x_1, x_2, \dots in die Variablen x'_1, x'_2, \dots die Gestalt

$$(28) \quad K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \dots$$

erhält. Die Variablen x'_1, x'_2, \dots sind lineare Formen der ursprünglichen Variablen x_1, x_2, \dots . Falls nun unter den Größen k_1, k_2, \dots solche vorhanden sind, die den Wert Null haben, sondern wir die diesen Größen k zugehörigen Linearformen ab: es seien dies die Linearformen

$$\begin{aligned} x'_{h_1} &= M_1(x) = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots, \\ x'_{h_2} &= M_2(x) = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die übrig bleibenden Größen k bezeichnen wir mit $\kappa_1, \kappa_2, \dots$; die zu diesen Größen κ zugehörigen Linearformen seien

$$\begin{aligned} x'_{g_1} &= L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots, \\ x'_{g_2} &= L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Formel (28) nimmt dann die Gestalt an

$$K(x) = \kappa_1 (L_1(x))^2 + \kappa_2 (L_2(x))^2 + \dots,$$

und da die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \dots, M_1(x), M_2(x), \dots$ ein vollständiges orthogonales System bilden, so haben wir

$$(29) \quad L_p(\cdot) L_q(\cdot) = 0, \quad (p \neq q)$$

$$(30) \quad L_p(\cdot) L_p(\cdot) = 1,$$

$$L_p(\cdot) M_q(\cdot) = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots = (L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \dots + (M_1(x))^2 + (M_2(x))^2 + \dots;$$

$$(31) \quad \begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots &= L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \dots \\ &+ M_1(x) M_1(y) + M_2(x) M_2(y) + \dots, \end{aligned}$$

überdies ist

$$(32) \quad K(x, \cdot) L_p(\cdot) = \kappa_p L_p(x),$$

$$(33) \quad K(x, \cdot) M_p(\cdot) = 0.$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten der Linearform $L_p(x)$ nach (30) den Wert 1 hat, also endlich bleibt, so ist diese Linearform eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen x_1, x_2, \dots

und wir können sie daher in derselben Weise wie oben S. 447 die Linearform (14) behandeln: wir finden dann, daß die Reihe

$$(34) \quad L_r(k(s)) \equiv l_{r1} k_1(s) + l_{r2} k_2(s) + \dots$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und also eine stetige Funktion von s bestimmt. Durch Multiplikation mit $\Phi_r(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (26)

$$\int_a^b L_r(k(s)) \Phi_r(s) ds = l_{r1} k_{r1} + l_{r2} k_{r2} + \dots$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_r auf beiden Seiten von (32)

$$l_{r1} k_{r1} + l_{r2} k_{r2} + \dots = x_r l_{rr}$$

und folglich ist

$$\int_a^b L_r(k(s)) \Phi_r(s) ds = x_r l_{rr}$$

Setzen wir

$$(35) \quad L_r(k(s)) = x_r \varphi_r(s),$$

so ist, da ja $x_r \neq 0$ ausfällt, $\varphi_r(s)$ eine ebenfalls in s stetige Funktion, die die Gleichung

$$(36) \quad \int_a^b \varphi_r(s) \Phi_r(s) ds = l_{rr}$$

erfüllt, d. h. die Koeffizienten l_{r1}, l_{r2}, \dots der Linearform $L_r(x)$ sind die Fourier-Koeffizienten einer gewissen stetigen Funktion $\varphi_r(s)$ in Bezug auf das vollständige orthogonale Funktionensystem Φ_1, Φ_2, \dots .

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (5)

$$u(s) = \varphi_r(s), \quad v(s) = \varphi_r(s),$$

so lehrt dieselbe

$$\int_a^b \varphi_r(s) \varphi_r(s) ds = l_{r1} l_{r1} + l_{r2} l_{r2} + \dots = L_r(.) L_r(.)$$

und folglich wegen (29) und (30)

$$(37) \quad \begin{aligned} \int_a^b \varphi_r(s) \varphi_r(s) ds &= 0, & (p \neq r) \\ \int_a^b (\varphi_r(s))^2 ds &= 1, \end{aligned}$$

d. h. die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ bilden ein orthogonales Funktionensystem.

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (5) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = \varphi_r(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (34) und (35)

$$(38) \quad \int_a^b K(s, t) \varphi_r(t) dt = k_1(s) l_{r1} + k_2(s) l_{r2} + \dots = x_r \varphi_r(s),$$

oder, wenn wir

$$\lambda_r = \frac{1}{x_r}$$

einführen

$$(39) \quad \varphi_r(s) = \lambda_r \int_a^b K(s, t) \varphi_r(t) dt,$$

d. h. die zu unserer ursprünglich vorgelegten Integralgleichung (25) gehörige homogene Integralgleichung

$$(40) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_r$ die wegen (37) gewiß nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(s) = \varphi_r(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich zur Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des orthogonalen Systems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ fortschreitet.

Da die Linearform $M_r(x)$ eine stetige Funktion der unendlich-vielen Variablen x_1, x_2, \dots darstellt, so erkennen wir genau wie oben S. 447, daß

$$M_r(k(s)) = m_{r1} k_1(s) + m_{r2} k_2(s) + \dots$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und eine stetige Funktion von s bestimmt und hieraus wiederum schließen wir wie oben

$$\int_a^b M_r(k(s)) \Phi_q(s) ds = m_{r1} k_{q1} + m_{r2} k_{q2} + \dots$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (33) erhalten wir

$$m_{r1} k_{q1} + m_{r2} k_{q2} + \dots = 0$$

und folglich ist auch

$$\int_a^b M_r(k(s)) \Phi_q(s) ds = 0, \quad (q = 1, 2, \dots);$$

hieraus aber schließen wir sofort, indem wir in der Vollständig-

keits-Relation (5)

$$u(s) = v(s) = M_p(k(s))$$

einsetzen

$$\int_a^b (M_p(k(s)))^2 ds = 0,$$

d. h. es ist identisch für alle Werte s

$$M_p(k(s)) = 0.$$

Nunmehr wenden wir die Identität (31) an; wir betrachten zunächst den darin rechter Hand vorkommenden Ausdruck

$$(41) \quad L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \dots$$

Wenn wir hierin den Variablen x_1, x_2, \dots irgendwelche konstante Werte mit endlicher Quadratsumme erteilen, so stellt wegen

$$(L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \dots \leq (x, x)$$

der Ausdruck (41) eine stetige lineare Funktion von $L_1(y), L_2(y), \dots$ dar; dem Satz 3 (S. 442) zufolge muß (41) demnach gleichmäßig und absolut konvergieren für alle Werte von y_1, y_2, \dots , für die

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \dots$$

unterhalb einer von y_1, y_2, \dots unabhängigen Grenze bleibt und dies ist wegen

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \dots \leq (y, y)$$

gewiß immer der Fall, wenn (y, y) unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Wir verstehen nunmehr unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in der Identität (31) an Stelle der Variablen x_1, x_2, \dots die Konstanten

$$(42) \quad x_p = \{g(*)\}_p,$$

deren Quadratsumme

$$\{g(*)\}_1^2 + \{g(*)\}_2^2 + \dots = \int_a^b (g(s))^2 ds$$

endlich ist und an Stelle der Variablen y_1, y_2, \dots die in s stetigen Funktionen

$$(43) \quad y_p = k_p(s) = \{K(s, *)\}_p,$$

deren Quadratsumme

$$(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \dots = \int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

gewiß unterhalb einer von s unabhängigen Grenze, nämlich dem

maximalen Werte M des rechts stehenden Integrales liegt. Mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation erhält dann die linke Seite jener Identität (31) den Wert

$$\int_a^b K(s, t) g(t) dt.$$

Andererseits wird bei Heranziehung der Gleichung (36) und der Vollständigkeits-Relation

$$L_r(\{g(*)\}) = l_{r1}\{g(*)\}_1 + l_{r2}\{g(*)\}_2 + \dots = \int_a^b g(s) \varphi_r(s) ds,$$

und da $M_r(k(s))$ identisch verschwindet, so geht die rechte Seite jener Identität (31) mit Rücksicht auf (35) nach der Substitution (42), (43) in

$$\left(\int_a^b g(s) \varphi_1(s) ds\right)(\kappa_1 \varphi_1(s)) + \left(\int_a^b g(s) \varphi_2(s) ds\right)(\kappa_2 \varphi_2(s)) + \dots$$

über. Setzen wir daher

$$(44) \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt$$

und, indem wir (38) berücksichtigen

$$c_r = \int_a^b f(s) \varphi_r(s) ds = \kappa_r \int_a^b g(t) \varphi_r(t) dt,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten jener Identität zu der Formel

$$f(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. jede durch Vermittelung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt (44) darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den orthogonalen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ fortschreitende gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickeln¹⁾.

Wir haben oben erkannt, daß die homogene Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_r$ eine nicht verschwindende Lösung besitzt; dieselbe besitzt auch nur für diese Werte $\lambda = \lambda_r$ eine nicht verschwindende Lösung. In der Tat, ist λ ein von $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ verschiedener

1) Diesen Entwicklungssatz hatte ich in meiner ersten Mitteilung lediglich unter der Annahme eines „allgemeinen“ Kerns bewiesenen bez. bei beliebigem Kern noch die Darstellbarkeit von $f(s)$ durch den zweifach zusammengesetzten Kern $KK(s, t)$ als Bedingung hingestellt; E. Schmidt ist es zuerst in seiner Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1905) gelungen, diese Einschränkung zu beseitigen.

Wert und $\varphi(s)$ eine stetige jener Integralgleichung (40) genügende Funktion, so lehrt diese Integralgleichung, daß $\varphi(s)$ eine in der Gestalt (44) darstellbare Funktion ist; nach dem eben bewiesenen Entwicklungssatze haben wir mithin

$$(45) \quad \varphi(s) = \varphi_1(s) \int_a^b \varphi(s) \varphi_1(s) ds + \varphi_2(s) \int_a^b \varphi(s) \varphi_2(s) ds + \dots$$

Nun finden wir andererseits, indem wir (39) mit $\lambda \varphi(s)$ multiplizieren und nach s integrieren, ferner (40) mit $\lambda_r \varphi_r(s)$ multiplizieren und nach s integrieren und endlich die so entstehenden Gleichungen von einander subtrahieren

$$(\lambda - \lambda_r) \int_a^b \varphi(s) \varphi_r(s) ds = 0$$

d. h. wegen $\lambda \neq \lambda_r$,

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_r(s) ds = 0;$$

und folglich wegen (45)

$$\varphi(s) = 0.$$

Da die oben S. 453 eingeführten Größen k_1, k_2, \dots dem dort angewandten Satze X meiner vierten Mitteilung zufolge notwendig gegen Null konvergieren, so können die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ im Endlichen keine Verdichtungsstelle haben und es kann daher insbesondere jedesmal nur eine endliche Anzahl von gleichem Werte unter ihnen geben. Sei etwa

$$\lambda_r = \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_{r+n-1}$$

und jeder andere Eigenwert von λ_r verschieden, so sind die n linear von einander unabhängigen Funktionen

$$(46) \quad \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_{r+n-1}$$

gewiß Lösungen der homogenen Integralgleichung für $\lambda = \lambda_r$. Es gibt nun für $\lambda = \lambda_r$ auch keine andere Lösung jener Integralgleichung, die nicht eine lineare Kombination der n Lösungen (46) wäre. In der Tat, ist $\varphi(s)$ irgend eine Lösung der Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_r$, so könnten wir wie vorhin den Ansatz (45) machen; das entsprechende Verfahren führt dann zu der Gleichung

$$(\lambda_r - \lambda_r) \int_a^b \varphi(s) \varphi_i(s) ds = 0$$

d. h. es wird

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_i(s) ds = 0$$

für alle Werte von q mit Ausnahme der n Werte

$$q = p, p+1, \dots, p+n-1;$$

damit ist die Behauptung bewiesen.

Was die inhomogene Integralgleichung (25) betrifft, so hat dieselbe nach den allgemeinen Ausführungen im vorigen Abschnitte XIII (S. 451) für jedes von λ_p verschiedene λ eine und nur eine Lösung $\varphi(s)$; für $\lambda = \lambda_p$ jedoch ist sie nur lösbar, wenn $f(s)$ genau n lineare von einander unabhängige Integralbedingungen erfüllt. Nun ergibt sich aber, wenn wir die Gleichung

$$(47) \quad f(s) = \varphi(s) - \lambda_p \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

mit $\varphi_q(s)$ multiplizieren und nach s integrieren

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s) ds = \int_a^b \varphi_q(s) \varphi(s) ds - \lambda_p \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi_q(s) \varphi(t) ds dt$$

und mit Rücksicht auf die Symmetrie von $K(s, t)$ wegen (39), wenn $\varphi_q(s)$ eine der n Funktionen (46) bedeutet:

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s) ds = 0, \quad (q = p, p+1, \dots, p+n-1).$$

Diese n Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend zur Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (47).

Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und die zugehörigen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ sind wesentlich durch den Kern $K(s, t)$ bestimmt; ich habe sie *Eigenwerte* bez. *Eigenfunktionen* des Kerns $K(s, t)$ genannt.

Aus dem Entwicklungssatze folgt wegen

$$\int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds = \frac{1}{\lambda_p} \int_a^b g(t) \varphi_p(t) dt, \quad (p = 1, \dots, n)$$

sofort

$$(48) \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b g(t) \varphi_1(t) dt \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{\lambda_2} \int_a^b g(t) \varphi_2(t) dt \cdot \varphi_2(s) + \dots$$

Besitzt ein Kern $K(s, t)$ nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bricht die Reihe rechts beim n^{ten} Gliede ab und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(t)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n},$$

d. h. $K(s, t)$ *vermag*, wenn man eine der beiden Variablen etwa t als Parameter auffasst und diesem irgend welche konstanten Werte erteilt, *nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variablen s darzustellen*; insbesondere ist gewiß ein *Eigenwert immer vorhanden*, wenn nicht $K(s, t)$ identisch in s, t verschwindet.

Schreibt man in (48) an Stelle von $g(t)$ die willkürliche Funktion $u(t)$, multipliziert diese Formel mit $u(s)$ und integriert nach s , so entsteht

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds dt = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \int_a^b u(t) \varphi_1(t) dt \right\}^2 + \frac{1}{\lambda_2} \left\{ \int_a^b u(t) \varphi_2(t) dt \right\}^2 + \dots$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$J(u) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds dt,$$

$$u_r = \int_a^b u(t) \varphi_r(t) dt,$$

so nimmt jene Formel die Gestalt an

$$J(u) = \frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} + \dots$$

Andererseits haben wir

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = u_1^2 + u_2^2 + \dots$$

und folglich

$$J(u) - \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b (u(s))^2 ds = \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) u_2^2 + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1} \right) u_3^2 + \dots$$

Nehmen wir nun an, daß die Eigenwerte nicht sämtlich negativ seien und bedeutet dann λ_1 den kleinsten positiven Eigenwert, so fällt die rechte Seite dieser Formel gewiß nicht positiv aus; hieraus folgt, daß *der größte Wert, den das Doppelintegral $J(u)$ annimmt, wenn $u(s)$ eine stetige der Bedingung*

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = 1$$

genügende Funktion sein soll, gleich dem reziproken Werte des kleinsten positiven Eigenwertes von $K(s, t)$ ist; dieses Maximum tritt ein, wenn $u(s)$ gleich der zugehörigen Eigenfunktion genommen wird.

Zum Schlusse dieses Abschnittes berühren wir noch die wichtige Frage, unter welchen Umständen die Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$

des Kerns $K(s, t)$ ein *vollständiges* orthogonales Funktionensystem bilden. Wie ich schon in meiner ersten Mitteilung¹⁾ angegeben habe, bilden die *Eigenfunktionen* gewiß dann ein *vollständiges orthogonales Funktionensystem*, wenn der Kern $K(s, t)$ der *orthogonalen Integralgleichung allgemein*²⁾ ist. In der Tat, ist $g(s)$ irgend eine stetige Funktion von s , so gibt es dann eine stetige Funktion $h(s)$, so daß die Ungleichung

$$\int_a^b \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt \right\}^2 ds < \varepsilon$$

gilt; daher wird, indem wir

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots$$

einsetzen, auch

$$\int_a^b \left\{ g(s) - c_1 \varphi_1(s) - c_2 \varphi_2(s) - \dots \right\}^2 ds < \varepsilon.$$

Da die linke Seite durch Subtraktion der positiven Größe

$$\left(c_1 - \int_a^b g(s) \varphi_1(s) ds \right)^2 + \left(c_2 - \int_a^b g(s) \varphi_2(s) ds \right)^2 + \dots$$

sicher nicht vergrößert wird, so folgt leicht

$$\int_a^b (g(s))^2 ds - \left(\int_a^b g(s) \varphi_1(s) ds \right)^2 - \left(\int_a^b g(s) \varphi_2(s) ds \right)^2 - \dots < \varepsilon.$$

Bedenken wir, daß diese Ungleichung für beliebig kleine positive ε gelten muß, so ergibt sich sofort die zu beweisende Vollständigkeits-Relation.

Eine andere Bedingung dafür, daß die Eigenfunktionen von $K(s, t)$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden, ist die Abgeschlossenheit der aus $K(s, t)$ entspringenden quadratischen Form $K(x)$. Man erkennt auch leicht, daß die aus einem allgemeinen Kerne $K(s, t)$ entspringende quadratische Form stets abgeschlossen sein muß, womit die soeben bewiesene Behauptung übereinstimmt.

Wie wir gesehen haben, sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ und deren Eigenschaften von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ wesentlich unabhängig: in der Tat, jede aus $K(s, t)$ unter Vermittelung eines anderen orthogonalen

1) Vgl. meine erste Mitteilung, diese Nachrichten, 1904, S. 78.

2) l. c. S. 75.

vollständigen Funktionensystems entspringende quadratische Form geht aus der quadratischen Form $K(x)$ durch eine orthogonale Transformation der Variablen x_1, x_2, \dots hervor, so daß die neuen Linearformen von den ursprünglichen sich nicht wesentlich unterscheiden.

Ist $\mathfrak{K}(s, t)$ eine nicht symmetrische Funktion der im Intervall a bis b sich bewegenden Variablen s, t und setzt man

$$\begin{aligned} K(s, t) &= 0 && \text{für } a \leq s < b, && a \leq t < b, \\ &= \mathfrak{K}(s, t-b+a) && \text{„ } a \leq s < b, && b \leq t \leq 2b-a, \\ &= \mathfrak{K}(t, s-b+a) && \text{„ } b \leq s \leq 2b-a, && a \leq t < b, \\ &= 0 && \text{„ } b \leq s \leq 2b-a, && b \leq t \leq 2b-a, \end{aligned}$$

so stellt $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion der im Intervall a bis $2b-a$ sich bewegenden Variablen s, t dar. Die Anwendung meiner Theorie auf diesen Kern $K(s, t)$ führt unmittelbar zu den Entwicklungssätzen von E. Schmidt¹⁾, betreffend den unsymmetrischen Kern $\mathfrak{K}(s, t)$.

XV.

Die Theorie der polaren Integralgleichung.

Wenn $k(s)$ irgend eine gegebene Funktion von s bedeutet, so möge allgemein

$$f(s) = k(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt$$

eine *Integralgleichung dritter Art* heißen. Es sei im Folgenden $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion von s, t mit der Eigenschaft eines positiv definiten Kerns d. h., wenn $u(s)$ irgend eine stetige Funktion bedeutet, so möge immer

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)u(s)u(t)dsdt \geq 0$$

ausfallen; ferner setzen wir insbesondere

$$k(s) = V(s),$$

wo $V(s)$ eine Funktion von s bedeutet, die streckenweise abwechselnd die konstanten Werte $+1$ oder -1 und überhaupt keine anderen Werte annimmt und zwar so, daß $V(s)$ wenigstens an einer Stelle innerhalb des Intervalles a bis b und sicher nur an endlich-

1) l. c. § 12—§ 14.

vielen Stellen sein Zeichen ändert; die so entstehende Integralgleichung

$$(49) \quad f(s) = V(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t) dt$$

mit symmetrischem definitem Kern werde der Kürze halber als *polare Integralgleichung* bezeichnet.

Mit Hilfe meiner Theorie der quadratischen Formen unendlichvieler Variabler gelingt es, für die polare Integralgleichung eine analoge Theorie zu entwickeln wie für die orthogonale Integralgleichung. Dabei bedarf es als Bindeglied und zur Vermittelung zwischen Integralgleichung und quadratischer Form irgend eines Systems von unendlichvielen Funktionen

$$\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$$

der Variablen s , die im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetig ev. abteilungsweise stetig mit endlichvielen Sprungstellen an bestimmten Punkten des Intervalles sind und die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die *Polaritäts-Eigenschaft*

$$(50) \quad \begin{aligned} \int_a^b V(s) \Pi_p(s) \Pi_q(s) ds &= 0, & (p \neq q) \\ \int_a^b V(s) (\Pi_p(s))^2 ds &= v_p, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$v_1 = +1, \quad v_2 = -1, \quad v_3 = +1, \quad v_4 = -1, \quad v_5 = +1, \quad \dots$$

gesetzt ist;

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s), v(s)$ der Variablen s

$$\begin{aligned} \int_a^b V(s) u(s) v(s) ds &= v_1 \int_a^b V(s) u(s) \Pi_1(s) ds \int_a^b V(s) v(s) \Pi_1(s) ds \\ &+ v_2 \int_a^b V(s) u(s) \Pi_2(s) ds \int_a^b V(s) v(s) \Pi_2(s) ds + \dots \end{aligned}$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$ als ein *polares vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgend eine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige

Funktion von s , so mögen die Integrale

$$v_1 \int_a^b V(s) u(s) \Pi_1(s) ds, \quad v_2 \int_a^b V(s) u(s) \Pi_2(s) ds, \quad \dots$$

die *Fourier-Koeffizienten* der Funktion $u(s)$ in Bezug auf das polare vollständige Funktionensystem $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$ heißen und mit

$$[u(*)]_1, [u(*)]_2, \dots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$[u(*)]_p = v_p \int_a^b V(s) u(s) \Pi_p(s) ds, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

wird.

Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(51) \quad \int_a^b V(s) u(s) v(s) ds = v_1 [u(*)]_1 [v(*)]_1 + v_2 [u(*)]_2 [v(*)]_2 + \dots$$

Um für das Intervall a bis b ein polares vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, fassen wir einmal die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = +1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ein orthogonales vollständiges Funktionensystem:

$$\Phi_1^{(+)}(s), \Phi_2^{(+)}(s), \dots;$$

sodann fassen wir die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = -1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ebenfalls ein orthogonales vollständiges Funktionensystem

$$\Phi_1^{(-)}(s), \Phi_2^{(-)}(s), \dots$$

Setzen wir nunmehr

$$\begin{aligned} \Pi_1(s) &= \Phi_1^{(+)}(s), \\ \Pi_2(s) &= 0, \\ \Pi_3(s) &= \Phi_2^{(+)}(s), \\ \Pi_4(s) &= 0, \\ \Pi_5(s) &= \Phi_1^{(-)}(s), \\ &\dots \end{aligned}$$

sobald s in einem der ersteren Teilintervalle liegt, und

$$\begin{aligned}\Pi_1(s) &= 0, \\ \Pi_2(s) &= \Phi_1^{(-)}(s), \\ \Pi_3(s) &= 0, \\ \Pi_4(s) &= \Phi_2^{(-)}(s), \\ \Pi_5(s) &= 0, \\ &\vdots\end{aligned}$$

sobald s in einem der letzteren Teilintervalle liegt, so erkennen wir sofort, daß die so definierten Funktionen $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$ sowohl die Polaritäts-Eigenschaft besitzen, als auch die Vollständigkeits-Relation erfüllen.

Wir bilden nun durch Vermittelung des polaren vollständigen Funktionensystems $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$ aus dem Kern $K(s, t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung eine Bilinearform, indem wir analog wie in Abschnitt XIV

$$\begin{aligned}(52) \quad k_q(s) &= [K(s, *)]_q = v_q \int_a^b V(t) K(s, t) \Pi_q(t) dt \\ k_{pq} &= [k_q(*)]_p = v_p v_q \int_a^b V(s) V(t) K(s, t) \Pi_p(s) \Pi_q(t) ds dt\end{aligned}$$

setzen. Wegen der Symmetrie von $K(s, t)$ in s, t haben wir

$$k_{pq} = k_{qp}$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{pq} gebildete Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p y_q$$

eine solche, wie sie aus der quadratischen Form

$$(53) \quad K(x) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p x_q$$

abgeleitet wird.

Nun sind $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \dots$, wie sich unmittelbar aus ihrer Definition ergibt, auch zugleich ein orthogonales vollständiges Funktionensystem für das Intervall a bis b ; für den in dieser Auffassung gebildeten Fourier-Koeffizienten einer Funktion $u(s)$ ergibt sich leicht

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b K(s, t) \Pi_p(t) dt = v_p \int_a^b V(s) K(s, t) \Pi_p(t) dt = [u(*)]_p,$$

und daher sind insbesondere auch k_{pq} als Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$ in Bezug auf ein orthogonales System anzusehen; wir können also genau wie vorhin in Abschnitt XIV (S. 452) schließen, daß $K(x)$ eine stetige Funktion der unendlichvielen Variablen ist.

Uebers dies ist $K(x)$ eine positiv definite Form; denn der n^{te} Abschnitt derselben läßt sich in die Gestalt bringen

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \sum_{(p,q=1,2,\dots,n)} v_p v_q x_p x_q \int_a^b \int_a^b V(s) V(t) K(s,t) \Pi_p(s) \Pi_q(t) ds dt \\ &= \int_a^b \int_a^b K(s,t) P(s) P(t) ds dt, \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$$P(s) = \sum_{(p=1,2,\dots,n)} v_p x_p V(s) \Pi_p(s)$$

gesetzt ist; das letztere Doppelintegral besitzt aber gewiß nicht einen negativen Wert, da $K(s,t)$ nach Voraussetzung ein positiv definiter Kern ist.

In Folge dieser Tatsachen ist die Anwendung des Satzes VIII* meiner vierten Mitteilung (S. 215) auf die Form $K(x)$ und die mit abwechselnden Vorzeichen gebildete Form

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots = x_1^2 - x_2^2 + \dots$$

gestattet, und dieser Satz liefert für jene quadratische Form eine Darstellung

$$(54) \quad K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \dots;$$

darin sind $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... stetige Linearformen, die den Relationen

$$(55) \quad A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_q(\cdot) = 0, \quad (p \neq q)$$

$$(56) \quad A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A_p(\cdot) = \mathfrak{f}_p$$

genügen, wo $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots$, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergente Größen sind. Aus (54), (55), (56) folgt überdies

$$(57) \quad A_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) K(\cdot, x) = \mathfrak{f}_p A_p(x).$$

Aus den obigen Bemerkungen über die orthogonale Natur des Funktionensystems $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s)$, ... folgt auch wie oben (S. 446)

$$\int_a^b (K(s,t))^2 dt = k_1^2(s) + k_2^2(s) + \dots$$

Setzen wir daher

$$A_p(x) = \lambda_{p,1} x_1 + \lambda_{p,2} x_2 + \dots, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

so finden wir analog wie in Abschnitt XIV (S. 454), daß die Reihe

$$(58) \quad A_p(vk(s)) \equiv \lambda_{p,1} v_1 k_1(s) + \lambda_{p,2} v_2 k_2(s) + \dots$$

gleichmäßig konvergiert und also eine stetige Funktion in s bestimmt. Durch Multiplikation mit $v_q V(s) \Pi_q(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (52)

$$[A_p(vk(s))]_q = \lambda_{p1} v_1 k_{q1} + \lambda_{p2} v_2 k_{q2} + \dots$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (57)

$$\lambda_{p1} v_1 k_{q1} + \lambda_{p2} v_2 k_{q2} + \dots = \mathfrak{k}_p \lambda_{pq}$$

und folglich ist

$$(59) \quad [A_p(vk(s))]_q = \mathfrak{k}_p \lambda_{pq}.$$

Ist nun insbesondere $\mathfrak{k}_p = 0$, so folgt aus (59) — da ja nach einer obigen Bemerkung die Größen $[A_p(vk(s))]_q$ auch zugleich Fourier-Koeffizienten in Bezug auf ein orthogonales vollständiges System sind — wie oben (S. 455), daß die Funktion $A_p(vk(s))$ identisch Null ist. Andererseits bezeichnen wir die von Null verschiedenen Größen \mathfrak{k}_p mit π_p ($p = 1, 2, \dots$) und die entsprechenden Linearformen A_p mit A'_p sowie deren Koeffizienten mit $\lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \dots$; setzen wir dann

$$(60) \quad A'_p(vk(s)) = |\pi_p|^{\frac{1}{2}} V(s) \pi_p(s),$$

so sind $\pi_1(s), \pi_2(s), \dots$ abteilungsweise stetige Funktionen von s , für die wegen (59)

$$[V(s) \pi_p(s)]_q = (\pm 1)_p \frac{\lambda'_{pq}}{|\pi_p|^{\frac{1}{2}}}$$

wird, wo $(\pm 1)_p$ den Wert $+1$ oder -1 bedeuten soll, jenachdem π_p positiv oder negativ ist.

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (51)

$$u(s) = V(s) \pi_p(s), \quad v(s) = V(s) \pi_q(s),$$

so lehrt dieselbe

$$\begin{aligned} \int_a^b V(s) \pi_p(s) \pi_q(s) ds &= (\pm 1)_p (\pm 1)_q \frac{1}{|\pi_p \pi_q|^{\frac{1}{2}}} \{v_1 \lambda'_{p1} \lambda'_{q1} + v_2 \lambda'_{p2} \lambda'_{q2} + \dots\} \\ &= (\pm 1)_p (\pm 1)_q \frac{1}{|\pi_p \pi_q|^{\frac{1}{2}}} A'_p(\cdot) V(\cdot, \cdot) A'_q(\cdot) \end{aligned}$$

und folglich wegen (55) und (56)

$$\begin{aligned} \int_a^b V(s) \pi_p(s) \pi_q(s) ds &= 0, & (p \neq q) \\ \int_a^b V(s) (\pi_p(s))^2 ds &= (\pm 1)_p; \end{aligned} \quad (61)$$

wegen des Bestehens dieser Gleichungen sagen wir, daß die Funktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \dots$ ein polares Funktionensystem bilden.

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (51) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = V(t) \pi_p(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (58), (60)

$$(62) \quad \int_a^b K(s, t) \pi_p(t) dt = (\pm 1)_p \frac{1}{|\pi_p|^{\frac{1}{2}}} (v_1 k_1(s) \lambda'_{p1} + v_2 k_2(s) \lambda'_{p2} + \dots) \\ = \pi_p V(s) \pi_p(s),$$

oder wenn wir

$$\lambda_p = \frac{1}{\pi_p}$$

einführen

$$(63) \quad V(s) \pi_p(s) = \lambda_p \int_a^b K(s, t) \pi_p(t) dt;$$

d. h. die zu unserer ursprünglich vorgelegten polaren Integralgleichung (49) gehörige homogene polare Integralgleichung

$$(64) \quad V(s) \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_p$ die wegen (61) gewiß nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(s) = \pi_p(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich der Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des polaren Systems $\pi_1(s), \pi_2(s), \dots$ fortschreitet.

Bei dieser Untersuchung legen wir die aus (54) hervorgehende Identität

$$(65) \quad K(x, y) = A_1(x) A_1(y) + A_2(x) A_2(y) + \dots$$

zu Grunde und wenden auf den hier rechts stehenden Ausdruck die analoge Betrachtung an, wie sie in Abschnitt XIV auf den Ausdruck (41) angewandt worden ist. Wir verstehen dann wiederum unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in die Identität (65)

$$(66) \quad x_p = v_p [V(*) g(*)]_p, \\ y_p = v_p k_p(s) = v_p [K(s, *)]_p$$

ein. Da mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation (51) mit

Hilfe von (52)

$$\begin{aligned} k_{1p} v_1 [V(*)g(*)]_1 + k_{2p} v_2 [V(*)g(*)]_2 + \dots &= \int_a^b k_p(s) g(s) ds \\ &= \left[\int_a^b K(s, *) g(s) ds \right]_p \end{aligned}$$

wird, so bekommt die linke Seite jener Identität (65) nach Einsetzung von (66) den Wert

$$\begin{aligned} v_1 k_1(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_1 + v_2 k_2(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_2 + \dots \\ = \int_a^b \int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) g(t) dr dt. \end{aligned}$$

Andererseits wird bei Heranziehung von (59) und der Vollständigkeits-Relation (51)

$$\begin{aligned} A'_p(v[V(*)g(*)]) &= \lambda'_{p1} v_1 [V(*)g(*)]_1 + \lambda'_{p2} v_2 [V(*)g(*)]_2 + \dots \\ &= \frac{1}{\kappa_p} \int_a^b A'_p(vk(s)) g(s) ds \\ &= \frac{|\kappa_p|^{\frac{1}{2}}}{\kappa_p} \int_a^b V(s) \pi_p(s) g(s) ds. \end{aligned}$$

Folglich geht die rechte Seite jener Identität (65) nach der Substitution (66) mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $A_p(vk(s))$ verschwindet, sobald \mathfrak{f}_p Null ist, und mit Bemerkung von (60) in

$$V(s) \left\{ \kappa_1 |\kappa_1| \int_a^b V(s) \pi_1(s) g(s) ds \cdot \pi_1(s) + \kappa_2 |\kappa_2| \int_a^b V(s) \pi_2(s) g(s) ds \cdot \pi_2(s) + \dots \right\}$$

über. Setzen wir daher

$$\begin{aligned} (67) \quad f(s) &= \int_a^b \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) g(r) dt dr \\ &= \int_a^b V K V K(s, r) g(r) dr, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$V K V K(s, r) = \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) dt$$

gesetzt ist, und setzen wir ferner, indem wir (62) berücksichtigen

$$c_p = (\pm 1)_p \int_a^b f(s) V(s) \pi_p(s) ds = \kappa_p |\kappa_p| \int_a^b V(s) \pi_p(s) g(s) ds,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten der Identität (65) nach

Multiplikation mit $V(s)$ zu der Formel

$$f(s) = c_1 \pi_1(s) + c_2 \pi_2(s) + \dots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. jede durch Vermittelung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt (67) darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Funktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... fortschreitende gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$f(s) = c_1 \pi_1(s) + c_2 \pi_2(s) + \dots,$$

$$c_r = (\pm 1)_r \int_a^b f(s) V(s) \pi_r(s) ds$$

entwickeln.

Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ wachsen, wenn in unendlicher Zahl vorhanden, absolut genommen über alle Grenzen; sie und die zugehörigen polaren Funktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \dots$ sind wesentlich durch $K(s, t)$ und $V(s)$ bestimmt; ich nenne sie die *Eigenwerte* bez. *Eigenfunktionen der polaren Integralgleichung* (49). Den Eigenwerten und Eigenfunktionen einer polaren Integralgleichung kommen die entsprechenden Eigenschaften zu, wie wir sie oben in Abschnitt XIV (S. 457) im Falle der orthogonalen Integralgleichung gefunden haben. Insbesondere erkennen wir durch ganz analoge Betrachtungen, daß die zur polaren Integralgleichung (49) gehörige homogene polare Integralgleichung (64) nur für diese Eigenwerte $\lambda = \lambda_r$ eine nicht verschwindende Lösung besitzt und daß dann die zu λ_r gehörigen polaren Eigenfunktionen bez. deren lineare Kombinationen auch die einzigen Lösungen der homogenen Integralgleichung (64) sind.

Besitzt eine polare Integralgleichung nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so folgt aus dem Entwicklungssatze wegen

$$(\pm 1)_r \int_a^b f(s) V(s) \pi_r(s) ds = \frac{1}{\lambda_r |\lambda_r|} \int_a^b V(s) \pi_r(s) g(s) ds, \quad (p = 1, \dots, n)$$

sofort

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_a^b VKVK(s, r) g(r) dr \\ &= \frac{1}{\lambda_1 |\lambda_1|} \int_a^b V(r) \pi_1(r) g(r) dr \cdot \pi_1(s) + \dots + \frac{1}{\lambda_n |\lambda_n|} \int_a^b V(r) \pi_n(r) g(r) dr \cdot \pi_n(s) \end{aligned}$$

und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(r)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$VKVK(s, t) = V(t) \left\{ \frac{1}{\lambda_1 |\lambda_1|} \pi_1(s) \pi_1(t) + \dots + \frac{1}{\lambda_n |\lambda_n|} \pi_n(s) \pi_n(t) \right\}$$

oder nach Multiplikation mit $V(s)$

$$\int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) dr = V(s) V(t) \left\{ \frac{1}{\lambda_1 |\lambda_1|} \pi_1(s) \pi_1(t) + \dots + \frac{1}{\lambda_n |\lambda_n|} \pi_n(s) \pi_n(t) \right\}$$

d. h. $K(s, t)$ ist eine derartige Funktion von s, t , daß, wenn man die Funktion

$$KVK(s, t) = \int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) dr$$

bildet und darin eine der beiden Variablen, etwa t , als Parameter auffaßt, diese Funktion $KVK(s, t)$ für beliebige t nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variablen darzustellen vermag; insbesondere ist gewiß ein Eigenwert der polaren Integralgleichung immer vorhanden, wenn nicht $KVK(s, t)$ identisch in s, t verschwindet.

Die letzte Aussage gestattet die Umkehrung. In der Tat, verschwindet $KVK(s, t)$ identisch in s, t und besäße dann die homogene polare Integralgleichung (64) für irgend einen Wert von λ eine Lösung $\varphi(s)$, so würde durch Multiplikation derselben mit $K(r, s) V(s)$ und Integration nach s

$$\int_a^b K(r, s) \varphi(s) ds - \lambda \int_a^b KVK(r, t) \varphi(t) dt = 0,$$

mithin

$$\int_a^b K(r, s) \varphi(s) ds = 0$$

und wegen (64)

$$\varphi(s) = 0$$

folgen, d. h. die polare Integralgleichung besitzt gewiß keinen Eigenwert, wenn $KVK(s, t)$ identisch verschwindet.

Nehmen wir beispielsweise das Intervall $a = 0$ bis $b = 1$,

$$V(s) = +1 \quad \text{für} \quad 0 \leq s < \frac{1}{2},$$

$$V(s) = -1 \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1$$

und

$$K(s, t) = K(s + \frac{1}{2}, t) = K(s, t + \frac{1}{2}),$$

so gewinnen wir eine polare Integralgleichung mit nicht verschwindendem Kern $K(s, t)$, die keinen Eigenwert besitzt, da, wie leicht erkannt wird, die Funktion $KVK(s, t)$ identisch verschwindet.

Wird von dem Kern $K(s, t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung vorausgesetzt, daß er ein allgemeiner ist, so läßt sich leicht zeigen, daß, wenn $f(s)$ eine beliebige stetige Funktion und s irgend eine noch so kleine positive Größe bedeutet, stets mittelst

geeigneter Koeffizienten eine solche lineare Kombination $f^*(s)$ aus einer endlichen Anzahl der Eigenfunktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \dots$ gebildet werden kann, daß

$$\int_a^b (f(s) - f^*(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt. Ferner ist dann die quadratische Form $K(x)$ abgeschlossen (S. 461) und wir können daher in der obigen Entwicklung an Stelle des Satzes VIII* meiner vierten Mitteilung den Satz VIII derselben Mitteilung (S. 209) anwenden; wir finden so, daß in diesem Falle die polare Integralgleichung *sowohl unendlichviele positive als auch unendlichviele negative Eigenwerte besitzt*.

Wie man unmittelbar sieht, bleiben die sämtlichen Entwicklungen und Resultate der Abschnitte XIII, XIV, XV gewiß dann gültig, wenn der Kern $K(s, t)$ Singularitäten von niedriger als der $\frac{1}{2}$ ten Ordnung besitzt — in dem Sinne, den ich in Abschnitt VI der ersten Mitteilung (S. 81) festgesetzt habe; denn dann bleibt $(K(s, t))^2$ integrierbar und daher die aus $K(s, t)$ entstehende bilineare bez. quadratische Form stetig.

Daß aber sogar im wesentlichen die absolute Integrabilität des Kerns — wenn dieser bei $s = t$ unendlich wird — für die Gültigkeit der Theorie genügt, werde ich in einer folgenden Mitteilung beweisen; hier sei nur erwähnt, daß dieser Beweis wiederum in der einfachsten Weise mittelst meiner Methode der unendlichvielen Variablen durch eine geringe Modifikation des obigen Verfahrens gelingt, während, wie mir scheint, alle bisher zur Auflösung der Integralgleichungen benutzten Methoden, insbesondere auch die Methode von Fredholm nicht anwendbar ist, da für einen solchen Kern die im Nenner der „Fredholmschen Resolvente“ auftretende Potenzreihe nicht konvergieren muß und auch für keinen der durch Iteration entstehenden Kerne die Konvergenz der entsprechenden Potenzreihe stattzufinden braucht. Um mittelst meiner Methode der unendlichvielen Variablen die Lösung der Integralgleichung in diesem Falle zu erzielen, bedienen wir uns des Satzes, daß die aus einem Kern $K(s, t)$ entspringende Bilinearform mit unendlichvielen Variablen gewiß stetig ausfällt, sobald die Singularität des Kerns von der Art wie $f(s-t)$ ist, wo $f(x)$ eine bei $x = 0$ absolut integrable, sonst stetige Funktion bedeutet. Man hat alsdann zum Beweise nur nötig, diejenige Integralgleichung heranzuziehen, der die Funktion

$$\psi(s) = \int_a^s \varphi(s) ds$$

genügt.

XVI.

Anwendung der Theorie der polaren Integralgleichungen auf Differentialgleichungen und auf Systeme von simultanen Differentialgleichungen.

Die im vorigen Abschnitt XV gefundene Entwicklung willkürlicher Funktionen, die nach polaren Funktionen fortschreiten, bildet eine wesentliche Ergänzung der bekannten Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen; insbesondere kommen in der Theorie der Differentialgleichungen polare Funktionensysteme neben den orthogonalen Systemen zur Anwendung und erweisen sich dann als ein ebenso notwendiges Hilfsmittel, wie die in der Litteratur bisher allein behandelten orthogonalen Funktionensysteme.

So ist bisher in der bekannten Sturm-Liouvilleschen Theorie der Differentialgleichung¹⁾

$$(68) \quad \frac{d\left(p \frac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)u = 0$$

stets die Voraussetzung gemacht worden, daß k eine im betrachteten Intervalle a bis b positive Funktion sei²⁾. Lassen wir diese Voraussetzung fallen und nehmen vielmehr an, daß k eine stetige Funktion sei, die im Intervalle a bis b eine endliche Anzahl von Malen ihr Vorzeichen wechselt, so führt, wenn $q \leq 0$ ausfällt, die in meiner zweiten Mitteilung dargelegte Methode nicht wie dort auf eine orthogonale, sondern auf eine polare Integralgleichung mit definitem Kern und, da dieser Kern überdies allgemein ist, so zeigt die im vorigen Abschnitte XV begründete Theorie, daß die Differentialgleichung (68) nunmehr sowohl für unendlichviele positive, wie für unendlichviele negative Werte des Parameters λ — die sogenannten Eigenwerte — Lösungen besitzt, die den betreffenden homogenen Randbedingungen genügen und die Eigenfunktionen der Differentialgleichung heißen mögen. Diese Eigenfunktionen bilden, von dem Faktor $\sqrt{|k|}$ abgesehen, ein polares Funktionensystem und es folgt der Satz, daß jede viermal stetig differenzierbare Funktion, die in den Randpunkten a, b und den Nullpunkten von k gewisse Bedingungen erfüllt, sich in eine nach jenen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Wir erkennen somit, daß alle wesentlichen Aussagen der Sturm-Liouvilleschen

1) Vergl. meine zweite Mitteilung S. 226.

2) Vgl. indeß Bôcher, Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. IV (1898), pag. 367, wo das die Gleichung $y'' = \varphi(x, \lambda)y$ betreffende Oszillationstheorem bewiesen wird.

Theorie unabhängig von der Voraussetzung des definiten Charakters der Funktion k gültig bleiben, wenn nur die Funktion p den definiten Charakter besitzt und $q \leq 0$ ist.

Die in meiner zweiten Mitteilung (S. 240) gegebene Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + (q + \lambda k)u = 0$$

gestattet nunmehr die entsprechende Erweiterung auf den Fall, daß die stetige Funktion k in einer endlichen Anzahl von regulär begrenzten Teilgebieten innerhalb des Gebietes J verschiedene Vorzeichen besitzt. Wir erkennen wiederum genau auf dem eben angedeuteten Wege, daß diese partielle Differentialgleichung sowohl für unendlichviele positive, wie für unendlichviele negative Werte des Parameters λ der betreffenden homogenen Randbedingung genügende Lösungen besitzt¹⁾, nach denen sich gewiß eine jede viermal stetig differenzierbare Funktion entwickeln läßt, wenn sie auf dem Rande sowie in den Grenzkurven jener Teilgebiete gewisse leicht anzugebenden Bedingungen erfüllt.

Die in meiner zweiten Mitteilung entwickelte Theorie der linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich auch auf Systeme von simultanen linearen Differentialgleichungen ausdehnen. Ich will dies an dem Beispiel des Systems zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Variablen zeigen.

Es seien $u_1(x)$, $u_2(x)$ die zu bestimmenden Funktionen der unabhängigen Variablen x und

$$\begin{aligned} Q(u_1', u_2', u_1, u_2) = & p_{11}(x)u_1'^2 + 2p_{12}(x)u_1'u_2' + p_{22}u_2'^2 \\ & + 2q_{11}(x)u_1'u_1 + 2q_{12}u_1'u_2 + 2q_{21}u_2'u_1 + 2q_{22}u_2'u_2 \\ & + r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2 \end{aligned}$$

ein homogener quadratischer Ausdruck in u_1 , u_2 und den ersten Ableitungen

$$u_1' = \frac{du_1(x)}{dx}, \quad u_2' = \frac{du_2(x)}{dx},$$

dessen Koeffizienten p_{11} , p_{12} , p_{22} , q_{11} , q_{12} , q_{21} , q_{22} , r_{11} , r_{12} , r_{22} gegebene stetige Funktionen von x sind und worin überdies $p_{11}p_{22} - p_{12}^2$ für keinen Wert des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ verschwinden soll.

1) Die Existenz dieser Funktionen für die partielle Differentialgleichung $\Delta u + \lambda k u = 0$ hat bereits M. Mason nach einer von mir herrührenden Methode gezeigt; Journ. de Math. 1904.

Durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals

$$D(u_1, u_2) = \int_a^b Q(u'_1, u'_2, u_1, u_2) dx$$

entsteht das System der zwei linearen Differentialgleichungen

$$(69) \quad L_1(u_1, u_2) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$(70) \quad \begin{aligned} L_1(u) &= L_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial Q}{\partial u'_1} - \frac{\partial Q}{\partial u_1} \right), \\ L_2(u) &= L_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial Q}{\partial u'_2} - \frac{\partial Q}{\partial u_2} \right) \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Bedeutend v_1, v_2 wiederum zwei Funktionen von x , so finden wir durch Anwendung der Produktintegration das Analogon der Greenschen Formel, wie folgt

$$(71) \quad \begin{aligned} \int_a^b \{v_1 L_1(u) - u_1 L_1(v) + v_2 L_2(u) - u_2 L_2(v)\} dx \\ = \frac{1}{2} \left[v_1 \frac{\partial Q}{\partial u'_1} - u_1 \frac{\partial Q}{\partial v'_1} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial u'_2} - u_2 \frac{\partial Q}{\partial v'_2} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Lösungen $u_1(s), u_2(s)$ der Differentialgleichungen (69) homogenen Randbedingungen nach Analogie der von mir in der zweiten Mitteilung (S. 216—217) aufgestellten Bedingungen I—V unterwerfen. Der Kürze halber ziehen wir jedoch hier nur die Forderung des Verschwindens beider Funktionen an den Randpunkten a, b , also die Randbedingungen

$$(72) \quad \begin{aligned} u_1(a) &= 0, & u_1(b) &= 0, \\ u_2(a) &= 0, & u_2(b) &= 0 \end{aligned}$$

in Betracht. Wir nehmen nunmehr an, es gäbe zwei den Parameter ξ enthaltende Systeme von Lösungen der Differentialgleichungen (69)

$$(73) \quad \begin{array}{l|l} u_1 = G_{11}(x, \xi), & u_1 = G_{12}(x, \xi), \\ u_2 = G_{21}(x, \xi), & u_2 = G_{22}(x, \xi) \end{array}$$

von folgender Beschaffenheit:

1. Die vier Funktionen $G_{11}, G_{21}, G_{12}, G_{22}$ sind sämtlich zweimal stetig differenzierbare Funktionen für alle x mit Ausnahme der Stelle $x = \xi$ innerhalb des Intervalles a bis b ; für $x = \xi$

sind jene vier Funktionen vielmehr von der Gestalt

$$\begin{aligned} G_{11}(x, \xi) &= -\frac{1}{2} \pi_{11}(\xi) |x - \xi| + S_{11}(x), & G_{12}(x, \xi) &= -\frac{1}{2} \pi_{12}(\xi) |x - \xi| + S_{12}(x), \\ G_{21}(x, \xi) &= -\frac{1}{2} \pi_{21}(\xi) |x - \xi| + S_{21}(x), & G_{22}(x, \xi) &= -\frac{1}{2} \pi_{22}(\xi) |x - \xi| + S_{22}(x), \end{aligned}$$

wo $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{21}, \pi_{22}$ die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi_{11} p_{11} + \pi_{21} p_{12} &= 1, & \pi_{12} p_{11} + \pi_{22} p_{12} &= 0, \\ \pi_{11} p_{12} + \pi_{21} p_{22} &= 0, & \pi_{12} p_{12} + \pi_{22} p_{22} &= 1 \end{aligned}$$

zu bestimmenden Funktionen des Parameters ξ und $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ stetig differenzierbare Funktionen von x sind.

2. Die beiden Funktionenpaare G_{11}, G_{21} und G_{12}, G_{22} genügen identisch in ξ den Randbedingungen (72).

Das System der vier Funktionen (73) heiße dann *das Greensche System für die Differentialausdrücke L_1, L_2 bei den Randbedingungen* (72).

Setzen wir in der Greenschen Formel (71)

$$\begin{aligned} u_1 &= G_{11}(x, \xi), & v_1 &= G_{11}(x, \xi^*), \\ u_2 &= G_{21}(x, \xi), & v_2 &= G_{21}(x, \xi^*), \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} u_1 &= G_{11}(x, \xi), & v_1 &= G_{12}(x, \xi^*), \\ u_2 &= G_{21}(x, \xi), & v_2 &= G_{22}(x, \xi^*) \end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned} u_1 &= G_{12}(x, \xi), & v_1 &= G_{12}(x, \xi^*), \\ u_2 &= G_{22}(x, \xi), & v_2 &= G_{22}(x, \xi^*), \end{aligned}$$

so finden wir leicht das *Symmetriegesetz des Greenschen Systems der Differentialausdrücke L_1, L_2*

$$\begin{aligned} G_{11}(x, \xi) &= G_{11}(\xi, x), \\ G_{12}(x, \xi) &= G_{21}(\xi, x), \\ G_{22}(x, \xi) &= G_{22}(\xi, x). \end{aligned}$$

Bezeichnen nun $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ gegebene stetige Funktionen der Variablen x und verstehen wir unter $f_1(x), f_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (74) \quad L_1(f_1, f_2) &= -\varphi_1(x), \\ L_2(f_1, f_2) &= -\varphi_2(x), \end{aligned}$$

die durchweg innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar sind und den Randbedingungen (72) genügen, so finden wir mit Hilfe der Greenschen Formel (71) ebenfalls leicht

$$(75) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi) \} d\xi, \\ f_2(x) &= \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi) \} d\xi. \end{aligned}$$

Umgekehrt, die so dargestellten Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ sind Lösungen von (74) und genügen zugleich den Randbedingungen (72).

Wir definieren jetzt folgende Funktion von x bez. x, ξ in dem Intervalle a bis $2b - a$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) && \text{für } a \leq x < b, \\ &= f_2(x - b + a) && \text{„ } b \leq x \leq 2b - a, \\ \varphi(x) &= \varphi_1(x) && \text{„ } a \leq x < b, \\ &= \varphi_2(x - b + a) && \text{„ } b \leq x \leq 2b - a, \\ G(x, \xi) &= G_{11}(x, \xi) && \text{„ } a \leq x < b, \quad a \leq \xi < b, \\ &= G_{12}(x, \xi - b + a) && \text{„ } a \leq x < b, \quad b \leq \xi \leq 2b - a, \\ &= G_{21}(x - b + a, \xi) && \text{„ } b \leq x \leq 2b - a, \quad a \leq \xi < b, \\ &= G_{22}(x - b + a, \xi - b + a) && \text{„ } b \leq x \leq 2b - a, \quad b \leq \xi \leq 2b - a. \end{aligned}$$

Alsdann stellen sich die Integralgleichungen (75) in der Gestalt der einen Integralgleichung dar:

$$(76) \quad f(x) = \int_a^{2b-a} G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Die Funktion $G(x, \xi)$ ist nach dem vorhin aufgestellten Symmetriegesetz symmetrisch in Bezug auf die beiden Variablen x, ξ ; sie stellt überdies einen Kern dar, der, wie wir aus (74) schließen, abgeschlossen und allgemein ist.

Wir betrachten nun die durch Einfügung eines Parameters λ erweiterten simultanen Differentialausdrücke

$$(77) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_1(u_1, u_2) &= L_1(u_1, u_2) + \lambda(k_{11}(x)u_1 + k_{12}(x)u_2), \\ \mathcal{A}_2(u_1, u_2) &= L_2(u_1, u_2) + \lambda(k_{21}(x)u_1 + k_{22}(x)u_2), \end{aligned}$$

wo $k_{11}, k_{12} = k_{21}, k_{22}$ gegebene stetige Funktionen von x sein mögen, deren Determinante $k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ nur in einer endlichen Zahl von Teilintervallen verschiedene Vorzeichen besitzt.

Wir lösen nun die Gleichungen

$$(78) \quad \begin{aligned} v_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2, \\ v_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2, \end{aligned}$$

nach u_1, u_2 auf, wie folgt

$$(79) \quad \begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2, \\ u_2 &= \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 \end{aligned}$$

und bestimmen dann $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ als irgendwelche Funktionen von x derart, daß, wenn

$$(80) \quad \begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11} \varphi_1 + \alpha_{12} \varphi_2, \\ v_2 &= \alpha_{21} \varphi_1 + \alpha_{22} \varphi_2 \end{aligned}$$

gesetzt wird, in φ_1, φ_2 die Identität

$$(81) \quad \kappa_{11} v_1^2 + 2\kappa_{12} v_1 v_2 + \kappa_{22} v_2^2 = V_1(x) \varphi_1^2 + V_2(x) \varphi_2^2$$

besteht, wo $V_1(x), V_2(x)$ Funktionen von x sein sollen, die nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Die Substitution (80) möge ferner die Identität

$$(82) \quad \begin{aligned} &G_{11} v_1(x) v_1(\xi) + G_{12} v_1(x) v_2(\xi) + G_{21} v_2(x) v_1(\xi) + G_{22} v_2(x) v_2(\xi) \\ &= H_{11} \varphi_1(x) \varphi_1(\xi) + H_{12} \varphi_1(x) \varphi_2(\xi) + H_{21} \varphi_2(x) \varphi_1(\xi) + H_{22} \varphi_2(x) \varphi_2(\xi) \end{aligned}$$

liefern, wo $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ Funktionen von x, ξ werden; endlich bezeichne $H(x, \xi)$ diejenige symmetrische Funktion von x, ξ im Intervalle a bis $2b-a$, die aus $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ ebenso gebildet ist, wie vorhin $G(x, \xi)$ aus $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$.

Damit haben wir die Mittel gewonnen zur Erledigung der Frage, ob die homogenen Differentialgleichungen

$$(83) \quad A_1(u_1, u_2) = 0, \quad A_2(u_1, u_2) = 0$$

außer Null Lösungen besitzen, die zugleich den Randbedingungen genügen. In der Tat aus

$$\begin{aligned} L_1(u_1, u_2) &= -\lambda(k_{11}u_1 + k_{12}u_2), \\ L_2(u_1, u_2) &= -\lambda(k_{21}u_1 + k_{22}u_2) \end{aligned}$$

folgt nach (74), (75)

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi) (k_{11}(\xi) u_1(\xi) + k_{12}(\xi) u_2(\xi)) + G_{12}(x, \xi) (k_{21}(\xi) u_1(\xi) + k_{22}(\xi) u_2(\xi)) \} d\xi,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi) (k_{11}(\xi) u_1(\xi) + k_{12}(\xi) u_2(\xi)) + G_{22}(x, \xi) (k_{21}(\xi) u_1(\xi) + k_{22}(\xi) u_2(\xi)) \} d\xi,$$

oder nach Ausführung der Substitution (78)

$$\kappa_{11}(x) v_1(x) + \kappa_{12}(x) v_2(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi) v_1(\xi) + G_{12}(x, \xi) v_2(\xi) \} d\xi,$$

$$\kappa_{21}(x) v_1(x) + \kappa_{22}(x) v_2(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi) v_1(\xi) + G_{22}(x, \xi) v_2(\xi) \} d\xi.$$

Wenden wir endlich auf die Funktionen v_1, v_2 die Substitution (80) an und kombinieren diese Gleichungen entsprechend, so erhalten dieselben unter Zuziehung von (81), (82) die Gestalt

$$V_1(x) \varphi_1(x) = \lambda \int_a^b \{H_{11}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + H_{12}(x, \xi) \varphi_2(\xi)\} d\xi,$$

$$V_2(x) \varphi_2(x) = \lambda \int_a^b \{H_{21}(x, \xi) \varphi_1(\xi) + H_{22}(x, \xi) \varphi_2(\xi)\} d\xi,$$

oder

$$(84) \quad V(x) \varphi(x) - \lambda \int_a^{2b-a} H(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

wo φ, H die festgesetzte Bedeutung haben und $V(x)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} V(x) &= V_1(x), & a \leq x < b, \\ &= V_2(x-b+a), & b \leq x \leq 2b-a \end{aligned}$$

definiert ist.

Aus (84) haben wir zunächst φ zu bestimmen und daraus die Funktionenpaare φ_1, φ_2 , alsdann nach (80) v_1, v_2 und schließlich aus (79) die gesuchten Integrale u_1, u_2 von (83) zu entnehmen. Hinsichtlich des Charakters der Integralgleichung (84) sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $V(x)$ für alle x dasselbe Vorzeichen darstellt oder nicht.

Der erste Fall tritt ein, wenn die quadratische Form

$$k_{11} u_1^2 + 2k_{12} u_1 u_2 + k_{22} u_2^2$$

für alle Argumente x positiv oder negativ definit ausfällt, d. h. wenn für alle x

$$(85) \quad k_{11}(x) k_{22}(x) - k_{12}^2(x) > 0$$

ist. Die Integralgleichung (84) ist dann eine orthogonale und es gibt meiner Theorie zufolge *unendlichviele Werte von λ — die Eigenwerte $\lambda^{(p)}$ —*, für die Lösungen der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare $u_1^{(p)}, u_2^{(p)}$ jenes Differentialgleichungssystems (83)*. Jedes Paar zweimal stetig differenzierbarer, in den Randpunkten verschwindender Funktionen $f_1(x), f_2(x)$ läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln wie folgt

$$f_1(x) = c_1 u_1^{(1)}(x) + c_2 u_1^{(2)}(x) + \dots,$$

$$f_2(x) = c_1 u_2^{(1)}(x) + c_2 u_2^{(2)}(x) + \dots$$

Ist die Bedingung (85) nicht erfüllt, so wird $V(x)$ gewiß beide Werte $+1$ und -1 annehmen. Die Integralgleichung (84) ist dann gewiß eine polare Integralgleichung mit definitem Kern, sobald die quadratische Form $Q(u'_1, u'_2, u_1, u_2)$ für alle Variablenwerte x hinsichtlich der vier Argumente u'_1, u'_2, u_1, u_2 positiv definiten oder negativ definiten Charakter hat. Ist diese Bedingung erfüllt, so findet die in Abschnitt XV entwickelte Theorie der polaren Inte-

gralgleichung Anwendung und wir erkennen, daß es wiederum unendlichviele und zwar sowohl *unendlichviele positive als auch unendlichviele negative Werte von λ — die Eigenwerte —* gibt, für die Lösungen von der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare jenes Differentialgleichungssystems* (83). Jedes Paar viermal stetig differenzierbarer Funktionen, die in Randpunkten und in den Nullstellen von $k_{11}, k_{22}, \dots, k_{nn}^*$ gewissen Bedingungen genügen, läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln.

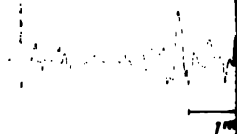
Daß es für die simultanen Differentialgleichungen (69) stets ein Greensches Funktionensystem ev. im erweiterten Sinne (vgl. meine zweite Mitteilung S. 219) gibt, wird in derselben Weise gezeigt, wie im Falle einer einzigen Differentialgleichung.

Eine genau entsprechende Behandlung gestatten die Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen.

Was die Konstruktion Greenscher Funktionen für simultane partielle Differentialausdrücke betrifft, so können wir uns desselben Verfahrens bedienen, das ich in meiner zweiten Mitteilung für einen einzelnen linearen partiellen Differentialausdruck entwickelt habe¹⁾. Dieses Verfahren erfordert aber nicht nur, daß der vorgelegte Differentialausdruck die Normalform besitzt, sondern es setzt auch die Kenntnis der Greenschen Funktion für den Ausdruck Δ voraus — zwei Umstände, die die Verallgemeinerungsfähigkeit des Verfahrens erheblich beeinträchtigen. Es ist daher die Bemerkung von Wichtigkeit, daß bei jenem Verfahren die Eigenschaft der Greenschen Funktion, der Gleichung $\Delta = 0$ zu genügen, gar nicht wesentlich benutzt wird, und daher in demselben die Greensche Funktion sich durch irgend eine Funktion der Variabelnpaare $xy, \xi\eta$ ersetzen läßt, die nur die übrigen für das Verfahren wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzt. Auf diese Weise entsteht ein neues Verfahren, welches, wie mir scheint, eine sehr weite Anwendungsfähigkeit besitzt, indem dasselbe auch zum Ziele führt, wenn die Glieder zweiter Ordnung in den partiellen Differentialgleichungen nicht in der üblichen Normalform vorgelegt sind, ja sogar auch auf Differentialgleichungen erster Ordnung, sowie auf partielle Differentialgleichungen von parabolischem und hyperbolischem Typus mit vollem Erfolge anwendbar ist.

1) Dieses Gött. Nachr. 1904, S. 247—250 dargelegte Verfahren ist dasselbe, dessen sich neuerdings auch É. Picard (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXII, 1906, S. 250—254) zur Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung, die auch erste Ableitungen enthält, bedient hat.

Fig
E. W. 9. VII. 0
DA 6700

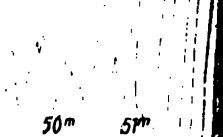


1"



S

K. 05.



50"

5"



Ueber scheinbare und wirkliche Transgressionen.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. Oktober 1906.

Der Ausdruck *Transgression* oder „übergreifende Lagerung“ ist in vielen Fällen angewendet worden, wo, verbunden mit mehr oder minder deutlicher Diskordanz, eine Lücke in der Aufeinanderfolge von Schichten oder Schichtenfolgen vorhanden war, gleichviel in welchem Umfange und in welcher Ausdehnung, fast immer aber ohne weiteres Eingehen auf das Wesen und die Ursache dieser Erscheinung. In vielen Fällen hat jedenfalls die Anschauung vorgewaltet, daß die *Transgression* durch eine weitere räumliche Ausdehnung des betreffenden Meeres bedingt sei, aus welchem die übergreifenden Schichten abgelagert wurden.

Dies mag ja nun häufig genug zutreffen, aber dann sicher nur für einzelne Gegenden, und „allgemeine *Transgressionen*“, wie z. B. die des Cenoman so vielfach bezeichnet wird, scheinen mir doch wenig wahrscheinlich zu sein. Dazu wäre erforderlich, daß der Meeresspiegel allgemein gestiegen wäre, und das würde nur dann denkbar sein, wenn die Meere durchschnittlich weniger tief geworden wären, also der Boden besonders der tieferen Meere sich gehoben hätte. Dies würde aber unseren Anschauungen über die ganze Erdgeschichte wenig entsprechen; wissen wir doch, daß im Laufe der Zeiten die Gebirge immer höher emporgeschoben worden sind, und die Meere dürften entsprechend tiefer geworden sein. Viel eher dürfte anzunehmen sein, daß ein Vorrücken des Meeres in einer Gegend mindestens mit dem Zurückweichen desselben in einer anderen in ursächlichem Zusammenhange stände, daß also eine *Oscillation* oder *Undulation* der Erdoberfläche erfolgt wäre,

wie sie auch jetzt noch an einzelnen Küsten Statt findet oder in ziemlich jungen Zeiten Statt gefunden hat. Es dürfte für manche sogenannte Transgressionen aber vor Allem Folgendes in Betracht zu ziehen sein.

Alles Material, das vom Meere sowie von Flüssen etc. abgelagert wird und früher abgelagert worden ist, muß von anderen Stellen fortgeführt worden sein durch Abrasion, Abspülung oder Erosion, oder mit anderen Worten: Jede Ablagerung von Gesteinen bedingt eine Abtragung von solchen an mehr oder minder entfernten Stellen.

Die Abtragung kann aber mehr oder minder lange Zeit Statt finden und hat dann eine Lücke in der Schichtenreihe im Gefolge. Dasselbe ist aber auch da schon der Fall, wo vielfach wechselnd Abtragung und Ablagerung annähernd gleich stark sind, wie ja an einzelnen Küsten bei Seewind das Meer stark abspült, bei Landwind aber wieder anlagert; auch Meeresströmungen mögen hierbei mitwirken. Auf solche Weise dürften gelegentliche Lücken in den Jurabildungen Englands entstanden sein, wie sie von Buckmann, Blake etc. beschrieben worden sind, und auch im nord-deutschen Jura fehlt dergleichen keineswegs. So fand schon Denckmann (Geognost. Verhältnisse von Dörnten S. 16), daß die Phosphorite des oberen Lias bei Dörnten „bereits auf sekundärer Lagerstätte ruhen“, und führte dies weiter aus (Studien im deutschen Lias, Jahrb. Geol. Landesanstalt für 1892 S. 98), indem er zeigte, daß bei Salzgitter zwischen den eigentlichen Posidonienschiefern des Lias und der Phosphoritzone mit der Fauna der Jurensis-Zone nur stellenweise die Dörntener Schiefer und die Schichten mit *Harp. dispansum* und *Lyt. Germaini* noch vorhanden sind. Vor einigen Jahren wurden ferner bei einem Hausbau in Wenzen (südlich der Hilsmulde) die Kalkbänke mit *Aegoceras capricornu*, *Lyt. fimbriatum* etc. aufgeschlossen und enthielten zum Theil grobe Konglomerate mit Geröllen von Nuß- bis Ei-Größe, so daß hier in der Nähe festere Gesteine abgetragen worden sein müssen.

Südlich von Gerzen bei Alfeld liegen in einer großen Thongrube die untersten Coronatenschichten direkt auf etwas steiler einfallenden Posidonienschiefern des Lias, und wenn man hier auch an eine Ueberschiebung denken könnte, so spricht dagegen doch das Auftreten einer Bank mit zahlreichen *Ostrea explanata* und *Perna isognomoïdes* etc., von welchen einzelne Klappen in der Regel sehr stark abgerollt sind. Die hier fehlenden Schichten des unteren braunen Jura (α und β Quenstedt's) und wohl auch des obersten Lias sind aber nur 1,8 Kilometer weiter nach Nordwesten

in einer Thongrube südlich von Warzen vorhanden, obschon eine dünne Kalkbank mit abgerollten Phosphoritknollen und Belemnitenbruchstücken, anscheinend in den Concavus-Schichten, auch hier auf eine Lücke schließen läßt, vielleicht auch in den eigentlichen Murchisonae-Schichten.

Es sei hier auch daran erinnert, daß weiter nördlich die Schichten mit *Avicula echinata* Kalksandsteine oder eisenschüssige Sandsteine enthalten, daß ferner, wie schon Roemer zeigte, solche Gesteine in den unteren Makrocephalenschichten nur in der Nähe der Porta auftreten, und die Kimmeridge-Kalke und Mergel von dort nach Westen durch Sandsteine vertreten werden. (Vgl. auch Schlunck, die Jurabildungen der Weserkette zwischen Lübbecke und Preußisch-Oldendorf). Ebenso wurde Sandstein in den Amm. Gigas-Schichten von Mestwerdt (Teutoburger Wald zwischen Borgholzhausen und Hilter) beschrieben aus der Gegend von Borgholzhausen, und recht grobe Sande von zerriebenen Muschelschalen finden sich darin auf dem Kahlberge bei Echte. Es sind dies jedenfalls Flachwasser-Bildungen an Stelle der sonst auftretenden Kalke und Thone.

Der Serpulit ist ferner in seinem unteren Theile oft ein wahres Konglomerat von Muschelschalen, Gesteinsbrocken und Knäueln von *Serpula coacervata*, und Stille beschrieb im vorigen Jahre von Bielefeld einen Serpulit, der fast ausschließlich aus Eigrößen Trochitenkalk-Geröllen besteht, und diese müssen aus dem Gebiet herkommen, welches heute die westfälische Kreidemulde einnimmt, da sonst überall die Jurabildungen gleichmäßig übereinander folgen. Stille berechnete die dort entstandene Niveaudifferenz zwischen dem Serpulit und dem Ursprung der Gerölle mit Recht auf über 1000 m. (Zeitschr. d. Deutschen Geolog. Ges. Bd. 57, Protokolle S. 167. Siehe auch Stille, Zur Kenntniß der Dislokationen, Schichtenabtragungen und Transgressionen im jüngsten Jura und in der Kreide Westfalens, Jahrb. kgl. preuß. geolog. Landesanstalt für 1905 S. 103 und Ueber präkretacische Schichtenverschiebungen im älteren Mesozoikum des Egge-Gebirges, Jahrb. d. geol. Landesanst. f. 1902 S. 296).

Es hat sich aber während der ganzen älteren Kreidezeit eine Anschwellung in der von Stille bezeichneten Gegend südwestlich parallel dem Teutoburger Walde befunden, welche, soweit dies eben bekannt ist, die südwestliche Grenze der Unteren Kreide incl. des Wälderthons bildet, wie dies auch Stille weiter nachwies, und die Arbeiten von E. Meyer, Mestwerdt und André haben gezeigt, daß im Teutoburger Walde von Bielefeld bis in die Gegend

von Osnabrück das Valanginien, Hauterivien, Barrémien und Aptien ebenso wie das untere Albien (Gault) wesentlich durch mehr oder minder grobkörnige Sandsteine, oft mit Quarz-Geröllen, vertreten sind, also durch Flachwasserbildungen, wohl aus der Nähe des Ufers, während weiter nach Norden und Osten auf die Jura-bildungen der Weserkette incl. des Wiehengebirges gleichmäßig Wälderthon und Thone der ganzen unteren Kreide folgen. Am Süntel bei Hameln und am Osterwald ist wieder eine Lücke zwischen Jura und Wälderthon vorhanden, und die Sandsteine des letzteren sind zum Theil reich an größeren Geröllen, besonders von Milchquarz, aber es folgt darüber die Thon-Facies der unteren Kreide.

Auf der Nord- und Nordostseite der südlich vom Osterwald liegenden Hilsmulde ist, abgesehen von streichenden Verwerfungen, über der Schichtenfolge des oberen Jura der Purbeck und Wälderthon regelmäßig aufgelagert, doch treten die Sandsteine des Letzteren sehr zurück und verschwinden nach Süden ganz, und die Purbeck-Kalke und Mergel mit den bezeichnenden Fossilien wurden durch Koert in der ganzen Erstreckung in bedeutender Mächtigkeit über dem Serpulit und unter dem Wälderthon nachgewiesen. Dieser nimmt aber nach Süden hin erheblich an Mächtigkeit ab, wie sich trotz des Mangels an Aufschlüssen erkennen ließ. In allerneuester Zeit war aber am Südende des Hils, am Hollingskopf ein kleinerer Aufschluß gemacht worden, in welchem auf den obersten Kalken des Purbeck ganz konkordant schiefrige Thone der unteren Kreide lagen mit *Belemnites subquadratus* aut., Bruchstücken von *Exogyra Couloni* und von *Hoplitides Arnoldi* Pictet, einer Art des obersten Valanginien. Es fehlt hier also der ganze Wälderthon und der größte Theil des Valanginien, welches im Uebrigen im Gebiete der Hilsmulde überhaupt noch nicht mit Sicherheit unter dem Hauterivien nachgewiesen werden konnte. Daß hier nicht bloß eine Lücke, sondern eine Transgression in dem oben angeführten Sinne vorläge, ist allermindestens sehr zweifelhaft. Das Aptien ist an der Hilsmulde noch durch Thone vertreten, das untere Albien, wie bekannt, durch den Hilssandstein, das obere durch wenig mächtige „Minimusthone“ und Flammenmergel.

Nur wenige hundert Meter südlich vom Hollingskopf schneidet die oberen Jurabildungen und die Purbeckkalke eine Verwerfung von bedeutender Sprunghöhe und gegen 6 Kilometer seitlicher Verschiebung der Schichten ab, welche weither von Südosten kommt, aber an dem Hilssandstein verschwindet, wie ich schon

bei anderer Gelegenheit ausgeführt habe. An dem großen Tunnel von Naänsen legt sie braunen Jura neben Muschelkalk (abgesehen von einer Kluftausfüllung von Gypskeuper), bei Stroit die Mürder Mergel neben Amaltheenthon, und nahe dem Hollingskopf die Purbeck-Schichten neben Ornatenthon, über welchem dann die Thone der unteren Kreide folgen, so daß Hersumer Schichten, Korallenoolith, Kimmeridge, A. Gigas-Schichten, Einbeckhäuser Plattenkalk, Mürder Mergel, Serpulit und Purbeck hier fehlen, während sie nördlich von der Verwerfung in voller Mächtigkeit vorhanden sind und von da an, wo der Hilskamm anfängt sich mehr nach Norden umzubiegen, bis zu seiner nordwestlichen Ecke allmählich wieder unter dem Hilsthon und Hilssandstein hervorkommen, so daß schließlich in der Weenzer Forst der Wälderthon auf weite Erstreckung ganz gleichmäßig unter den Thonen der unteren Kreide liegt, von denen als ältestes Glied freilich nur Unteres Hauterivien mit *Hoplites noricus* nachgewiesen werden konnte.

Die erwähnte Hauptverwerfung muß sich also in eine Anzahl kleinerer Störungen von geringer Sprunghöhe aufgelöst haben, welche theils an den Querbrüchen, welche bei Holzen den Hilskamm durchsetzen, abspringen, theils auch wohl weiter fortsetzen, aber nur zum kleinsten Theile sich nachweisen lassen, zumal in den mit Sandstein-Schutt bedeckten und mit Wald bewachsenen Wälderthonschichten der Weenzer Forst.

Nach den erwähnten, von Stille im Gebiete des Tentoburger Waldes erlangten Resultaten würde nun vielleicht die Annahme nahe liegen, daß es sich auch am Hils um vor-kretacische Störungen und nachfolgende Abtragung der festen Schichten des oberen Jura handle, wo diese eben fehlen, aber da auch die Purbeckschichten von der Verwerfung abgeschnitten werden, so müßte die Verwerfung und die nachfolgende Abtragung noch jünger sein, aber immerhin älter als die Schichten mit *Hoplites noricus* (Unteres Hauterivien). Nun würden Stilles Darlegungen ja eine durchaus befriedigende Erklärung liefern — abgesehen von späterer Aufbiegung der Flügel — für die Lage der unteren Kreide auf mittlerem oder oberem Lias oder auch unterstem braunem Jura rings um die Sackberge — („Gronauer Kreidemulde“), wie ich den „Sackwald“, die „Siebenberge“ und die „Hinteren Berge“ zusammenfassend nennen möchte, in deren Mitte ja das Dorf Sack liegt, — wenn man annimmt, daß einer der im Leinethal verlaufenden Brüche schon zur ältesten Kreidezeit entstanden ist. Zwischen diesem Gebiete und dem südlichen Hilsrande ist aber der ganze obere Jura des hohen Selter noch erhalten, und es müßte daher für den

südlichen Hils ein besonderes Abtragungsgebiet angenommen werden, welches den nordwestlich sich anschließenden Ith nicht berührt hätte, dessen Zusammenhang mit den erwähnten, nördlich und westlich liegenden, jedenfalls sehr viel weiter entfernten Abtragungs-Gebieten aber nicht nachzuweisen ist.

Andrerseits liegt in der Hilsmulde im weiteren Sinne, am Weenzer Gypsbruch heller Quarzsand, vermuthlich des Miocän, eingesunken neben dem Gyps und dessen Decke von Wälderthon und Thonen der unteren Kreide (Hauterivien-Aptien), und nordöstlich des Selter bei Freden liegen in der Sattelspalte sowohl Hauterivien und Albien, (Hilssandstein und Flammenmergel) als auch marines Oberoligocän und Quarzsande eingesunken, welche im Uebrigen auf der Abrasions-Hochfläche der nördlichen Sackberge noch an ein Paar Stellen erhalten sind und auch sonst normal auf Hochflächen liegen. Südwestlich des Ith, westlich Eschershausen sind aber, ebenfalls tief eingesunken, wiederum in einzelnen Schollen das ganze marine Oligocän und miocäne Quarzsande erhalten.

Für gewaltige Pressungen liefern den Beweis aber unter Anderen die Salzlager der Grube Hohenzollern bei Freden, der z. T. steil aufgerichtete oder selbst überkippte Wellenkalk westlich von Alfeld und Anderes mehr, und diese Störungen sind somit allermindestens theilweise jung-tertiären Alters gleich denen, die in der Rhön und in Thüringen etc. auftreten.

Das Verschwinden der oben erwähnten Hauptverwerfung bei Stroit an dem Hilssandstein habe ich daher darauf zurückgeführt, daß sie unter denselben läuft, indem er sich seitlich, nach Süden, darüber schiebt, was ja durch seine Unterlage von plastischem Hilsthon wesentlich erleichtert werden mußte. In dieser Annahme bin ich aber bestärkt worden durch einen Aufschluß im Tagebau der „englischen“ Asphaltgrube am Wintjenberg bei Holzen, wo beim Abräumen des Neokom es sich zeigte, daß darunter etwa 10 cm schwarzer Schwefelkies-Mulm und dann die dickbankigen, mit Asphalt imprägnirten Pteroceras-Schichten folgten. Diese waren aber nicht nur an ihrer Oberfläche mit Rutschflächen (Harnischen) bedeckt, sondern enthielten in ihrer obersten Lage solche in Gestalt von „Ablösungen“ ganz unabhängig von der Schichtung, wie ich dergleichen in ungestörtem Gebirge nicht kenne, wohl aber an Haupt-Verwerfungen oder in deren Nachbarschaft. Ich muß daher annehmen, daß Derartiges auch hier vorliegt, und, da es sich um Verschiebung auf den Schichtflächen handelt, somit eine „Ueberschiebung“. Zudem fehlten auf der Oberfläche des Kalkes aufge-

wachsene Austern, Serpulen etc., wie sie sonst so häufig besonders an der Basis unserer Neokomschichten sich finden, und das über dem Schwefelkiesmulm zunächst folgende, fast 1 m mächtige Lager von mürbem Brauneisenstein mit zahlreichen Bohnerzkrörnchen, mit *Hoplites noricus*, *Exogyra Couloni*, *Belemnites subquadratus* etc. war keineswegs ungestört, sondern stellenweise mit kalkig-thönigen Massen vermengt.

Zudem finden sich auch auf der Innenseite des Ith und des Selter eine Reihe von Verwerfungen, welche als Ueberschiebungen bezeichnet werden können und bei der Empor-Pressung der Kalk-Kämme des oberen Jura entstanden sein dürften. Besonders auffällig sind Abbrüche des Korallenoolith nach dem Einfallen zu, so daß auf die mehr oder minder geneigte Schichten-Hochfläche ein steiler Absturz folgt. Als einfache Verwerfung war mir schon länger der südwestliche Abbruch des Bockshorn (S.O. Salzhemmen-dorf) bekannt, da gegen 50 m tiefer mit entgegengesetztem Ein-fallen bei Eggersen Einbeckhäuser Plattenkalke liegen, während am Katzenbrink N. Lauenstein der Steilhang größtentheils unten mit Lehm bedeckt ist, aber Einbeckhäuser Plattenkalk mit dem gleichen Einfallen wie der Korallenoolith enthält, und am Dorn-brink der Gegenflügel der Synklinale mit *A. gigas*-Schichten folgt. Ebenso bricht der Ith zwischen Wallensen und Dohnsen auf 2 Kilometer Länge nach Nordosten um vieles steiler ab, als das Einfallen der Schichten beträgt; der etwas flachere, untere Hang ist auf ca. 300 m mit Lehm bedeckt, aber es folgen dann mit dem gleichen Einfallen nach Nordosten die *A. gigas*-Schichten und die Einbeckhäuser Plattenkalke, so daß hier der ganze Kimmeridge fehlt. Nachdem dies festgestellt war, habe ich aber, nachdem die geologische Karte Blatt Alfeld bereits gedruckt war, mich über-zeugt, daß auch an dem Steinberg genannten Theil des Selter (N.O. Delligsen) der Korallenoolith noch innerhalb des Waldes abgebrochen ist, und die darunter folgenden, meist von Ab-hangsschutt und Diluvium bedeckten grauen Mergel dürften dann nicht dem unteren Kimmeridge, sondern den oberen Münster-Mer-geln zuzurechnen sein, und auffällige, in unebenen Platten ab-gesonderte, oolithische Kalke, welche in einem kleinen, seit langen Jahren verlassenen Steinbruche im Felde N.O. Delligsen gewonnen wurden, sind zum Serpulit zu rechnen, in welchem ich vor kurzem nördlich von Weenzen ähnliche Gesteine auffand. Hier fehlen also der ganze Kimmeridge, die *A. gigas*-Schichten, Einbeckhäuser Plattenkalke und wohl auch ein Theil der Münster Mergel.

Diese Störungen sind also als Ueberschiebungen anzusehen,

aber nicht etwa als Transgressionen, und das Gleiche möchte ich annehmen in den häufigen Fällen, wo oberer Muschelkalk durch Gypskeuper abgeschnitten wird, und dieser durch Jura, so daß er nur eine Art Kluftausfüllung bildet, so recht oft in der Einbeck-Markoldendorfer Mulde, rings um die Sackberge, am Südhang des Hildesheimer Waldes etc.

Von der Abtragung der Jurabildungen unter der Kreide der Sackberge dürften zum Theil die grobstückigen, konglomeratischen Eisensteine östlich von Dörnten, zwischen Goslar und Salzgitter, herkommen, welche *Exogyra Couloni* und *Pecten crassitesta* enthalten, Formen der unteren Kreide von großer horizontaler und vertikaler Verbreitung, während die weiter nördlich bei Salzgitter etc. auftretenden Lager von feinkörnigen Bohnerzen Ammonoiten enthalten und hiernach recht verschiedenen Zonen des Oberen Valanginien, Hauterivien und Barrémien, ja wohl auch des Aptien angehören; die Abtragung hat hier also fast bis zum Ende der Unteren Kreide gedauert. Westlich von Langelsheim liegt aber der „Hilssandstein“ (Albien oder Gault) unmittelbar auf Posidonien-schiefer des Lias, und es erscheint mir sehr fraglich, ob dies eine „übergreifende Lagerung“ in dem von mir angedeuteten Sinne ist, zumal da weiter nach Osten, bei Oker etc. das Hilskonglomerat oft Bruchstücke von Ammoniten aus recht verschiedenen Zonen der Juraformation enthält, und bei Quedlinburg etc. unter dem Gault-Sandstein wieder ältere Schichten der unteren Kreide durch oft grobe Sandsteine, den Neokomsandstein von Dames, vertreten sind, also ähnlich wie am Teutoburger Walde durch eine Flachwasserbildung, und auch hier bilden diese Sandsteine die südliche Verbreitungsgrenze der unteren Kreide.

Wirklich übergreifend liegt dann der Cenomanpläner südlich vom Harz im Ohmgebirge, nördlich von Worbis, wo er ähnliche Gesteine und dieselben Fossilien enthält wie nördlich vom Harz, am Teutoburger Walde etc., und auch am Nordrande der paläozoischen Schichten Westfalens liegt das Cenoman wohl übergreifend auf ihnen. Es ist aber hervorzuheben, daß weiter nach Westen die Grünsand-Facies (*Tourtia*) im unteren Theil des Cenoman immer höher hinaufreicht und endlich in der Gegend von Mons, bei Montignies, durch eine Strandbildung, eine Konglomeratbank mit reicher Fauna vertreten wird. Am nördlichen Harzrande sind in der jüngsten Kreidezeit dann wieder verschiedene Niveauveränderungen erfolgt, wohl verbunden mit wechselnden Strömungen, so daß bald feinere, bald gröbere Sedimente (Heimburg-Gesteine, Sudmerberg-Konglomerate) abgelagert wurden, deren Gliederung G. Müller in

seiner Arbeit über die obere Kreide am nördlichen Harzrande durchführte. Hier dürfte denn auch stellenweise Abtragung und Ablagerung abgewechselt haben, so daß Lücken in der Schichtenfolge entstanden, die nicht auf Transgressionen zurückzuführen wären, und dasselbe gilt wohl auch für etwas weiter nördlich bekannte Verhältnisse, wie namentlich die konglomeratischen Eisensteine des Unter-Senon von Ilsede, in welchen recht häufig abgerollte Ammoniten des unteren und oberen Albien vorkommen, wie sie in geringer Entfernung auch noch in anstehenden Thonen des Albien zu finden sind, während schon bei Braunschweig statt der Eisensteine Thone auftreten, die für Ziegeleien ausgebeutet werden, so daß es sich bei Ilsede um eine ziemlich beschränkte Abtragung und Wiederablagerung von Material handelt.

Wirklich übergreifend liegt aber ferner bei uns das marine Unteroligocän, da das marine Mittel- und Ober-Eocän überhaupt zu fehlen scheint, und vor allem das Mittel-Oligocän, welches besonders nach Süden eine weit größere Verbreitung besitzt und bis an die Alpen bekannt ist, während das Unter-Oligocän im Mainzer Becken fehlt und nur bis zur Breite von Eschershausen-Kreiensen bisher beobachtet worden ist.

Messungen des Ionengehaltes und der Radioaktivität der Luft auf dem Großen Ozean.

Von

F. Linke.

Vorgelegt von Herrn Wagner in der Sitzung vom 27. October 1906.

Auf der Reise von Deutschland über Amerika im Dezember 1904 nach Samoa hatte ich beabsichtigt, sowohl auf dem Atlantischen Ozean, als auch auf dem Großen Ozean luftelektrische Messungen zu veranstalten. Auf ersterem wurde diese Absicht durch außergewöhnlich stürmisches Wetter vereitelt und auch im Stillen Ozean konnte ich infolge von Zollschwierigkeiten (die Apparate waren durch Amerika unter Zollverschluß gesandt und wurden erst nach Verlassen von Honolulu ausgeliefert) erst südlich von Hawaii beginnen.

Da stellte es sich denn heraus, daß der Gerdienische Ionenzähler etwas gelitten hatte; das kleine Elektrometer und die variable Capacität waren momentan unbrauchbar, da ich zum Einziehen neuer Blättchen und Herstellung der Isolation nicht die nötige Ruhe auf dem rollenden Schiffe fand. Die Beweglichkeitsmessungen der Ionen unterblieben also. Auch am großen Elektrometer war nur ein Aluminiumblättchen brauchbar, weshalb die Werte eine kleine Unsicherheit der Aichung haben, die aber nicht sehr ins Gewicht fallen dürfte.

Die Messungen geschahen auf dem hintern Promenadendeck auf der Leeseite. Spritzwasser war nicht in der Nähe, die Brandung am Schiffskörper mäßig. Immerhin waren die Apparate nach der Messung mit feinem Salzdunst überzogen. Zur Messung der Radioaktivität dienten Apparate von Günther und Tegetmeyer (Braunschweig) nach Elster und Geitels Angaben, zur Messung des Ionengehaltes der Luft Apparate von Spindler und Hoyer

nach H. Gerdiens Angaben. Die Zerstreungsmessung mit dem aktivierten Drahte begann stets 5 Minuten nach Abnahme des Drahtes.

Messung am 10. Dez. 1904 zwischen 2 und 5 p. Ort: $\varphi = 9^\circ$ nördl., $\lambda = 163^\circ$ westl. v. Gr. Wetter: starker Nordostpassat, halbbedeckt, Cumulus und Altostratus (Wogen).

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.26 cgs im Cubikmeter.

" " " " negativen " : 0.30 " " "

Aktivierungszahl $A = 4.4$ nach zweistündiger Exposition auf durchschnittlich -1900 Volt.

Messung am 11. Dez. 1904 zwischen $9\frac{1}{2}$ bis $11\frac{1}{2}$ a. Ort: $\varphi = 6^\circ$ nördl., $\lambda = 164^\circ$ westl. v. Gr. Wetter: wie gestern, doch stärkerer Wind, etwas Spritzwasser.

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.13 cgs im Cubikmeter.

" " " " negativen " : 0.09 " " "

Zwischen $1\frac{3}{4}$ und $4\frac{1}{4}$ nachmittags. Einige kurze Regenschauer mit Donner. Aktivierungszahl $A = 3.1$ nach zweistündiger Exposition auf durchschnittlich -1800 Volt.

Messung am 12. Dez. 1904 zwischen $7\frac{3}{4}$ und 11 a. Ort: $\varphi = 0^\circ$ nördl., $\lambda = 166^\circ$ westl. v. Gr. Wetter: wolkg, schwächerer Wind, regendrohend.

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.22 cgs im Cubikmeter.

" " " " negativen " : 0.22 " " "

Nach Vorübergang einer schweren Regenböe, die gewaltige Wassermengen herabsandte:

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.27 cgs im Cubikmeter.

" " " " negativen " : 0.16 " " "

" " " " negativen " : 0.14 " " "

" " " " positiven " : 0.22 " " "

Zwischen $1\frac{1}{4}$ und 4 p. Klares trockenes Wetter; Cumulus, Altostratus, schwacher Wind. Aktivierungszahl $A = 1.1$ nach zweistündiger Exposition auf durchschnittlich -1900 Volt.

Messung am 13. Dez. 1904 zwischen $7\frac{1}{4}$ und $9\frac{1}{2}$ a. Ort: $\varphi = 5^\circ$ südl., $\lambda = 168^\circ$ westl. v. Gr. Wetter: zuerst wolkg, dann aufklärend, fast windstill.

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.26 cgs im Cubikmeter.

" " " " negativen " : 0.15 " " "

Aktivierungszahl $A = 0.9$ nach zweistündiger Exposition auf durchschnittlich -1850 Volt.

•
492 F. Linke, Messungen des Ionengehaltes und der Radioaktivität.

Messung am 14. Dez. 1904 zwischen 9 und 10 a. Ort:
 $\varphi = 11^\circ$ südl., $\lambda = 170^\circ$ westl. v. Gr. Wetter: mäßig klar,
wolkig, fast windstill.

Gehalt der Luft an positiven Ionen: 0.17 cgs im Cubikmeter.

„ „ „ „ negativen „ : 0.22 „ „ „

Samoa-Observatorium Apia, den 10. April 1906.

Meteorologische Drachenaufstiege in Samoa.

Von

F. Linke.

Vorgelegt von Herrn Wagner in der Sitzung vom 27. October 1906.

Bei der Einrichtung des Samoa-Observatoriums der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, das im Jahre 1902 vom ersten Observator Herrn Dr. Tetens auf der Halbinsel Mulinnu dicht bei Apia erbaut ist, wurden auch Drachenexperimente mit in den Arbeitsplan aufgenommen. Herr Professor Köppen, Hamburg hatte die Freundlichkeit die Ausrüstung zu übernehmen, bei der die besondere Schwierigkeit bestand, daß ein sehr kleiner Etat nicht überschritten werden durfte. Die Ausrüstung besteht zur Zeit aus:

Drachenwinde (mit Handbetrieb) von Fr. Filler nach Angabe von W. Köppen¹⁾,

2 Drachenmeteorographen mit Anemometer nach Professor Marvin,

Draht von Felten & Guilleaume, Carlswerk, Mülheim a./Rh.,

3 verschiedenen Malay-Drachen von W. Köppen,

4 Diamant-Drachen von W. Köppen,

4 zerlegbaren Kastendrachen von E. Wiechert, Göttingen,

2 Pendel-Quadranten nach W. Köppen,

1 Rolle zum Einholen nach W. Köppen,

Kauschen und Verbindungsklemme.

Die Einweihung des Unterzeichneten in der Handhabung der Drachen unternahm bereitwilligst ebenfalls Herr Professor Köppen, dessen außerordentlich anschaulicher und belehrender Bericht von

1) W. Köppen, A. d. Arch. d. D. Seew. 1901. No. 1. Tafel IV, Figur IX.

1902 das hinzusetzte, was die nur zweitägige Instruktion in Hamburg nicht vermochte.

Infolge der Ueberlastung mit magnetischen, seismischen und meteorologischen Arbeiten und des Mangels an erfahrenen Hilfskräften konnten mehr als Vorversuche von Herrn Dr. Tetens nicht angestellt werden, und auch im ersten Jahre meiner Tätigkeit am Samoa-Observatorium kam kein Aufstieg mit Registrier-Apparat zustande.

Als jedoch nach Aufhören der Regenzeit Ende Mai 1906 der gleichmäßige Südostpassat einsetzte, begann eine Periode der Drachenexperimente, über deren Resultate hier ein vorläufiger Bericht gegeben werden soll.

Es war nicht meine Aufgabe technische Neuerungen einzuführen, dazu fehlte durchaus die Zeit. Unter Benutzung der Erfahrungen und theoretischen Erwägungen anderer, besonders W. Köppens sollte mit möglichst geringem Zeit- und Arbeitsaufwand einige Nachrichten über die meteorologischen Eigenschaften höherer Luftschichten im Tropengebiet des Stillen Ozeans gewonnen werden.

Als Aufstellungsort wurde eine Stelle auf der Halbinsel Mulinuu gewählt, an welcher der hier an der Nordseite der Insel Upolu als Ostwind auftretende Passat nur durch wenige Palmen geschwächt wird. Die Materialien wurden in einem dortselbst befindlichen Schuppen des Kaiserl. Gouvernements, der uns in dankenswertem Entgegenkommen zur Verfügung gestellt wurde, untergebracht. In der Richtung des Passates vom Drachenplatz aus lag die hier etwa 3 km breite Vaitele-Bucht, die an der andern Seite durch einen von Eingeborenen eng bewohnten Küstenstrich begrenzt ist. Bei den nicht zu vermeidenden Katastrophen fiel der Drache meist in das niedrige Mangrovegestrüpp, welches den Fall sehr gut dämpft; einmal mußte er aus einem Brotfruchtbaum gelandet werden, einmal fiel er ins Meer und wurde mittels des Observatoriumbootes gerettet, wobei der Drache selbst zerbrach, der Apparat jedoch durch sofortige Behandlung mit Frischwasser und Oel vor dem Zerstörtwerden bewahrt werden konnte.

Während des letzten Aufstiegs — es waren ca. 4600 m Draht mit 6 Drachen in der Luft — erschien eine starke Regenböe, die jedoch alle Drachen vorzüglich überstanden. Als die Böe vorüber schien, der Zug der Drachen sehr nachgelassen hatte, begannen die obersten Drachen offenbar infolge von Vertikalströmungen zu schießen, wobei der Draht Kinken bekam und in einer Länge von 2950 m abriß. Wir sahen die Drachen hinter der Pflanzung Vai-

tele der Deutschen Handels- und Plantagengesellschaft im Urwald verschwinden. — Es sei mir gestattet, einige Worte der sich anschließenden Drachenjagd im Urwald zu widmen.

Die Nachsuchungen, die ich selbst sofort aufnahm, blieben zunächst erfolglos; bei der Bõe hatte niemand die Drachen fallen sehen. Erst abends wurde der mittelste Drachen in der Pflanzung Vaitele fast unversehrt in einer Kokospalme gefunden. Am folgenden Tage zog der Gehilfe des Observatoriums mit einem Samoaner auf die Suche, kam jedoch unverrichteter Sache mit der Meldung zurück, daß der Draht über die Pflanzung hinweg in den Urwald ginge und dort bei dem herrschenden Regenwetter nicht zu verfolgen sei. Nachdem auch ein Versuch von mir, noch am selben Tage den Drachen im Urwald zu finden, durch die eintretende Dunkelheit vereitelt war, zog ich am zweiten Morgen nach der Katastrophe bei besserem Wetter mit gut ausgerüsteten Leuten wieder auf die Suche. Jetzt ging ich jedoch ganz systematisch vor: Es wurde die Richtung des Drahtes mit dem Kompaß festgestellt und nach dem Kompaß ein schmaler Weg manns- hoch mit Beil und Buschmessern in den Wald gehauen. So oft es irgend möglich war, wurde der Draht durch die Baumkronen hindurch gesucht und darnach die Richtung verbessert. Es ging über Steine und Baumstämme, durch Bäche und Morast nur langsam vorwärts und in einer Stunde wurden nur 700 m geschafft, dann aber sah ich plötzlich den Draht von uralten Baumriesen schräg nach unten auf eine kleine Waldlichtung hin verlaufen, offenbar einer alten, aufgegebenen Eingeborenenpflanzung. Hier hing denn auch der Drache ca. 3 m hoch in Bananenstauden. Es waren nur wenige Leisten gebrochen, das im Drachen angebrachte Uhrwerk war unverletzt und ging, hatte also zwei Tage hindurch den Gang der meteorologischen Elemente mitten im Urwald aufgezeichnet, eine interessante Registrierung. Der Drache wurde auseinander- genommen und auf dem gebahnten Wege zurückgebracht. Später wurde dann auch der dritte Drachen von Samoanern gefunden: die Schnur hatte sich in einer Kokospalme verwickelt, über welcher der Drache ruhig in der Luft stand. Er kam ganz unversehrt wieder zurück. Nur die 3 Kilometer Draht mußten wir verschmerzen.

Dabei soll hervorgehoben werden, wie vorzüglich sich die Kastendrachen des Göttinger Geophysikalischen Institutes bewährt haben. Die Auswechslung zerbrochener Stäbe kann binnen weniger Minuten geschehen. Ein total zerbrochenes Gestell wird bei einigermaßen guter Uebung des Personals in einem Tage wieder

hergerichtet. So kommt es, daß wir jetzt nach mehrmonatlichem Experimentieren noch keinen Drachen wirklich verloren haben. Ein fünfflächiger Kastendrachen von $4\frac{1}{2}$ qm Fläche kann bis 1500 m Draht von 0,8 mm tragen. Bei Benutzung von vier Drachen kann die für Handwindenbetrieb höchste Höhe von 2000 m erreicht werden. Die Köppenschen Diamantdrachen wurden entweder einzeln, oder zu zweit oder dritt aneinander gebunden verwandt. Sie sind stabiler als die vorigen, können aber nicht soviel Draht tragen. Die Verbindung der Hilfsdrachen am Draht machte einiges Kopfzerbrechen, da nur eine Klemme (die Koppische S-Klemme) vorhanden war. Nach mehrfachen andern Versuchen wurde ein Verfahren angewandt, das sich recht gut bewährt hat. Ein etwa $1\frac{1}{2}$ m langes Ende weichen Kupferdrahtes von 1 mm Dicke wird nach Bildung einer einfachen Oese im oberen Drittel um den Draht fest herumgewunden. Diese Kupferdrahtverbindung hat den Vorteil, daß sie gut fest sitzt, ohne den Draht irgendwie zu beschädigen, eine bequeme Befestigung des Drachens ermöglicht und in ca. $\frac{1}{2}$ Minute an- oder abzumachen ist. Falls beim Einholen einmal die Zeit fehlen sollte, kann sie auch ohne Bedenken mit auf die Rolle gewickelt werden. Man kann denselben Kupferdraht bei 3 bis 4 Aufstiegen benutzen.

In der Ausführung der Drachenexperimente wurde ich von dem Gehilfen A. Possin unterstützt. Znm Einholen der Drachen waren 2 bis 4 kräftige Samoaner notwendig. Die Reparaturen wurden von dem samoanischen Aufseher, einem früheren Seemann, ausgeführt. Die Geschicklichkeit der Samoaner in derartigen feinen Handarbeiten kam uns sehr zu statten.

Die Ausrüstung hat sich im Ganzen hier in den Tropen sehr gut bewährt. Besonders die Winde erwies sich als sehr praktisch. Die Konservierung des Drahtes machte keine Mühe. Bisher ist außer dem Verlust eines Anemometers nur der von $3\frac{1}{2}$ km Draht zu nennen, da die Drachen alle intakt sind.

Bei der Bearbeitung der Registrierungen wurde die größte Sorgfalt auf die Aichung der Instrumente verwandt. Leider fehlt dem Observatorium bisher ein Apparat, um Barometer bei verschiedenem Druck zu prüfen. Und in dieser Hinsicht ist eine Unsicherheit vorhanden, weshalb die folgenden Angaben als provisorische zu betrachten sind. Daß ein größerer Fehler des Barographen nicht besteht, ist durch Winkelmessungen nachgewiesen.

Es fanden 12 Drachenaufstiege statt, von denen 7 Höhen über 1000 m und 3 über 2000 m erreichten. Die größte Höhe betrug 2850 m.

Eine eingehendere Bearbeitung der Drachenergebnisse muß ich mir für später vorbehalten. Jetzt seien nur einige Hauptpunkte hervorgehoben:

Die Aufstiege fanden alle in der trocknen Jahreszeit (Ende Mai bis Anfang August) an Tagen statt, an welchen der Passat wehte. Den für diese Wetterlage typischen Zustand der unteren Luftschichten zu erforschen, schien mir am notwendigsten. Es zeigte sich, daß in allen Fällen die Temperatur zuerst schnell abnahm bis zu einer Höhe, die großen Schwankungen unterworfen ist. An windschwachen Tagen ist sie in 308 bis 700 m erreicht; an anderen wieder in 2200 m. Nach mehreren übereinstimmenden Aufstiegen kann man folgende Näherungswerte als typisch ansehen:

| Höhe | Temp. | Gradient | rel. Feucht. | Windr. |
|------|----------|----------------|--------------|------------|
| 0 m | 28.5° C. | 0°.9 p. 100 m. | 65 % | ESE bis SE |
| 1300 | 17.0 | | 90 | |
| 2800 | 13.0 | 0°.3 | 6 | E bis ENE. |

In der untersten Schicht wird bei der durchschnittlichen Maximaltemperatur heiterer Tage von 30° das indifferente Gleichgewicht erreicht, während beim durchschnittlichen Minimum von 22° immer noch 0°.4 pro 100 m Temperaturgradient besteht. Die relative Feuchtigkeit wächst in dieser untersten Schicht gewöhnlich bis zur Kondensation. Der Wind ist — abgesehen von den untersten 2 bis 300 m, wo durch die Lage des Aufstiegsortes direkt östliche Windrichtung bewirkt wird —, SE oder ESE. Ueber dieser Schicht wurde stets eine trockene, warme Schicht gefunden, welche von der vorigen durch eine Inversionsschicht von ein- bis zweihundert Meter Dicke und bis zu 3° Temperaturumkehr getrennt war. Die relative Feuchtigkeit fiel schnell auf minimale Werte (6%!) und hatte am höchsterreichten Punkte den niedrigsten Betrag. Wie schon aus obiger Zusammenstellung ersichtlich, war die Temperaturabnahme sehr gering. Die Zugrichtung war nördlicher, zwischen E und ENE, die Geschwindigkeit die gleiche. Insofern ist es möglich, daß diese Schicht als erste Uebergangsstufe zum Antipassat — wenn man die unter dem Namen „rückkehrender Passat“ bekannten Winde als Uebergangsstufen zum Antipassat bezeichnen kann — aufzufassen ist. Dabei sei bemerkt, daß bei zweien dieser höheren Aufstiege (3. u. 6. Aug.) Cirren aus N resp. NNW beobachtet wurden.

Diese Ergebnisse stimmen mit den von H. Hergesell¹⁾ in

1) H. Hergesell, C. R. 1905 Jan. 30.

der nördlichen Passatregion gewonnenen insofern überein, als beide-male über einer Schicht mit großem Temperaturgefälle und hohem Feuchtigkeitsgehalte, welche die Richtung des Passates hat, eine andere, auffallend trockne mit geringem Temperaturgefälle und einer mehr polwärts gehenden Zugrichtung gefunden wurde. Daß in Samoa die Zwischenschicht mit Temperaturumkehr nicht so mächtig, das Temperaturgefälle der höheren Schicht hier größer gefunden wurde als im Norden, sind Unterschiede, welche durch die Lage (Samoa liegt unter niedrigerer Breite), die örtlichen Verhältnisse, (Apia liegt auf der Leeseite einer Insel), vielleicht auch durch die Jahreszeit erklärt werden können.

Trotz der aussichtsreichen und wichtigen Ergebnisse dieser ersten Aufstiege werden vorläufig weitere nicht erfolgen, weil die Drachensexperimente zuviel Zeit in Anspruch nehmen und das Observatorium, an dem nur ein wissenschaftlicher Beamter tätig ist, mit andern Arbeiten überlastet ist. Einen wirklichen Erfolg versprechen auch nur regelmäßig — auch bei schwachem Winde mit Ballons — angestellte Aufstiege mit verbesserter Technik (Motorbetrieb) und an der Luvseite der Insel. Solange hierfür keine Mittel vorhanden sind, erhoffe ich von weiteren Aufstiegen keine wesentliche Klärung der hiesigen meteorologischen Verhältnisse höherer Luftschichten.

Drachen-Aufstieg am 25. Mai 1906 p. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|-------------------|--------------------|--|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 2 p. 30 | 737 | 0 | 26.1 | 27.5 | 65 | 66 | Nicht registriert | Zwischen | Wolken trüber Tag mit tri- Passat, der nachts anhält. Niederschläge. Um sieben gelichtet. |
| 30 | 742.5 | 185 | 27.5 | | 60 | | | 3 u. 3 p. | |
| 3 p. 30 | 688.5 | 825 | 22.2 | | 55 | | | E 7.7 | |
| 3 p. 55 | 732.0 | 240 | 25.6 | | 65 | | | Zwischen | |
| 4 p. 0 | 737 | 0 | 27.5 | 27.7 | 69 | 67 | | 3 u. 4 p. E 4.3 | |

Drachen-Aufstieg am 31. Mai 1906 a. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|-------------------|----------------|--|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 9 a. 17 | 759 | 0 | 28.8? | 27.9 | 58 | 64 | Nicht registriert | Zwischen | Sonniger trockner Tag mit gleich- mäßigem Passat. |
| 20 | 753.5 | 65 | 28.5 | | 60 | | | 9 u. 10 a. | |
| 30 | 742.5 | 195 | 26.8 | | 63 | | | E 4.2 | |
| 40 | 738.5 | 240 | 26.6 | | 66 | | | | |
| 50 | 738.5 | | | 28.2 | 66 | 66 | | | |
| 10 a. 0 | 738.5 | | | | 66 | | | Zwischen | Windrichtung oben: ESE. |
| 10 | 731 | 330 | 25.5 | | 70 | | | 10 u. 11 a. | |
| 20 | 726 | 395 | 25.0 | 28.2 | 69 | 68 | | E 5.2 | |
| 30 | 727 | 380 | 24.9 | | 67 | | | | |
| 40 | 717 | 500 | 24.3 | | 70 | | | | |
| 50 | 700.5 | 710 | 22.9 | 28.3 | 72 | 68 | | | |
| 11 a. 0 | 713 | 550 | 23.6 | | 76 | | | Zwischen | |
| 10 | 735.5 | 240 | 25.7 | | 75 | | | 11 u. 12 a. | |
| 14 | 759 | 0 | 28.5 | 28.9 | 72 | 67 | | E 5.2 | |

Drachen-Aufstieg am 8. Juni 1906 a. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|-------------------|----------------|--|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 10 a. 0 | 758.5 | 0 | 28.1 | 28.0 | 69 | 69 | Nicht registriert | Zwischen | Wolkenloses trocknes Wetter mit früh einsetzendem Passat. |
| 7 | 747 | 140 | 27.4 | | 72 | | | 10 u. 11 a. | |
| 14 | 729 | 355 | 25.3 | | 74 | | | E 6.0 | |
| 21 | 712.5 | 555 | 23.4 | | 75 | | | | |
| 28 | 725.5 | 395 | 24.4 | | 76 | | | | |
| 35 | 721.5 | 445 | 24.9 | 27.9 | 75 | 70 | | | Windrichtung oben: ESE. |
| 42 | 705 | 645 | 22.7 | | 79 | | | | |
| 49 | 709 | 595 | 23.2 | | 78 | | | | |
| 56 | 700 | 705 | 22.0 | | 82 | | | | |
| 11 a. 3 | 674.5 | 1030 | 19.5 | 27.9 | 82 | 70 | | | |
| 10 | 677 | 1000 | 19.7 | | 81 | | | Zwischen | |
| 13 | 667 | 1125 | 19.0 | | 94 | | | 11 u. 12 a. | |
| 17 | 684.5 | 905 | 20.0 | | 94 | | | E 6.9 | |
| 24 | 719 | 475 | 23.3 | | 84 | | | | |
| 31 | 728 | 365 | 24.9 | | 76 | | | | |
| 37 | 759.5 | 0 | 27.8 | 27.9 | 70 | 70 | | | |

Drachen - Aufstieg am 9. Juni 1906 p. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|----------------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 1 p. 39 | 756 | 0 | 27.5 | 27.8 | 74 | 72 | Nicht registriert | Zwischen | Wolkiges Wetter mit veränderlichem Passat und Regenschauern. |
| 46 | 725.5 | 360 | 24.3 | | 80 | | | 1 u. 2 p | |
| 2 p. 7 | 726.5 | 350 | 24.7 | 26.9 | 79 | 77 | | E (S) | In einer Böe (über 8.0 m/sec). |
| 14 | 707.5 | 585 | 23.1 | | 82 | | | 6.6 | |
| 21 | 673.5 | 1010 | 20.3 | | 88 | | | Zwischen | |
| 35 | 676 | 980 | 19.7 | 27.4 | 85 | 75 | | 2 u. 3 p | |
| 49 | 669.5 | 1060 | 19.7 | | 74 | | | E (S) | |
| 3 p. 3 | 668 | 1080 | 19.7 | | 74 | | | 4.3 | |
| 10 | 688.5 | 820 | 21.0 | 27.9 | 74 | 69 | | Zwischen | |
| 17 | 712.5 | 520 | 23.1 | | 74 | | | 3 u. 4 p | |
| 25 | 726.5 | 350 | 24.7 | | 74 | | | E (S) | |
| 32 | 723 | 390 | 25.1 | | 70 | | | 4.0 | |
| 36 | 756.5 | 0 | 28.1 | 27.9 | 64 | 65 | | | |

Drachen - Aufstieg am 13. Juni 1906 a. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|----------------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 10 a. 7 | 759 | 0 | 29.2 | 29.2 | 70 | 73 | Nicht registriert | Zwischen | Wolkiges Wetter (Cu.) mit leicht böigem Passat. Abends starke Regenböe mit Nordost. |
| 14 | 736.5 | 260 | 26.8 | | 80 | | | 10 u. 11a. | |
| 21 | 721.5 | 440 | 25.2 | | 82 | | | E | |
| 35 | 699.5 | 715 | 23.6 | 28.9 | 84 | 73 | | 4.3 | Windrichtung oben: ESE. Drachen vorübergehend in Cumuli. Der Apparatdrachen weicht bis 40° nach links ab gegen den untern Wind. Windrichtung oben: ENE. |
| 42 | 698.5 | 730 | 23.4 | | 84 | | | | |
| 50 | 677 | 995 | 22.4 | | 83 | | | | |
| 56 | 651.5 | 1330 | 20.4 | | 85 | | | | |
| 11 a. 3 | 668 | 1110 | 21.1 | 29.3 | 83 | 71 | | | |
| 11 | 643 | 1445 | 19.5 | | 86 | | | Zwischen | |
| 17 | 658 | 1245 | 20.3 | | 85 | | | 11 u. 12a. | |
| 24 | 675 | 1020 | 21.7 | | 82 | | | E | |
| 31 | 683 | 920 | 22.2 | 29.6 | 79 | 71 | | 4.3 | |
| 38 | 705 | 640 | 23.6 | | 88 | | | | |
| 45 | 717.5 | 490 | 25.0 | | 84 | | | | |
| 52 | 744 | 170 | 27.3 | | 82 | | | | |
| 56 | 758 | 0 | 29.5 | 29.6 | 75 | 72 | | | |

Drachen-Aufstieg am 15. Juni 1906 p. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|---------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 2 p. 15 | 756.0 | 0 | 28.7 | 28.2 | 65 | 66 | | Zwischen | Trocknes, heiteres Wetter mit Passat. Tags darauf Witterungsumschlag: Schwache, nördliche Winde mit Regen. |
| 22 | 727.5 | 340 | 27.1 | | 69 | | | 2 u. 3 p. | |
| 33 | 738.5 | 205 | 27.3 | | 70 | | | ENE | |
| 40 | 721.5 | 410 | 26.9 | 28.0 | 68 | 67 | | 6.7 | |
| 50 | 720 | 430 | 26.5 | | 68 | | | | |
| 55 | 713.5 | 510 | 26.1 | | 70 | | | | Windrichtung oben: ESE. |
| 3 p. 3 | 721 | 415 | 26.5 | | 65 | | | | |
| 12 | 726.5 | 350 | 26.9 | 27.9 | 64 | 68 | 5.6 | Zwischen | |
| 17 | 732 | 285 | 27.1 | | 66 | | | 3 u. 4 p. | |
| 20 | 743.5 | 150 | 27.5 | | 70 | | | ENE | |
| 25 | ? | 0 | 27.7 | 27.9 | 71 | 69 | | 6.7 | |

Drachen-Aufstieg am 25. Juli 1906 a. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|---------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 11 a. 4 | 759 | 0 | 28.6 | 28.5 | 62 | 62 | | Zwischen | Heiteres trocknes Wetter mit schwachem Passat. |
| 8 | 751 | 85 | 27.1 | | 62 | | | ENE | |
| 18 | 746 | 145 | 27.7 | | 62 | | 5.8 | ENE | |
| 28 | 747 | 130 | 27.5 | | 62 | | | 4.2 | |
| 42 | 750 | 95 | 27.7 | 28.8 | 62 | 62 | | | |
| 45 | 740 | 215 | 26.6 | | 62 | | | | Drachen schwanken stark auf und nieder und sind nicht höher zu bringen. Wahrscheinlich Schichtung mit Windwechsel. |
| 48 | 743 | 180 | 27.1 | | 62 | | | | |
| 54 | 757 | 0 | 28.4 | 28.8 | 63 | 63 | | | |

Drachen-Aufstieg am 25. Juli 1906 p. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------|------------|------------|-------------------|-----------|---------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 2 p. 17 | 757 | 0 | 28.9 | 28.7 | 61 | 62 | | Zwischen | Heiteres, trocknes Wetter mit schwachem Passat. |
| 30 | 736 | 245 | 26.2 | | 59 | | | 2 u. 3 p. | |
| 3 p. 0 | 730 | 320 | 25.3 | 28.0 | 60 | 62 | ENE | ENE | |
| 25 | 731.5 | 300 | 25.5 | | 61 | | 5.8 | 5.9 | Dasselbe wie Vormittags. (Schichtung mit Windwechsel). |
| 28 | 707.5 | 595 | 23.1 | | 66 | | | Zwischen | |
| 35 | 726.5 | 360 | 24.4 | 28.0 | 65 | 61 | | 3 u. 4 p. | |
| 44 | 735 | 260 | 25.5 | | 62 | | | ENE | |
| 52 | 757 | 0 | 27.8 | 27.9 | 61 | 60 | | 5.5 | |

Drachen-Aufstieg am 6. August 1906 c. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|----------|------------------------------|-----------------|------------|------------|-------------------|-----------|---------------|----------------|---|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 10 a. 43 | 760.5 | 0 | 28.7 | 28.9 | 63 | 66 | 12.2 | Zwischen | Heiteres, trocknes Wetter mit starkem Passat, der auch nachts durch an- hält Cirren aus NNW. |
| 57 | 703.5 | 670 | 21.4 | | 71 | | | 10 u. 11a. | |
| 11 a. 12 | 675.5 | 1025 | 18.4 | 28.9 | 80 | 66 | | E 8.0 | |
| 33 | 650.5 | 1345 | 17.0 | | 73 | | | Zwischen | |
| 39 | 644 | 1430 | 16.9 | | 48 | | ENE | 11 u. 12a. | |
| 47 | 627 | 1665 | 18.6 | 28.9 | 13 | 66 | | E 7.8 | |
| 52 | 625.5 | 1685 | 18.4 | | < 8 | | | | |
| 12 p. 0 | 603.5 | 1995 | 17.6 | | < 8 | | | Zwischen | |
| 12 | 587 | 2235 | 15.9 | 29.0 | < 8 | 67 | 13.4 | 12a. u. 1p. | |
| 33 | 593.5 | 2140 | 16.6 | | < 8 | | | E 8.2 | |
| 1 p. 13 | 604 | 1985 | 17.4 | 28.9 | < 8 | 66 | | Zwischen | |
| 23 | 620 | 1760 | 18.1 | | < 8 | | | 1 u. 2 p. | |
| 48 | 627.5 | 1655 | 18.7 | 28.7 | < 8 | 67 | 13.4 | E 8.5 | Veränderliches Wetter mit starkem Passat und heftigen Regenböen. |
| 53 | 634.5 | 1560 | 18.1 | | c. 10 | | | | |
| 2 p. 3 | 638 | 1510 | 16.5 | 28.5 | 23 | 68 | | Zwischen | |
| 11 | 639.5 | 1490 | 15.9 | | 86 | | | 2 u. 3 p. | |
| 34 | 667.5 | 1120 | 18.4 | 28.5 | 91 | 70 | 13.4 | E 9.2 | |
| 49 | 706.5 | 630 | 22.2 | | 78 | | | | |
| 3 p. 5 | 736 | 270 | 24.8 | | 78 | | | Zwischen | |
| 15 | 759 | 0 | 28.1 | 28.0 | 73 | 71 | | 3 u. 4 p. | |
| | | | | | | | | E 8.9 | |

Drachen-Aufstieg am 8. August 1906 a. m.

| Zeit | Luft- druck oben mm | Höhe m | Temperatur | | Feuchtig- keit | | Wind | | Bemerkungen |
|---------|------------------------------|-----------------|------------|------------|-------------------|-----------|---------------|----------------|--|
| | | | ob. C. | unt. C. | ob. % | unt. % | ob. m/sec. | unt. m/sec. | |
| 9 a. 43 | 760.5 | 0 | 28.0 | 28.0 | 66 | 70 | 9.7 | Zwischen | Veränderliches Wetter mit starkem Passat und heftigen Regenböen. |
| 48 | 734 | 305 | 26.3 | | 71 | | | 9 u. 10 a. | |
| 10 a. 2 | 691 | 830 | 21.9 | 28.2 | 81 | 72 | | 6.4 | |
| 16 | 655.5 | 1290 | 18.8 | | 90 | | | Zwischen | |
| 32 | 614.5 | 1840 | 15.7 | 28.4 | 99 | 70 | 10.0 | 10 u. 11a | |
| 44 | 583 | 2280 | 13.8 | | 88 | | | 6.3 | |
| 50 | 588 | 2205 | 14.6 | | 79 | | | | |
| 53 | 582 | 2235 | 13.9 | | 79 | | | | |
| 55 | 575.5 | 2385 | 14.4 | | 56.2 | | 9.2 | | Schnelle Aenderung der Elemente. |
| 59 | 562 | 2595 | 13.9 | 28.9 | 36 | 72 | | | |
| 11 a. 5 | 548 | 2810 | 12.9 | | 26 | | | Zwischen | |
| 11 | 545.5 | 2850 | 12.4 | | 6 | | | 11 u. 12a. | |
| 18 | 550 | 2780 | 12.5 | | 6 | | 14.6 | 7.6 | |
| 24 | 551 | 2765 | 12.3 | 26.9 | 16 | | | | |
| 34 | 562 | 2595 | 12.8 | | 69 | 81 | | | |
| 40 | 552 | 2750 | 11.7 | | 99 | | | | |
| 47 | 585.5 | 2245 | 13.5 | 25.9 | 98 | 87 | 10.2 | | Windrichtung oben: ENE. Veränderung beim Einsetzen einer Böe. Die Drachen kommen in die Wolken. In der Böe unten bis 10.6 m/sec. im Mittel während 15 Minuten, bis 14 m/sec. während 5 Minuten. Es hat sich wieder etwas aufgeklärt. |
| 55 | 562 | 2595 | 12.5 | | 97 | | | | |
| 12 p. 2 | 571 | 2460 | 12.5 | 27.3 | 96 | 73 | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Apia, den 13. August 1906.

Euler'sche Integrale.

Von

J. Thomae (Corr. Mitgl.).

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 27. Oktober 1906.

In seinem Handbuche der Theorie der Gammafunctionen (Leipzig 1906) bemerkt Herr Nielsen im Eingangs des § 57, daß Gauß vom Euler'schen Integral erster Gattung durch einen Grenzübergang zu dem zweiter Gattung gelangt. Er fährt fort: „diese Schlußweise ist indessen nicht streng, wir haben daher einem ganz anderen Wege zu folgen, um die heuristisch hergeleitete Formel in aller Strenge zu erweisen.“

Den Vorwurf der Unstrenge auf Gauß nicht sitzen zu lassen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Wir nehmen einen Hilfssatz voraus. Er sei

$$\nu = \sqrt[n]{n}, \quad 0 < x < n,$$

$$\psi(x) = -n \lg\left(1 - \frac{x}{n}\right) - x = \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} + \cdots + \frac{x^n}{nn^{n-1}} + \cdots,$$

so ist

$$\begin{aligned} e^{n \lg\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x} - 1 &= (1 - e^{\psi(x)}) : e^{\psi(x)} \\ &= - \frac{\psi(x) \left(1 + \frac{\psi(x)}{1 \cdot 2} + \frac{\psi^2(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right)}{1 + \psi(x) + \frac{\psi^2(x)}{1 \cdot 2} + \frac{\psi^3(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots} = -\mu \psi(x), \end{aligned}$$

wo μ kleiner als Eins ist. Ist nun λ ein ächter Bruch oder Eins, so ist absolut genommen für grosse ν

$$\begin{aligned} \nu(e^{-\psi(\lambda\nu)} - 1) &= \nu\mu\psi(\lambda\nu) \\ &= \mu\left(\frac{\lambda^2}{2\nu} + \frac{\lambda^3}{3\nu^2} + \frac{\lambda^4}{4\nu^3} + \dots\right) = \frac{\varepsilon}{\nu}, \quad \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Nun seien $a = \alpha + i\alpha'$, $b = \beta + i\beta'$ Zahlen, deren reelle Theile positiv sind. Gauß geht bei seinem Grenzübergange zwar nur von der Voraussetzung $\alpha > -1$ aus, doch genügt es vollkommen, α als positiv anzunehmen, was bequemer ist. Die Ausdehnung des erhaltenen Resultates auf den Fall, in dem nur $\alpha > -1$ ist, ist leicht.

Die Function

$$x^{\alpha'i} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\beta'i} = e^{i\alpha' \lg x + i\beta' \lg \left(1 - \frac{x}{n}\right)},$$

in der für die Logarithmen der Hauptwert zu nehmen ist, die wir mit $k(x) = g(x) + ih(x)$ bezeichnen, hat immer den absoluten Betrag Eins, und $g(x)$ $h(x)$ liegen immer zwischen -1 und $+1$.

Es sei, unter n eine große positive Zahl vorausgesetzt,

$$J(a, b, n) = \int_0^n x^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^b \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = P_n + Q_n,$$

$$P_n = \int_0^n x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta k(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx,$$

$$Q_n = \int_n^\infty x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta k(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Für P_n schreiben wir

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^n x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta e^{-x} dx \\ &\quad + \int_0^n x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta k(x) (e^{-\psi(x)} - 1) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Daß der erste Theil von P_n für wachsende n sich dem Grenzwert $\Gamma(a+1)$ beliebig nähert liegt auf der Hand, insbesondere ist er in dem von Gauß angenommenen Falle $b=0$ diesem Werth für wachsende ν oder n unmittelbar gleich. Der zweite Theil aber schreibt sich nach dem obenstehenden Hilfssatze und dem gewöhnlichen Integralmittelwerthsatze, wenn $\theta\theta'$ ächte Brüche sind:

$$\varepsilon(\theta\nu)^\alpha \left(1 - \frac{\theta\nu}{n}\right)^\beta g(\theta\nu) e^{-\theta\nu} : \nu \\ + i\varepsilon(\theta'\nu)^\alpha \left(1 - \frac{\theta'\nu}{n}\right)^\beta h(\theta'\nu) e^{-\theta'\nu} : \nu.$$

Dieser Ausdruck nähert sich, weil

$$(\theta\nu)^\alpha : e^{\theta\nu}, \quad (\theta'\nu)^\alpha : e^{\theta'\nu}$$

immer unterhalb einer endlichen, nur von α abhängenden Grenze bleiben, mit wachsenden ν der Null beliebig. Es ist also

$$\lim_{n=\infty} P_n = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \text{fac } a = \Gamma(a+1).$$

Von Q_n betrachten wir zunächst den reellen Theil und erhalten nach dem zweiten dem du-Bois-Raymond'schen Mittelwerthsatze

$$\Re Q_n = \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^n \int_\nu^{\nu'} x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta g(x) dx + 0 \cdot \int_{\nu'}^n x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta g(x) dx,$$

wo ν' zwischen ν und $n = \nu^2$ liegt. Es ist also

$$\Re Q_n = e^{n \lg \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)} \int_\nu^{\nu'} x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^\beta g(x) dx$$

und absolut genommen,

$$\Re Q_n < e^{-\nu} \frac{\nu^{\alpha+1} - \nu'^{\alpha+1}}{\alpha+1} < e^{-\nu} \frac{(\nu^{4\alpha+4} - \nu'^{\alpha+1})}{\alpha+1},$$

weil $g(x)$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Dieser Ausdruck nähert sich mit wachsenden ν oder n der Null beliebig. Um dasselbe für den imaginären Theil zu erweisen braucht man nur g mit h zu vertauschen. Daraus ergibt sich in aller Strenge der Gauß'sche Satz

$$\lim_{n=\infty} \int_0^n x^\alpha \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{l+n} dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx,$$

w. z. b. w. Uebrigens ist der Art, wie Dirichlet (Meyer-Dirichlet-Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, Leipzig 1871, Seite 99) den Grenzübergang für $b = 0$ und reelle a rechtfertigt, wenig hinzuzufügen.

Fragen der Krystallphysik II.
Ueber die Wirkung eines Magnetfeldes auf das
optische Verhalten pleochroitischer Krystalle.

Von

W. Voigt.

Angemeldet in der Sitzung am 28. Juli 1906.

Im Frühjahr dieses Jahres hat Herr Jean Becquerel¹⁾ eine Anzahl Beobachtungen über das optische Verhalten eines pleochroitischen einaxigen Krystalles Xenotim im Magnetfelde veröffentlicht, die ein sehr großes Interesse verdienen. Im folgenden will ich die Bedeutung dieser Untersuchungen für die allgemeine Theorie der magnetooptischen Wirkungen in Krystallen auseinandersetzen; dabei wird sich zeigen, daß Beobachtungen der von Herrn J. Becquerel angestellten Art auch über gewisse Fragen der gewöhnlichen Krystalloptik ein ganz neues Licht zu verbreiten vermögen, wenn auch freilich die bisher vorliegenden Resultate dazu noch nicht genügende Hilfsmittel bieten.

Die genannten Beobachtungen betreffen einerseits und hauptsächlich eine Art von Zeeman-Effekt an den sehr feinen Absorptionslinien des genannten Minerals, daneben auch die Polarisationsverhältnisse in dem Absorptionsspektrum. In diesem ersten Teil meiner Untersuchung will ich diejenigen Punkte behandeln, die durch J. Becquerels Beobachtungen im wesentlichen klar gestellt sind, während ich anderes, was noch weiterer experimenteller Durchforschung²⁾ zu bedürfen scheint, auf einen zweiten Teil zurückstelle.

Anwendbarkeit der beim Zeeman-Effekt in Dämpfen erprobten Grundsätze. Für eine theoretische Bearbeitung der J. Becquerelschen Beobachtungen ist zunächst die Vorfrage zu

1) J. Becquerel, C. R. 142, p. 775, 874, 1144; 1906.

2) Vergebliche Bemühungen um Beobachtungsmaterial haben die Verzögerung des Druckes obiger Mitteilung verursacht.

erledigen, welchem Typus magnetooptischen Verhaltens von Körpern der benutzte Xenotim-Krystall angehört. Bekanntlich läßt die Symmetrie der magnetooptischen Wirkungen bei isotropen Körpern — wie das auch aus der Darstellung in Drudes Optik¹⁾ hervorgeht — zwei wesentlich verschiedene Erklärungssysteme zu, die zwar für den sog. Faraday-Effekt durchsichtiger Körper nicht merklich verschiedene Erfolge ergeben, aber für zwei andere der Beobachtung zugängliche Erscheinungen zu entgegengesetzten Resultaten führen²⁾.

Die eine dieser Erscheinungen ist die Drehung der Polarisationssebene in der Umgebung eines Absorptionsstreifens, wenn Licht den Körper parallel zu den Kraftlinien durchsetzt. Hier verlangt das im Anschluß an Lorentzsche Vorstellungen von mir aufgestellte Erklärungssystem³⁾ den gleichen Drehungssinn zu beiden Seiten eines Absorptionsstreifens, den entgegengesetzten im Innern desselben. Beobachtungen von den Herren Macaluso und Corbino⁴⁾ sowie von Herrn Zeeman⁵⁾ haben bei leuchtenden Dämpfen dieses Verhalten nachgewiesen. Bei Flüssigkeiten glaubte Herr Schmauß⁶⁾ dasselbe gefunden zu haben; aber Herr Bates⁷⁾ hat wohl überzeugend nachgewiesen, daß jene Beobachtungen nicht einwandfrei sind. Dagegen hat Herr Wood⁸⁾ bei Praseodymchlorid das entgegengesetzte Verhalten aufgefunden, nämlich entgegengesetzte Drehungen zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens, wie dies der zweite Typus der Erklärungssysteme verlangt.

Die zweite Erscheinung, in bezug auf welche die beiden Erklärungssysteme sich widersprechen, ist das Verhalten der isotropen Körper im Magnetfelde gegenüber Strahlen, die sie normal zu den Kraftlinien durchsetzen. Hier verlangt das erste Erklärungssystem eine Doppelbewegung, die namentlich in der Nachbarschaft der Absorptionsstreifen beträchtliche Werte annehmen kann, — das zweite läßt ebenda eine Doppelbrechung überhaupt nicht zu.

Der Nachweis dieser Doppelbrechung in Na-Dampf ist uns⁹⁾

1) P. Drude, Optik, 2. Aufl. p. 406 und 420, 1906.

2) l. c. p.

3) W. Voigt, Wied. Ann. 67, 345, 1899.

4) D. Macaluso u. O. M. Corbino, C. R. 127, 548, 1898.

5) P. Zeeman, Arch. Nierl. 7, p. 465, 1902.

6) A. Schmauß, Ann. d. Phys. 2, 280, 1900.

7) Bates, Ann. d. Phys. 12, 1080, 1903.

8) R. W. Wood, Phys. Zeitschr. 6, p. 416, 1905.

9) W. Voigt l. c. p. 359.

im hiesigen Institut gelungen, — wodurch eine wichtige Prüfung des betreffenden Erklärungssystems erbracht war — bei festen Körpern war es aber bisher nicht möglich, eine solche Doppelbrechung sicher zu stellen¹⁾. Auch in der letzten Zeit hier angestellte Beobachtungen mit einem neuen von Zeiß-Jena gefertigten schönen Präparat der früher beschriebenen Art, bei dem der Lichtweg bis auf über 1 m und die Feldstärke bis auf nahe 20000 Gauß gesteigert werden konnte, haben diese Sicherheit nicht gebracht, sondern umgekehrt wahrscheinlicher gemacht, daß die von uns beobachtete Substanz dem ersten Erklärungssystem nicht gehorcht.

Wenn also die an festen Körpern bisher allein vorliegenden — allerdings äußerst spärlichen — Beobachtungen dieselben in Gegensatz zu den Dämpfen stellen, so ist es um so bemerkenswerter, daß nach den Mitteilungen des Herrn J. Becquerel der Xenotim sich magnetooptisch wie die Dämpfe verhält.

Bezüglich der Drehung der Polarisationssebene für parallel der optischen Axe — also parallel der Richtung der Isotropie — und parallel den Kraftlinien fortschreitende Wellen spricht er in seiner dritten Publikation²⁾ mit voller Bestimmtheit aus, daß dieselbe zu beiden Seiten eines Absorptionsstreifens in gleichem Sinne, und zwar entgegengesetzt wie innerhalb desselben, stattfindet.

Ueber die Doppelbrechung in der Richtung der optischen Axe, wenn dieselbe normal zu den Kraftlinien liegt, äußert er sich nicht direkt; indessen verhalten sich nach seinen Wahrnehmungen³⁾ nahezu alle Absorptionsstreifen für Schwingungen parallel und solche normal zu den Kraftlinien bei Erregung des Feldes merklich, ja zum Teil höchst auffallend verschieden, und bei dem bekannten Zusammenhang zwischen Absorption und Brechungsindex ist es unzweifelhaft, daß hiernach die Richtung der optischen Axe im Xenotim doppelbrechend wird, wenn dieselbe in einem Magnetfeld normal zu den Kraftlinien liegt.

Hiermit scheint mir die Berechtigung erwiesen zu sein, einer Theorie der magnetooptischen Erscheinungen im Xenotim dasselbe Erklärungssystem — natürlich in der bei Krystallen notwendigen Verallgemeinerung — zugrunde zu legen, das sich bei der Erklärung des Zeeman-Effektes und seiner Begleiterscheinungen in Dämpfen bewährt hat. Dabei ist aber von allem Anfang zu berücksichtigen, daß die von Herrn J. Becquerel beobachteten

1) W. Voigt l. c. p. 357.

2) J. Becquerel l. c. 1145.

3) J. Becquerel l. c. 776.

Veränderungen der Absorptionsstreifen des Xenotim im Magnetfeld sich dem einfachsten Typus des normalen Zeemanschen Triplets nicht fügen, daß insbesondere auch die elektrische Schwingungskomponente, welche parallel den Kraftlinien liegt, vom Magnetfelde beeinflußt wird.

Das Erklärungssystem der komplizierten Zeemaneffekte.

Es ergibt sich daraus, daß für die Erklärung der betreffenden Erscheinungen die erweiterte Theorie ¹⁾ als Ausgangspunkt zu benutzen ist, die zur Deutung der komplizierteren Formen des Zeeman-Effektes, insbesondere der Quadruplets geführt hat. Das Wesentliche derselben ist die Annahme, daß mit den in der Welle schwingenden Vektoren (oder Elektronen) bei Erregung des Feldes andere Vektoren (oder materielle Systeme) gekoppelt werden, die zur Ausführung von Eigenschwingungen befähigt sind, aber direkt dem Felde der Lichtwelle nicht unterliegen, und demgemäß auch nicht strahlen.

Die Schwingungskomponente β_λ der auf Elektronenbewegung zurückgeführten Teilpolarisation parallel zum Magnetfelde sollte hiernach z. B. mit der Komponente β_λ des Hilfsvektors und der Komponente Z der elektrischen Feldstärke in der Lichtwelle verknüpft sein durch die Formeln

$$1) \quad \begin{aligned} \beta_\lambda + a_\lambda \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial t} + b_\lambda \frac{\partial^2 \beta_\lambda}{\partial t^2} + d_\lambda \beta_\lambda &= \varepsilon_\lambda Z, \\ \beta_\lambda + a_\lambda \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial t} + b_\lambda \frac{\partial^2 \beta_\lambda}{\partial t^2} + d_\lambda \beta_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnen a_λ , b_λ , c_λ , d_λ und ε_λ Konstanten, d_λ ist eine Funktion der magnetischen Feldstärke, die mit jener verschwindet, aber im übrigen noch nicht aus den Beobachtungen abzuleiten ist. Setzt man dann kurz

$$2) \quad \vartheta^2 + ia_\lambda \vartheta - b_\lambda = \mathcal{Q}_\lambda, \quad \vartheta^2 + ia_\lambda \vartheta - b_\lambda = \mathcal{D}_\lambda$$

wobei ϑ die reduzierte Schwingungsperiode bezeichnet, so ergibt sich für den komplexen Brechungsindex ν einer senkrecht zu den Kraftlinien des äußeren Feldes fortschreitenden und ihnen parallel schwingenden Welle

$$3) \quad \nu^2 = 1 + \sum \frac{\varepsilon_\lambda \vartheta^2 \mathcal{D}_\lambda}{\mathcal{Q}_\lambda \mathcal{D}_\lambda - d_\lambda^2 \vartheta^4}.$$

Wir wollen diese Formel, die s. Z. im wesentlichen nur aufgestellt worden ist, jetzt etwas näher betrachten, und zwar speziell

1) W. Voigt, Wied. Ann. 68, 352, 1899.

für die nächste Umgebung eines isolierten schmalen Absorptionsstreifens, dessen Parameter wir ohne Indizes führen. Wir setzen demgemäß

$$4) \quad \nu^2 = n_0^2 + \frac{\varepsilon \vartheta^2 \mathfrak{D}}{\Theta \mathfrak{D} - d^2 \vartheta^2},$$

wo nun n_0 den reellen Brechungsindex bezeichnet, der in dem betrachteten Bereich bei Abwesenheit des betreffenden Absorptionsstreifens herrschen würde. Ferner kürzen wir ab

$$5) \quad \varepsilon \vartheta^2 = f, \Theta = G + iH, \mathfrak{D} = g + ih, d\vartheta^2 = k,$$

wobei dann f, H, h, k in dem behandelten Bereich als konstant gelten können, während G und g mit der Periode variieren. Speziell werden G resp. g sehr klein, wenn sich die Periode ϑ der Eigenperiode \sqrt{b} resp. \sqrt{b} von β_λ und λ_λ nähert. k enthält allein von allen Parametern die Stärke des Magnetfeldes.

Eine einfache Rechnung liefert die Beziehung

$$6) \quad 2n^2 \kappa = \frac{f[H(g^2 + h^2) + hk^2]}{(Gg - Hh - k^2)^2 + (Hg + Gh)^2},$$

wobei n den reellen Brechungsindex, κ den Absorptionsindex bezeichnet. Die beobachtete Absorption bestimmt sich durch $n\kappa$, es ist aber in den uns beschäftigenden Fällen schwacher Absorption erlaubt, von der Veränderlichkeit von n in dem betrachteten Bereich abzusehen und die Diskussion an den Ausdruck für $2n^2 \kappa$ anzuknüpfen.

Ist das Magnetfeld nicht erregt, so ist $k = 0$, und die Formel (6) reduziert sich auf

$$7) \quad 2n^2 \kappa = \frac{fH}{G^2 + H^2},$$

was bekanntlich die Existenz eines Absorptionsstreifens nahe bei $G = 0$ ausspricht. Die Erregung des Feldes ändert das Verhalten in komplizierter und allgemein nicht leicht erkennbarer Weise.

Zwei spezielle Fälle, die sich durch Einfachheit auszeichnen, mögen vorweg genommen werden.

Ist $\Theta = \mathfrak{D}$, also $a = \alpha, b = \beta$, so wird aus (4)

$$8) \quad \nu^2 = n_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \vartheta^2 \left(\frac{1}{\Theta - d\vartheta^2} + \frac{1}{\Theta + d\vartheta^2} \right),$$

d. h. der Absorptionsstreifen, der nahe bei $\vartheta^2 = b$ lag, zerfällt durch das Magnetfeld in zwei nach beiden Seiten äquidistante.

Ist umgekehrt b sehr stark von β verschieden, so ist nahe dem ursprünglichen Absorptionsstreifen g groß gegen G, H, h , und

man kann dort schreiben

$$9) \quad 2n^2\kappa = \frac{fHg^2}{(Gg - k^2)^2 + H^2g^2}.$$

Da jetzt nur G merklich von der Periode ϑ abhängt, ist das Maximum von $2n^2\kappa$ dadurch gegeben, daß

$$G = k^2/g,$$

und da $G = \vartheta^2 - b$ ist, so kann man, indem man $\vartheta = \sqrt{b}(1 + \delta)$ setzt, schreiben

$$G = 2b\delta, \quad g = b - b,$$

also

$$10) \quad \delta = k^2/2b(b - b).$$

Dies sagt aus, daß der ursprüngliche Absorptionsstreifen in der Richtung größerer oder kleinerer Perioden verschoben wird, je nachdem $b \geq b$, d. h. je nachdem die Eigenperiode von $\lambda_0 \geq$ der von λ_0 ist.

Im Bereich der Eigenperiode von λ_0 ist in dem vorausgesetzten Falle umgekehrt G groß gegen H , h und g , so daß hier gilt

$$11) \quad 2n^2\kappa = \frac{f[H(g^2 + k^2) + hk^2]}{(Gg - k^2)^2 + G^2h^2}.$$

Dies gibt bei hinreichend kleinem h ein Maximum der Absorption in der Nähe von

$$g = k^2/G,$$

aber dies Maximum ist wegen des als groß vorausgesetzten G immer sehr klein, nämlich von der Größenordnung von fH/G^2 , d. h. von der Absorption, die vor Erregung des Feldes in dem betrachteten Bereiche herrschte, und die nach Annahme unmerklich ist. Die Lage des Maximum bestimmt sich bei der Substitution $\vartheta = \sqrt{b}(1 + \delta)$ durch

$$12) \quad \delta = k^2/2b(b - b);$$

es liegt also von \sqrt{b} nach größeren oder kleineren Perioden, je nachdem $b \geq b$ ist.

In diesem Falle reduziert sich somit die Wirkung des Feldes im wesentlichen auf eine bloße Verschiebung des Absorptionsstreifens, die je nach Umständen in der Richtung nach rot oder violett stattfinden kann.

Nach diesen von den extremen speziellen Fällen gelieferten Resultaten kann man nun die Aussage der allgemeinen komplizierten Formel (6), die sich zu direkter Behandlung wenig eignet,

mit ziemlicher Sicherheit vermuten. Weicht G und H von g und h ab, so wird mit wachsender Größe des Unterschiedes die bei Gleichheit stattfindende symmetrische Zerlegung der Absorptionslinien mehr und mehr dissymmetrisch. Die Dissymmetrie tritt sowohl bezüglich der Lage, als bezüglich der Intensität ein; die der Urlage näher verbleibende Komponente behält die größere Intensität, sie kann aber je nach Umständen ebensowohl nach der roten, wie nach der violetten Seite des Spektrums hinliegen.

Setzt man in (6) $G = G_0 + e$, $g = G_0 - e$, so bezeichnet nach der Bedeutung von G und g der Betrag $2e$ die Differenz der Quadrate der Eigenschwingungen der beiden Vektorkomponenten β_0 und β_0 , und das für den Vorgang in erster Linie maßgebende Glied $Gg - Hh - k^2$ wird zu $G_0^2 - Hh - (e^2 + k^2)$. Es verbindet sich also e^2 additiv mit k^2 .

Dies zeigt, daß eine Vergrößerung der in k enthaltenen Stärke des magnetischen Feldes auf die Erscheinung eine ähnliche Wirkung äußern wird, wie eine Vergrößerung der Differenz der Eigenschwingungen von β_0 und β_0 ; auch sie wird demnach die Dissymmetrie der Komponenten des Absorptionsstreifens nach Lage und Intensität befördern.

Zusammengehörige Absorptionsstreifen in den Hauptspektren eines rhombischen Krystalles. Um nun die Formeln der magneto-optischen Wirkungen für einen Krystall rhombischer Symmetrie zu bilden — welcher Fall für unsere Zwecke sowohl einfach, als allgemein genug ist — haben wir von den Dispersionsgleichungen für diesen Fall auszugehen, also an das System

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_\lambda + a_\lambda \frac{\partial \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t} + b_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t^2} &= \varepsilon_\lambda X, \\ 13) \quad \mathfrak{Y}_\lambda + a'_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t} + b'_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t^2} &= \varepsilon'_\lambda Y, \\ \mathfrak{Z}_\lambda + a''_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t} + b''_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t^2} &= \varepsilon''_\lambda Z \end{aligned}$$

anzuknüpfen, welches die Krystallachsen als Koordinatenachsen voraussetzt.

In diesen Formeln erscheinen die Komponenten \mathfrak{X}_λ , \mathfrak{Y}_λ , \mathfrak{Z}_λ der Teilpolarisationen als von einander gänzlich unabhängig; eine jede hat ihre besondere Eigenschwingungsdauer und ihre eigne Dämpfung; einem jeden Komponentensystem entspricht ein eignes Hauptabsorptionsspektrum, und es bleibt zunächst vollständig willkürlich, welche Glieder der Reihen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \dots, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3, \dots, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \dots$

man als zusammengehörig ansehen will. Die gewöhnlichen Absorptions- und Dispersionsvorgänge gestatten ebensowohl z. B.

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1; \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2; \mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Z}_3$$

als Komponenten eines Vektors anzusehen, als

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1; \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2; \mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Z}_3.$$

Anders, wenn es sich um die Berechnung der Wirkung eines äußeren Magnetfeldes P handelt. Was insbesondere den fundamentalen Ansatz angeht, der sich nach Lorentz durch die auf schwingende Elektronen ausgeübte Kraft deutet und zu den Gesetzen der normalen Triplets führt, so wird bei ihm die auf einen Vektor \mathfrak{R}_λ ausgeübte Wirkung durch das Vektorprodukt $[\mathfrak{R}_\lambda, P]$ gemessen, ihre Komponenten hängen also von allen drei Komponenten der Geschwindigkeit \mathfrak{R}_λ ab, und ihre Berechnung erfordert die Kenntnis, welche Komponenten $\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$ demselben Vektor — derselben Elektronenart — zugehören.

Hieraus ergibt sich eine wichtige Folgerung für die gewöhnliche Theorie der Absorption und Dispersion pleochroitischer Krystalle.

Die Beobachtung der drei Hauptabsorptionsspektren eines rhombischen Krystalles vermag — gleichviel mit wie großen Schwierigkeiten — die Werte der sämtlichen Parameter $a_\lambda, b_\lambda, \epsilon_\lambda; a'_\lambda, b'_\lambda, \epsilon'_\lambda; a''_\lambda, b''_\lambda, \epsilon''_\lambda$ für die Komponenten $\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$ nach den Krystallaxen zu vermitteln; sie gibt aber keinerlei Aufschluß darüber, welche Tripel dieser Parameter ein und demselben Vektor zugehören, welche Absorptionsstreifen in den verschiedenen Spektren einander entsprechen. Wie nun die an Lorentz anknüpfende Theorie der magnetooptischen Wirkungen die Kenntnis dieser Beziehungen verlangt, so wird die Vergleichung ihrer Folgerungen mit der Erfahrung — gleichviel mit welchen Schwierigkeiten — umgekehrt die Mittel bieten, um die Zusammengehörigkeit irgend welcher Absorptionsstreifen der drei Spektren, also dreier Schwingungskomponenten $\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$ zu erweisen. Das ist offenbar ein Punkt von großer prinzipieller Bedeutung, wenn auch vorläufig noch nicht allzuviel Hoffnung auf die wirkliche Durchführung dieser Untersuchung gestattet ist. (Die Analogie mit der Anwendung des Zeeman-Effektes zur Auffindung von Linienserien fällt in die Augen.)

Jedenfalls sind die Krystalle mit feinen Absorptionsstreifen (wie z. B. Xenotim), die magnetooptische Effekte relativ leicht erkennen lassen, die ersten, an welche die Untersuchung anzuknüpfen hat. Dabei scheint übrigens ein ganz wildes Probieren bei der

Auswahl der vermutlich zusammengehörigen Absorptionsstreifen nicht nötig zu sein. Die Spektrentafeln, welche die Resultate der schönen Untersuchungen des Herrn H. Becquerel¹⁾ über die Hauptabsorptionsspektren von Scheelit, Xenotim, Parisit, Didymsulfat, Didym-Kaliumnitrat veranschaulichen, geben in dieser Hinsicht vielmehr bestimmte und willkommene Winke. Jeder Gruppe von Absorptionsstreifen in dem einen Hauptspektrum entspricht nach Lage und gelegentlich auch nach Anordnung eine ähnliche in dem andern oder den beiden andern, und es erscheint selbstverständlich, den einem Absorptionsstreifen in dem ersten Spektrum zugehörigen zunächst in den entsprechenden Gruppen der anderen zu suchen.

Die Hauptgleichungen. Neben der oben als „Lorentzschen“ bezeichneten Wirkung eines Magnetfeldes haben wir nun nach dem S. 4 Gesagten noch jene weitere einzuführen, die zur Erklärung der komplizierteren Formen des Zeeman-Effectes führt. Wir gelangen dadurch zu der folgenden Erweiterung des Systemes (13)

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{X}_\lambda + a_\lambda \frac{\partial \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t} + b_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t^2} + d_\lambda \mathfrak{E}_\lambda + \varepsilon_\lambda c_\lambda \left(\Gamma \frac{\partial \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t} - B \frac{\partial \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t} \right) = \varepsilon_\lambda X, \\
 13) \quad & \mathfrak{Y}_\lambda + a'_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t} + b'_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t^2} + d'_\lambda \mathfrak{Y}_\lambda + \varepsilon'_\lambda c_\lambda \left(A \frac{\partial \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t} \right) = \varepsilon'_\lambda Y, \\
 & \mathfrak{Z}_\lambda + a''_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t} + b''_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t^2} + d''_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda + \varepsilon''_\lambda c_\lambda \left(B \frac{\partial \mathfrak{X}_\lambda}{\partial t} - A \frac{\partial \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t} \right) = \varepsilon''_\lambda Z; \\
 & \mathfrak{E}_\lambda + a_\lambda \frac{\partial \mathfrak{E}_\lambda}{\partial t} + b_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_\lambda}{\partial t^2} + d_\lambda \mathfrak{X}_\lambda = 0, \\
 14) \quad & \mathfrak{Y}_\lambda + a'_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t} + b'_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_\lambda}{\partial t^2} + d'_\lambda \mathfrak{Y}_\lambda = 0, \\
 & \mathfrak{Z}_\lambda + a''_\lambda \frac{\partial \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t} + b''_\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_\lambda}{\partial t^2} + d''_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda = 0.
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen A, B, Γ die Komponenten des äußeren Magnetfeldes, und es ist aus dem früher von mir²⁾ benutzten Parameter c_λ im ersten System je der Faktor $\varepsilon_\lambda, \varepsilon'_\lambda, \varepsilon''_\lambda$ herausgezogen, weil nach dem Prinzip der Energie nach Division mit diesen Größen die Klammern in allen drei Gleichungen denselben Faktor haben müssen. Die d_λ messen die magnetische Koppelung der Vektorkomponenten $\mathfrak{X}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$ einer-, der $\mathfrak{E}_\lambda, \mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Z}_\lambda$ andererseits; man wird nach früherem d_λ als allein von A, d'_λ allein von B, d''_λ allein von

1) H. Becquerel, Ann. de Chim. et de Phys. (6) 14, 170, 1888.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67, p. 847, 1899.

Γ abhängig¹⁾ und mit diesen Größen verschwindend betrachten dürfen. Die Indizes k beziehen sich auf die verschiedenen Elektronengattungen.

Für periodische Schwingungen folgt aus (14)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k \mathfrak{X}_k + i(\Gamma_k \mathfrak{Y}_k - B_k \mathfrak{Z}_k) &= X, \\ 15) \quad \mathcal{A}_k \mathfrak{Y}_k + i(\mathcal{A}_k \mathfrak{Z}_k - \Gamma_k \mathfrak{X}_k) &= Y, \\ \mathcal{A}'_k \mathfrak{Z}_k + i(B_k \mathfrak{X}_k - \mathcal{A}_k \mathfrak{Y}_k) &= Z, \end{aligned}$$

wobei

$$16) \quad \mathcal{A}_k = \frac{1}{\varepsilon_k} \left(\frac{\Theta_k}{\vartheta^2} - \frac{d_k^2 \vartheta^2}{\mathfrak{D}_k} \right), \quad \dots, \quad \mathcal{A}_k = c_k \frac{A}{\vartheta}, \quad \dots$$

hinzukommen die Maxwell-Hertz'schen Grundgleichungen

$$17) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = v \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

u. s. f., wobei die Polarisationen

$$\mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_k, \quad \dots$$

sind. Verlaufen die magnetischen Kraftlinien der Z -Axe parallel, so ist

$$\mathcal{A}_k = 0, \quad B_k = 0, \quad \Gamma_k = P_k = c_k P / \vartheta,$$

wobei wieder P die Feldstärke bezeichnet, und aus (15) wird

$$\begin{aligned} 18) \quad \mathcal{A}_{k0} \mathfrak{X}_k + i P_k \mathfrak{Y}_k &= X, \\ \mathcal{A}_{k0} \mathfrak{Y}_k + i P_k \mathfrak{X}_k &= Y, \quad \mathcal{A}'_k \mathfrak{Z}_k = Z; \end{aligned}$$

\mathcal{A}_k und \mathcal{A}'_k nehmen wegen $d_k = 0$, $d'_k = 0$ hierbei die einfacheren Formen an

$$19) \quad \mathcal{A}_{k0} = \Theta_k / \varepsilon_k \vartheta^2, \quad \mathcal{A}'_{k0} = \Theta'_k / \varepsilon'_k \vartheta^2.$$

Für die Polarisationen ergibt sich hiernach

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= X \left(1 + \sum \frac{\mathcal{A}'_{k0}}{N_k} \right) - i Y \sum \frac{P_k}{N_k}, \\ 20) \quad \mathfrak{Y} &= Y \left(1 + \sum \frac{\mathcal{A}_{k0}}{N_k} \right) + i X \sum \frac{P_k}{N_k}, \quad \mathfrak{Z} = Z \left(1 + \sum \frac{1}{\mathcal{A}_k} \right), \\ N_k &= \mathcal{A}_{k0} \mathcal{A}'_{k0} - P_k^2. \end{aligned}$$

Die für uns in Betracht kommenden Hauptfälle sind dadurch charakterisiert, daß die Fortschreitungsrichtung in eine der Hauptachsen fällt. Fortpflanzungen parallel der X - und parallel der

1) Ueber noch allgemeinere Koppelungen s. W. Voigt, Wied. Ann. 68, p. 352, 1899; dergleichen heranzuziehen geben indeß die vorliegenden Beobachtungen zunächst keine Veranlassung.

Y-Axe sind dabei nicht wesentlich verschieden, — der Hauptunterschied beruht nach der Theorie darin, ob die Fortschreitung parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes stattfindet.

Fortpflanzung normal zum Feld. Fällt die Wellennormale in die X-Axe, so ist nach (17) $\mathfrak{X} = 0$, und es folgt aus (20) für die parallel zur XY-Ebene und die parallel zur Z-Axe stattfindenden Schwingungen

$$21) \quad \nu_i^2 = 1 + \sum \frac{\mathcal{A}_{i0}}{N_i} - \frac{\left(\sum \frac{P_i}{N_i}\right)^2}{1 + \sum \frac{\mathcal{A}'_{i0}}{N_i}}, \quad \nu_i^2 = 1 + \sum \frac{1}{\mathcal{A}'_i}.$$

Analog gilt, wenn die Welle längs der Y-Axe, fortschreitet, $\mathfrak{Y} = 0$ und

$$22) \quad \nu_i^2 = 1 + \sum \frac{\mathcal{A}'_{i0}}{N_i} - \frac{\left(\sum \frac{P_i}{N_i}\right)^2}{1 + \sum \frac{\mathcal{A}_{i0}}{N_i}}, \quad \nu_i^2 = 1 + \sum \frac{1}{\mathcal{A}_i}.$$

Bei Abwesenheit eines Magnetfeldes nehmen die Ausdrücke für alle drei ν^2 die Form von ν_i^2 an, und gewinnen alle \mathcal{A} die aus (19) ersichtliche einfache Bedeutung. Absorptionsstreifen liegen in diesem Falle immer da, wo der reelle Teil eines der \mathcal{A} resp. \mathcal{A}' sehr klein wird

Nahe diesen Stellen des Spektrums überwiegt dann ein Glied der Summen, das wir wieder ohne Index führen, alle übrigen, und wir können dort ähnlich wie S. 511 setzen

$$23) \quad \begin{aligned} \nu_i^2 &= n_{i0}^2 + \frac{\mathcal{A}'_0}{N} - \frac{P_0^2}{N^2 \left(n_{i0}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N} \right)}, \quad N = \mathcal{A}_0 \mathcal{A}'_0 - P_0^2 \\ \nu_i^2 &= n_{i0}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N} - \frac{P_0^2}{N^2 \left(n_{i0}^2 + \frac{\mathcal{A}'_0}{N} \right)}, \quad \nu_i^2 = n_{i0}^2 + \frac{1}{\mathcal{A}'_i}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für ν_i^2 und ν_i^2 lassen sich leicht auf die Formen bringen

$$24) \quad \begin{aligned} \frac{n_{i0}^2}{\nu_i^2} &= 1 - \frac{1 + \mathcal{A}'_0 n_{i0}^2}{(1 + \mathcal{A}_0 n_{i0}^2)(1 + \mathcal{A}'_0 n_{i0}^2) - n_{i0}^2 n_{i0}^2 P^2}, \\ \frac{n_{i0}^2}{\nu_i^2} &= 1 - \frac{1 + \mathcal{A}_0 n_{i0}^2}{(1 + \mathcal{A}_0 n_{i0}^2)(1 + \mathcal{A}'_0 n_{i0}^2) - n_{i0}^2 n_{i0}^2 P^2}. \end{aligned}$$

Wir knüpfen hieran zunächst noch eine allgemeine Bemerkung.

Aus

$$\nu^2 = n_0^2 + \frac{f}{G + iH}$$

ist oben gefolgert worden

$$25) \quad 2n^2\kappa = \frac{fH}{G^2 + H^2}.$$

Schreibt man diese Formel

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{G + iH}{n_0^2(G + iH) + f},$$

so ergibt sich

$$26) \quad \frac{2\kappa}{n^2} = \frac{fH}{(n_0^2G + f)^2 + n_0^4H^2}.$$

Die Vergleichung mit (25) ergibt, daß die Bedingung dafür, daß innerhalb des Absorptionsstreifens n als konstant und zwar gleich n_0 angesehen werden kann, die ist, daß in der Klammer des Nenners von (26) f vernachlässigt werden kann. In der Tat: aus (25) folgt ein Maximum für $2n^2\kappa$ bei $G = 0$, aus (26) ein solches für $2\kappa/n^2$ bei $G = f/n_0^2$, sollen beide merklich zusammenfallen, so muß f/n_0^2 eine sehr kleine Größe sein.

In den Formeln (24) stehen die \mathcal{A} an Stelle von $(G + iH)/f$ früher, demgemäß kommt die oben erwähnte Vernachlässigung auf die Beseitigung von 1 neben $\mathcal{A}_0 n_{10}^2$ und $\mathcal{A}'_0 n_{20}^2$ hinaus. Hierdurch gewinnen wir aus (24) die Beziehungen

$$27) \quad \begin{aligned} \frac{n_{10}^2}{\nu^2} &= 1 - \frac{\mathcal{A}'_0}{n_{10}^2(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}'_0 - P^2)}, \\ \frac{n_{20}^2}{\nu^2} &= 1 - \frac{\mathcal{A}_0}{n_{20}^2(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}'_0 - P^2)}. \end{aligned}$$

Diese Formeln haben wegen der Aequivalenz von n_0^2/ν^2 und ν^2/n_0^2 in bezug auf die Berechnung der Absorption genau die Gestalt von (4), nur tritt jetzt neben der Schwingung der Vektorkomponente \mathfrak{X}_0 oder \mathfrak{Y}_0 nicht diejenige der ihr magnetisch gekoppelten \mathfrak{X}_0 oder \mathfrak{Y}_0 auf, sondern je die Schwingung von \mathfrak{Y}_0 resp. \mathfrak{X}_0 . Infolge hiervon lassen sich die S. 511 bis 513 erhaltenen Resultate unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen, und man kann folgendes behaupten.

Haben die Komponenten \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} ihren Absorptionsstreifen gemeinsam ($\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}'_0$), so werden beide bei einer Einwirkung des Feldes parallel der Z -Axe sich symmetrisch teilen. Weichen die beiden Streifen nach Lage und Stärke ein wenig ab, so wird die

Teilung nach Lage und Stärke unsymmetrisch stattfinden und die Dissymmetrie bei beiden Streifen die entgegengesetzte sein. Bei wachsendem Abstand der beiden Streifen (gelegentlich auch bei wachsender Stärke des Magnetfeldes) nimmt die eine Komponente eines jeden von ihnen an Stärke ab, und schließlich bleibt nur eine entgegengesetzte Verschiebung der beiden Streifen übrig. Während die symmetrische Trennung nahezu der Feldstärke selbst proportional verläuft, weicht die dissymmetrische mehr und mehr von diesem Gesetz ab; die einfache Verschiebung folgt näher der Proportionalität mit dem Quadrat der Feldstärke.

Beiläufig sei bemerkt, daß die Gleichungen (27) direkt aus den ersten Formeln (21) und (22) gewonnen werden können, wenn man in diesen das letzte Glied vernachlässigt. Hieraus folgt, daß die S. 12 eingeführte Annäherung mit dieser Vernachlässigung äquivalent ist, und man statt der ersten Formeln (21) und (22) auch schreiben kann

$$(28) \quad \nu^2 = n_{10}^2 + \frac{A_0'}{N}, \quad \nu^2 = n_{20}^2 + \frac{A_0'}{N}.$$

Dies bezüglich der Ausdrücke für ν^2 und ν^2 . Die Formel (23') für ν^2 zeigt, daß diese Größe sich genau verhält wie ν^2 auf S. 5; die Zerlegung des betreffenden Absorptionsstreifens wird hier also durch den mit β gekoppelten Vektor β bestimmt.

Fortpflanzung parallel zum Felde. Schreitet die Welle parallel der Z-Axe, d. h. parallel den magnetischen Kraftlinien fort, so ist $\beta = 0$, und die Formeln (18) für \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} ergeben zwei Schwingungen in Ellipsen, deren große Axen resp. nahe mit der X- und Y-Axe zusammenfallen. Für den komplexen Brechungsindex ν gilt die Formel

$$(29) \quad \left(1 - \nu^2 + \sum \frac{A_{\lambda 0}'}{N_{\lambda}}\right) \left(1 - \nu^2 + \sum \frac{A_{\lambda 0}'}{N_{\lambda}}\right) = \left(\sum \frac{P_{\lambda}}{N_{\lambda}}\right)^2.$$

Sind die beiden Summen links gleich, so ist der Krystall einaxig, und die Z-Axe ist seine optische Axe. Hier ergeben sich dieselben Gesetze wie bei isotropen Medien: Zerlegung der Welle in zwei zirkulare mit den komplexen Brechungsindizes

$$(30) \quad \nu^2 = 1 + \sum \frac{1}{A_{\lambda 0} \pm P_{\lambda}}$$

und demgemäß mit gegen die ursprünglichen symmetrisch verschobenen Absorptionsstreifen. Auf diesen Fall gehen wir nicht näher ein.

Sind die Summen merklich verschieden, d. h., ist in der Rich-

tung der Z -Axe beträchtliche Doppelbrechung vorhanden, so löst man die Gleichung (29) nach ν^2 am besten in der gewohnten Weise durch Annäherung auf, indem man je in dem einen Faktor links denjenigen Wert für $1 - \nu^2$ einsetzt, der den andern zu Null macht. So ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \nu_e^2 &= 1 + \sum \frac{\mathcal{A}'_{\lambda 0}}{N_\lambda} - \frac{\left(\sum \frac{P_\lambda}{N_\lambda}\right)^2}{\sum \frac{\mathcal{A}_{\lambda 0} - \mathcal{A}'_{\lambda 0}}{N_\lambda}}, \\
 \nu_r^2 &= 1 + \sum \frac{\mathcal{A}_{\lambda 0}}{N_\lambda} - \frac{\left(\sum \frac{P_\lambda}{N_\lambda}\right)^2}{\sum \frac{\mathcal{A}'_{\lambda 0} - \mathcal{A}_{\lambda 0}}{N_\lambda}},
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

wobei, wie früher, $N_\lambda = \mathcal{A}_{\lambda 0} \mathcal{A}'_{\lambda 0} - P_\lambda^2$.

In der Umgebung eines der ursprünglichen Absorptionsstreifens schreiben wir wieder

$$\begin{aligned}
 \nu_e^2 &= n_{10}^2 + \frac{\mathcal{A}'_0}{N} - \frac{P^2/N^2}{n_{20}^2 - n_{10}^2 + (\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}'_0)/N}, \\
 \nu_r^2 &= n_{20}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N} - \frac{P^2/N^2}{n_{10}^2 - n_{20}^2 + (\mathcal{A}'_0 - \mathcal{A}_0)/N}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Läßt man wie früher in den mit P^2 proportionalen Gliedern 1 neben $\mathcal{A}n_{20}^2$ und $\mathcal{A}'n_{10}^2$ fort, so kann man dafür schreiben

$$\begin{aligned}
 \nu_e^2 &= n_{10}^2 + \frac{\mathcal{A}'_0}{N} - \frac{P^2}{(n_{10}^2 - n_{20}^2)N^2}, \\
 \nu_r^2 &= n_{20}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N} - \frac{P^2}{(n_{20}^2 - n_{10}^2)N^2}.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Nach dem zu (28) Gesagten darf man annehmen, daß bei merklicher Doppelbrechung auch hier die ersten beiden Glieder die Erscheinung im wesentlichen bestimmen. Es werden demgemäß bezüglich der Qualität der zu erwartenden Erscheinungen die Bemerkungen von S. 518 verwendbar bleiben. Doch mag auf einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Fällen aufmerksam gemacht werden: hier handelt es sich um die Absorptionslinien in zwei Hauptspektren, die beide bei derselben Beobachtungsrichtung wahrgenommen werden können und sich bei einfallendem natürlichen Licht auch superponieren. Dort kamen zusammengehörige, d. h. auf denselben Vektoren beruhende Streifen in zwei Hauptspektren in Betracht, die in zwei zu einander normalen Richtungen beobachtet werden, bei (elektrischen) Schwingungen,

die je der andern Beobachtungsrichtung parallel liegen, die sich also nicht superponieren. Dies ist zu richtigem Verständnis der Vorgänge wohl zu beachten.

Die übereinstimmenden Fälle. Wir wollen nun in einem Schema die verschiedenen Fälle zusammenstellen, die resultieren, wenn man sowohl die Feldstärke P als die Fortpflanzungsrichtung sukzessive in alle drei Koordinatenachsen legt. Dabei sollen die Formeln (21), (22) und (33) in den betreffenden Annäherungen benutzt werden.

$$P \parallel X, \quad \omega \parallel X, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N};$$

$$\omega \parallel Y, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N};$$

$$\omega \parallel Z, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N};$$

$$N = \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_0' - P^2.$$

$$P \parallel Y, \quad \omega \parallel X, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N'}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N'};$$

$$\omega \parallel Y, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N'}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N'};$$

$$\omega \parallel Z, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N'}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N'};$$

$$N' = \mathcal{A}_0' \mathcal{A}_0 - P^2.$$

$$P \parallel Z, \quad \omega \parallel X, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N''}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N''};$$

$$\omega \parallel Y, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{1}{N''}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N''};$$

$$\omega \parallel Z, \quad \nu_z^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0'}{N''}, \quad \nu_x^2 = n_{zo}^2 + \frac{\mathcal{A}_0}{N''};$$

$$N'' = \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_0' - P^2.$$

Man sieht, daß unter den aufgeführten ν^2 eine große Zahl übereinstimmen.

Geht man nun vom rhombischen zu einem optisch einaxigen Kristall über, dessen Hauptaxe die X -Axe sein mag, so ist in den vorstehenden Formeln $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$, $\mathcal{A}_0' = \mathcal{A}_0''$, $n_{zo} = n_{zo}$ zu setzen, und es kommen für den Fall, daß P und $\omega \parallel X$ sind, jetzt die in (30) angegebenen Formeln zur Anwendung. Da überdies hier die Fälle $P \parallel Y$ und $P \parallel Z$ nicht wesentlich verschieden sind, so gelangt man

zu folgendem Schema

$$P \parallel X, \quad \omega \parallel X, \quad \nu_1^s = n_{10}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'_0 - P}, \quad \nu_2^s = n_{20}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'_0 + P}, \quad (\text{IV})$$

$$\omega \parallel Y, \quad \nu_1^s = n_{10}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N}, \quad (\text{II}^s) \quad \nu_2^s = n_{10}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'}, \quad (\text{II}^s)$$

$$\left[\omega \parallel Z, \quad \nu_1^s = n_{10}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'}, \quad \nu_2^s = n_{20}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N} \right],$$

$$N = \mathcal{A}'_0 - P^2.$$

$$P \parallel Y, \quad \omega \parallel X, \quad \nu_1^s = n_{20}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'}, \quad (\text{I}^s) \quad \nu_2^s = n_{20}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N'}, \quad (\text{I}^s)$$

$$\omega \parallel Y, \quad \nu_1^s = n_{20}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N'}, \quad (\text{V}^s) \quad \nu_2^s = n_{10}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N'}, \quad (\text{V}^s)$$

$$\omega \parallel Z, \quad \nu_1^s = n_{10}^s + \frac{\mathcal{A}'_0}{N'}, \quad (\text{III}^s) \quad \nu_2^s = n_{20}^s + \frac{1}{\mathcal{A}'}, \quad (\text{III}^s)$$

$$N' = \mathcal{A}'_0 \mathcal{A}' - P^2.$$

Schließt man die eingeklammerten Fälle aus, die den unmittelbar vorhergehenden äquivalent sind, so erhält man 10 geometrisch verschiedene Fälle, die sämtlich von Herrn J. Becquerel der Beobachtung unterworfen sind. Die in Klammer beigetzten Zahlen geben die Ordnungszahlen der betreffenden Beobachtungsreihe an, wobei die Reihen I, II, III in Herrn Becquerels erster Abhandlung wirklich mit diesen Zahlen bezeichnet sind, den Reihen IV und V in der zweiten Abhandlung aber die betreffenden Zahlen erst beigelegt worden sind.

Nach Herrn Becquerels Beobachtungen bestehen Uebereinstimmungen zwischen den Reihen

$$\text{I}^s \text{ und III}^s, \quad \text{I}^s \text{ und V}^s, \quad \text{III}^s \text{ und V}^s,$$

während die übrigen von einander merklich unabhängig sind. Die vorstehende Tabelle ist hiermit in vollständiger Uebereinstimmung.

Die übrigen Beobachtungsergebnisse. Was im einzelnen das Verhalten der Absorptionsstreifen des Xenotim angeht, so ergaben die Beobachtungen von Herrn J. Becquerel überwiegend dieselben Typen, die im vorstehenden besprochen sind. Symmetrische Zerlegungen oder symmetrische Verbreiterungen, die als der Anfang von solchen aufgefaßt werden können, unsymmetrische Zerlegungen, bei denen die weiter entfernte Komponente die schwächere ist und mit wachsendem Felde sich noch weiter abschwächt, dem entsprechende unsymmetrische Verbreiterungen, endlich Verschiebungen

ohne Andeutungen einer Zerlegung oder Verbreiterung finden sich in der umfangreichen Zusammenstellung verzeichnet; und zwar kommen beide Arten von Dissymmetrien (nach rot und nach violett) ungefähr gleich oft vor. Man wird nach dem Vorstehenden alle diese Erscheinungen als durch das bei dem Zeeman-Effekt der Dämpfe bewährte Erklärungssystem befriedigend dargestellt erachten dürfen.

Das von Herrn J. Becquerel als überraschend besonders hervorgehobene verschiedene Verhalten desselben Absorptionsstreifens des ordinären Hauptspektrum in den Fällen I' und II' ist in vollständiger Uebereinstimmung mit der obigen Zusammenstellung, wo beide Effekte sich durch ganz verschiedene Funktionen darstellen.

Ebenso kann nicht überraschen, daß die Größenordnung der Zerlegungen teilweise die bei Dämpfen beobachteten übertrifft; es handelt sich hier eben um ganz andere Verhältnisse, und eine Berechnung nach den Lorentz'schen Formeln für normale Triplets würde vielfach gar nicht zulässig sein. Insbesondere sind nach der Theorie die Effekte im allgemeinen gar nicht mit der Feldstärke proportional, sondern folgen komplizierteren z. B. quadratischen Gesetzen. Irre ich nicht, so geben die Tabellen Herrn Becquerels auch eine Andeutung für ein solches Verhalten. Während der Autor nämlich ausdrücklich die vollständige Uebereinstimmung der Fälle I' und V' betont, gibt er bei der Linie 4) im ersten Falle bei ca. 32000 Einheiten Feldstärke die Trennung auf $0,84 \mu\mu$ an, im letzten bei ca. 23000 Einheiten auf $0,23 \mu\mu$; hier findet sich also eine Abweichung von der Proportionalität im Sinne des quadratischen oder biquadratischen Gesetzes.

Schwierigkeiten bieten für das Verständnis unter den beobachteten Vorgängen wohl nur die unsymmetrischen Duplets im Falle IV, wo der reine longitudinale Zeeman-Effekt vorliegt. Indessen darf man nicht vergessen, daß es keineswegs sicher ist, ob alle die beobachteten Absorptionsstreifen wirklich einfach sind, daß vielmehr die scheinbar einfachen Streifen bei festen und flüssigen Körpern sehr häufig komplizierten Bau haben¹⁾, der um so schwerer zu erkennen ist, als die Breite der einzelnen Streifen nicht unbeträchtlich zu sein pflegt. Wenn aber ein Streifen aus zwei Komponenten besteht, die sich zwar symmetrisch, aber verschieden zerlegen, so wird das Resultat offenbar unsymmetrisch aussehen.

Ueberhaupt dürfte die Breite der Streifen hier und da kompli-

1) S. z. B. Kettlers Lehrbuch der Optik.

zierend wirken, insofern bei dichter Lage die Komponenten des einen Streifens leicht in das Bereich derjenigen des andern kommen und dann, selbst wenn man (wie oben der Einfachheit halber geschehen) von einer direkten Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Vektorkomponenten $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \dots$ absieht, durch die Superposition scheinbare Verschiebungen der Komponenten eintreten.

Dies bezüglich des Verhaltens der Absorptionsstreifen. Was die Beobachtungen der Doppelbrechung und der Polarisationsverhältnisse angeht, so bedürfen m. E. (wie ich schon im Eingang bemerkte) einige der von H. Becquerel beschriebenen Erscheinungen zu vollständiger Aufklärung noch ergänzender Beobachtungen. Demgemäß mag es hier an einigen einzelnen Bemerkungen genügen.

Wie die (angedeutete) magnetische Doppelbrechung in der Richtung der optischen Axe infolge eines zu ihr normalen Magnetfeldes sich erklärt, zeigt die Zusammenstellung auf S. 522 in den mit I' und I'' bezeichneten Formeln.

Das anormale Verhalten der Rotationspolarisation bei einigen Linien, falls längs der in die Kraftlinien gelegten optischen Axe beobachtet wird (Fall IV), ist nicht so ganz ohne Analogien. Man kennt schon längst einige Körper, z. B. Eisenchlorid¹⁾, bei denen im Gebiete unmerklicher Absorption die elektromagnetische Drehung nicht (wie gewöhnlich) im Sinne der das Feld erzeugenden Ströme, sondern entgegengesetzt stattfindet. Jedes derartige Verhalten läßt nach der Theorie die Anwesenheit von Absorptionsstreifen von anormalem Verhalten vermuten. Dergleichen Streifen mögen noch häufiger vorkommen, als bekannt, aber durch die Wirkung zahlreicherer und kräftigerer Absorptionsstreifen von normalem Verhalten in demselben Spektrum verdeckt sein.

Der Schluß, daß bei solchen anormalen Streifen positive Ladungen die Eigenschwingungen ausführen, ist nicht völlig zwingend. Eine bekannte Theorie des Diamagnetismus nimmt z. B. an, daß die Erregung des Feldes Molekularbewegungen induziert, die innerhalb gewisser molekularer Bereiche ein Feld von entgegengesetzter Richtung bewirken. Wenn in solchen Bereichen negative Elektronen schwingen, so werden sie zu Absorptionsstreifen von dem beschriebenen anormalen Verhalten Veranlassung geben. Die Möglichkeit eines solchen Vorganges ist jedenfalls zuzugeben.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 24, p. 614 u. f., 1885.

Ueber das Verhalten von Schwermetallsulfiden in wässriger Lösung.

Von
Oskar Welgel.

Vorgelegt von Th. Liebisch in der Sitzung vom 8. Dezember 1906.

I. Teil: Die Löslichkeit von Schwermetallsulfiden in reinem Wasser.

Die Arbeit, deren erster Teil hier vorliegt, verfolgt das Ziel, die physikalischen Constanten der sulfidischen Erze festzustellen, die zu einem klaren Einblick in die Bildung der Erzgänge und Erzlager nötig sind. Der erste Teil umfaßt die Löslichkeit der wichtigsten Schwermetallsulfide in reinem Wasser. Später folgende Teile sollen die Temperaturcoefficienten der Löslichkeit und die Löslichkeitsbeeinflussung behandeln.

A. Arbeitsmethode.

1. Berechnung der Concentration aus der Leitfähigkeit. — Bei der außerordentlich kleinen Löslichkeit der untersuchten Stoffe war nur auf zwei Wegen eine erfolgreiche Bestimmung zu erwarten: durch die Messung der elektrischen Leitfähigkeit der gesättigten Lösung oder der elektromotorischen Kraft der Schwermetallelektrode in einer Lösung. Die letztere Methode konnte im vorliegenden Falle nicht in Frage kommen, da Elektroden von genügender Reinheit und Größe nicht in allen Fällen beschafft werden konnten.

Der Anwendung der erstgenannten Methode standen ebenfalls verschiedene Schwierigkeiten im Wege. Es handelte sich um die Fragen: In Form welcher Ionen geht das Sulfid in Lösung, welche Beweglichkeit kommt diesen Ionen zu, und wie weit ist das gelöste Sulfid hydrolytisch gespalten? Diese drei Fragen lösten sich

überraschend einfach; denn es zeigte sich im Verlauf der Untersuchung, daß richtige Löslichkeitswerte erhalten werden, wenn quantitative Hydrolyse des gelösten Sulfids angenommen wird, so daß als Ionen nur das Metall-Ion und das Hydroxyl-Ion in Frage kommen. Der bei der Hydrolyse gebildete Schwefelwasserstoff besitzt, wie Messungen ergaben, eine so geringe Leitfähigkeit, daß diese gegenüber dem Leitvermögen des Hydroxyds vernachlässigt werden kann.

In einigen Fällen wurde eine genaue Bestimmung der Löslichkeit dadurch unmöglich gemacht, daß bislang die Beweglichkeiten mancher Metall-Ionen nicht oder nur ungenau bekannt sind.

2. Thermostat. — Die Leitfähigkeitsmessungen wurden stets bei 18° C ausgeführt. Auch die Sättigung der Lösung fand fast stets bei dieser Temperatur statt; nur in Ausnahmefällen wurde zur schnelleren Erreichung des Lösungsgleichgewichtes die Temperatur für einige Zeit erhöht. Als Thermostat diente ein verzinktes Eisenblechgefäß von etwa 45 Liter Inhalt, dessen Temperatur durch einen Toluolregulator auf $\pm 0.03^\circ$ constant erhalten werden konnte. Die Temperatur wurde mit einem in $\frac{1}{10}^\circ$ geteilten Thermometer bestimmt. Um bei höherer Zimmertemperatur die Temperatur des Bades auf 18° halten zu können, wurde durch eine im Thermostaten liegende Bleischlange ein constanter Strom von Leitungswasser geschickt.

3. Sättigungsgefäß. — Das Sättigungsgefäß war nach den Angaben und der Zeichnung hergestellt, die W. Böttger¹⁾ der Beschreibung seines Gefäßes *D* beigegeben hat. Die Electroden waren nicht platinirt. Die Kapazität betrug 0.0935 ± 0.0001 . Die Messung der Kapazität wurde mit $\frac{1}{10}$ n., $\frac{1}{100}$ n., $\frac{1}{200}$ n. Chlorkaliumlösung vorgenommen und durch die Leitfähigkeitsmessung einer gesättigten Gypslösung kontrolliert. Zur Herstellung der Normallösungen wurde Chlorkalium von Merck verwandt, das gelöst und mit Alkohol wieder gefällt wurde. Die Normallösungen wurden durch Titration mit Silbernitrat und Rhodanammonium auf ihren Gehalt geprüft.

Das Leitfähigkeitsgefäß wurde durch eine federnde Klammer an einer horizontalen Welle im Thermostaten befestigt, die durch einen Heißluftmotor gedreht wurde. Ein besonderer Rührer erwies sich bei dieser Anordnung als überflüssig. Vor der Benutzung war das Leitfähigkeitsgefäß zwei Tage ausgedämpft. Die Löslich-

1) W. Böttger, Z. S. f. phys. Chem. 46. 1903. 541.

keit des Glases war hierdurch so herabgedrückt, daß sich Leitfähigkeitswasser in dem Gefäße sechs Wochen unverändert hielt.

4. Messapparate. — Die Leitfähigkeit wurde durch die Wheatstonesche Brückenschaltung mit Induktorium und Telephon bestimmt. Als Messbrücke diente eine Walzenbrücke mit einer Drahtlänge von 1.5 m. Der Draht wurde auf Kaliberfehler geprüft. Von den zwei benutzten Widerstandskästen enthielt der eine Widerstände von 1 bis 10 000 Ohm, der zweite solche von 10 000, 20 000, 30 000 Ohm. Ein Vergleich beider ergab Abweichungen von höchstens $\frac{1}{2000}$ des Nennwertes. Das kleine Induktorium besaß einen Quecksilber-Unterbrecher. Bisweilen wurde zur Verbesserung des Tonminimums ein selbstangefertigter Condensator aus zwei von einander isolierten Zinkblechplatten benutzt, der durch einen Umschalter sowohl dem Widerstandskasten wie dem Leitfähigkeitsgefäß parallel geschaltet werden konnte.

5. Leitfähigkeitswasser. — Reines Wasser zu erhalten, hatte im Laboratorium seine besonderen Schwierigkeiten. Es wurde gewöhnliches destilliertes Wasser aus einem Jenaer Glasgefäß destilliert und durch einen Silberkühler condensiert. Das Wasser wurde in einem Kolben von 5 Liter Inhalt mit Heberschluß aufbewahrt, in den Luft nur durch ein langes mit Natronkalk gefülltes Rohr treten konnte. Die Reinheit des Wassers schwankte sehr, so dass bisweilen seine Leitfähigkeit bis 1.5×10^{-6} stieg.

6. Die untersuchten Stoffe. — Zur Untersuchung kamen sowohl kristallisierte wie gefällte Sulfide; die kristallisierten waren teils natürliche Mineralien, teils waren sie künstlich dargestellt. Eine kurze Andeutung über die Herstellungsmethode dieser künstlichen Sulfide ist im Kapitel B jeder einzelnen Substanz beigegeben. Ihre Darstellung und die Untersuchung einiger ihrer physikalischen Eigenschaften wurde in Gemeinschaft mit Herrn Biltz ausgeführt. Die Ergebnisse werden in einer besonderen Mitteilung in ihren Einzelheiten beschrieben werden.

Die natürlichen und künstlichen kristallisierten Sulfide wurden sämtlich analysiert. Die Analysen wurden im hiesigen Laboratorium von den Herren Schwabe und Block ausgeführt, denen ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

B. Versuche.

Zur Ausführung der Versuche wurde das nötigenfalls gepulverte Sulfid mehrere Tage mit Leitfähigkeitswasser gewaschen und dann in das Sättigungsgefäß gebracht, wo es noch einige Male mit Leitfähigkeitswasser abgspült wurde.

Das Leitvermögen des reinen Wassers wurde vor der Ausführung des Versuchs im Sättigungsgefäß bestimmt; bisweilen wurde auch das eingefüllte Sulfid vorsichtig mit Wasser überschichtet, und so die Leitfähigkeit des Wassers vor dem Schütteln gemessen.

Dann begann bei constanter Temperatur das Rotieren. Von Zeit zu Zeit angestellte Messungen der Leitfähigkeit gaben Aufschluß über das Fortschreiten der Sättigung, und der Versuch wurde erst dann abgebrochen, wenn geraume Zeit keine Zunahme der Leitfähigkeit mehr festzustellen war. Die zur Sättigung der Lösung nötige Zeit schwankte bei den verschiedenen Sulfiden zwischen einigen Minuten und zehn Wochen.

Die meisten Bestimmungen wurden durch Wiederholung kontrolliert. Von den nur innerhalb der Versuchsfehler schwankenden Messungen ist im folgenden eine, die einwandfreieste, mitgeteilt.

1. **Bleisulfid.** Als Beweglichkeit für das Blei-Jon wurde 61.5, für das Hydroxyl-Jon 174 angenommen.

a. Bleiglanz von Freiberg in Sachsen.

Ausgesucht reine Spaltungsstücke wurden gepulvert und zunächst mit siedendem, dann Tage lang mit kaltem Leitfähigkeitswasser gewaschen.

| | I | II | Theoretisch | |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| Analysen: | Pb 86.46 % | Pb 86.52 % | Pb 86.58 % | |
| | S 13.35 % | S 13.39 % | S 13.42 % | |
| | <u>99.81 %</u> | <u>99.91 %</u> | <u>100.00 %</u> | |
| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
| 21 Std. | 1.112×10^{-6} | 1.679×10^{-6} | 0.567×10^{-6} | 1.20×10^{-6} |

b. Bleiglanz, künstlich dargestellt durch Sublimation von gefälltem Bleisulfid bei 1100° in reinem Stickstoff.

| | | Theoretisch |
|----------|----------------|-----------------|
| Analyse: | Pb 87.04 % | 86.58 % |
| | S 12.84 % | 13.42 % |
| | <u>99.88 %</u> | <u>100.00 %</u> |

Aus der Analyse ergibt sich, daß der Bleiglanz freies Blei enthielt; auf den Löslichkeitswert kann dieses infolge seiner äußerst kleinen Löslichkeit keinen Einfluß ausgeübt haben.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 20 Std. | 1.236×10^{-6} | 1.807×10^{-6} | 0.571×10^{-6} | 1.21×10^{-6} |

c. Bleisulfid, gefällt aus Bleiacetatlösung durch Schwefelwasserstoff.

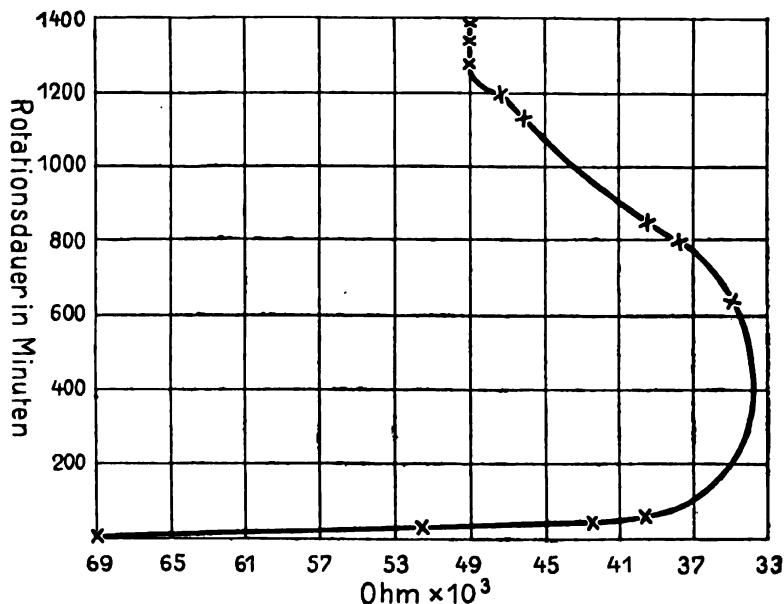
Die Messung wurde noch am Tage der Fällung vorgenommen.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 5 Std. | 1.230×10^{-6} | 2.922×10^{-6} | 1.692×10^{-6} | 3.60×10^{-6} |

d. Bleisulfid, gefällt aus Bleiacetatlösung durch Schwefelwasserstoff.

Da sich beim Versuche c bei fortgesetztem Schütteln eine immer weiter abnehmende Leitfähigkeit zeigte, wurde noch eine zweite Versuchsreihe angestellt. Die folgende Tabelle (vergl. die Figur) zeigt, daß anfangs der Widerstand rasch bis zu einem Minimum sinkt, um dann nach einer Zeit annähernder Constanz wieder zu steigen, bis er einen konstanten Endwert annimmt. Dieser Endwert entspricht der Löslichkeit des Bleiglanzes. Das gefällte amorphe Bleisulfid besitzt demnach große Neigung in den kristallisierten Zustand überzugehen.

| Rotationsdauer in Minuten | Widerstand in Ohm | Leitfähigkeit |
|------------------------------|----------------------|------------------------|
| 0 | 69000 | 1.355×10^{-6} |
| 20 | 51300 | |
| 45 | 42470 | |
| 60 | 39285 | |
| 655 | 34790 | |
| 810 | 37700 | |
| 850 | 39285 | |
| 1165 | 46350 | |
| 1195 | 47130 | |
| 1280 | 48930 | |
| 1340 | 48940 | |
| 1385 | 48930 | |
| | | 1.910×10^{-6} |



Umwandlung des amorphen Bleisulfids in Bleiglanz.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1385 Min. | 1.355×10^{-6} | 1.910×10^{-6} | 0.555×10^{-6} | 1.18×10^{-6} |

Der erhaltene Löslichkeitswert ist also fast genau der des Bleiglanzes.

Nach der graphischen Interpolation liegt das Maximum der Leitfähigkeit bei etwa 33700 Ohm, was einer Concentration von 3.52×10^{-6} Molen im Liter entsprechen würde. Beim Versuch c war für das amorphe Bleisulfid eine Löslichkeit von 3.60×10^{-6} Molen i. Liter erhalten.

Der durch die Versuche a, b und d erhaltene Löslichkeitswert für Bleiglanz stimmt nicht im geringsten mit der Angabe von J. Bernfeld ¹⁾, der die Aequivalentconcentration von Bleisulfid in einer mit Schwefelwasserstoff gesättigten Natriumsulfidlösung zu $2,9 \times 10^{-6}$ bestimmte.

2. Quecksilbersulfid.

Die Beweglichkeit für das Quecksilber-Jon wurde gleich der des Cadmium-Jons gesetzt, für die F. Kohlrausch ²⁾ als wahrscheinliche Zahl 47.4 angiebt.

1) Bernfeld, Z. S. f. phys. Chem. 25. 1898. 46.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 64. 1898. 454.

Zur Untersuchung kam nur schwarzes Quecksilbersulfid, das aus Mercuronitratlösung durch Schwefelwasserstoff gefällt war.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 20 Min. | 1.200×10^{-6} | 1.224×10^{-6} | 0.024×10^{-6} | 0.054×10^{-6} |

3. Silbersulfid.

Als Beweglichkeit für das Silber-Jon wurde 54.5 angenommen.

a. Silbersulfid, gefällt aus Silbernitratlösung durch Schwefelwasserstoff.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 30 Min. | 1.142×10^{-6} | 1.394×10^{-6} | 0.252×10^{-6} | 0.55×10^{-6} |

Das Silbersulfid zeichnet sich dadurch aus, daß es sich sehr rasch auswaschen läßt und schon nach kurzer Rotationsdauer einen ausgezeichneten Endwert liefert. Mehrere Controllversuche führten sämtlich genau zu dem oben gegebenen Werte.

b. Silberglanz von Freiberg in Sachsen.

| | I | II | Theoretisch |
|-----------|----------------|----------------|-----------------|
| Analysen: | Ag. 86.74 % | Ag. 86.78 % | Ag. 87.07 % |
| | S 12.72 % | S 12.78 % | S 12.93 % |
| | <u>99.46 %</u> | <u>99.56 %</u> | <u>100.00 %</u> |

Der Silberglanz ließ sich nicht zu Pulver zerkleinern, da Feilen und dergl. nicht angewandt werden durften. Er wurde in einer Achatreibschale zu kleinen Blättchen geschlagen, die nach gutem Auswaschen in das Leitfähigkeitsgefäß gefüllt wurden.

Der Bestimmung der Löslichkeit des Silberglanzes stellten sich unerwartete Schwierigkeiten entgegen, die durch folgende Beobachtungstabelle erläutert werden.

| Rotationsdauer in Minuten | Widerstand in Ohm | Leitfähigkeit |
|------------------------------|----------------------|------------------------|
| 0 | 73800 | 1.267×10^{-6} |
| 210 | 72750 | |
| 330 | 70680 | 1.323×10^{-6} |
| 540 | 74910 | |
| 1740 | 76380 | 1.224×10^{-6} |

Die Leitfähigkeit nimmt zunächst ab, um dann auf einen höheren Wert als den Anfangswert zu steigen. Das Leitfähigkeitswasser hat also durch die Zufügung des Silberglanzes eine Reinigung erfahren.

Vielleicht liegt hier eine Wirkung der Porosität des Silberglanzes vor, auf die ich in einer früheren Arbeit¹⁾ hinwies. Das poröse Silbersulfid befreit das Wasser von den gelösten Gasen, die es in sich aufnimmt. Der Vorgang erinnert sehr an die gleiche Wirkung des Platins.

Auf die Bestimmung der Löslichkeit des Silberglanzes habe ich danach verzichtet; wahrscheinlich wird der Wert identisch sein mit dem des gefällten Silbersulfids, das einen durchaus kristallinen Eindruck macht.

4. Sulfide des Kupfers.

Als Beweglichkeit wurde für das Kupfer-Jon 49 angenommen.

a. Kupfersulfid, aus heißer neutraler Kupfersulfatlösung durch Schwefelwasserstoff gefällt. Die über dem Niederschlag stehende colloidale Lösung wurde abgegossen. Der Niederschlag setzte sich vorzüglich ab.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 24 Std. | 1.140×10^{-6} | 2.703×10^{-6} | 1.563×10^{-6} | 3.51×10^{-6} |

Der Wert für die Löslichkeit des Kupfersulfids ist nicht ganz sicher, da ein scharfer Endwert nicht erhalten wurde.

b. Kupfersulfür.

Das Kupfersulfür wurde dargestellt, indem gefälltes Kupfersulfid mit einem Zusatz von Schwefel zweimal im Rose-Tiegel im Wasserstoffstrom geglüht wurde.

| I | | II | | Theoretisch |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| Analysen: | Cu 80.07 % | Cu 80.10 % | Cu 80.10 % | Cu 79.88 % |
| | S 19.86 % | S 19.88 % | S 19.88 % | S 20.12 % |
| | <u>99.93 %</u> | <u>99.98 %</u> | | <u>100.00 %</u> |
| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
| 48 Std. | 1.368×10^{-6} | 3.055×10^{-6} | 1.687×10^{-6} | 3.10×10^{-6} |

Zur Berechnung der Concentration wurde angenommen, daß die Hydrolyse nach der Formel verläuft: $\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{H}_2\text{O} = 2\text{CuOH} + \text{H}_2\text{S}$.

1) O. Weigel, N. J. f. Min. Beil. Bd. XXI. 825. 1906.

5 Kadmiumsulfid.

Als Beweglichkeit des Kadmium-Jons wurde 47.4 angenommen ¹⁾.

a. Greenockit, dargestellt durch Sublimation von gefällttem Kadmiumsulfid in reinem Stickstoff bei heller Weißglut. Gut ausgebildete, schwach gelbliche trigonale Kristalle.

| Analyse: | | Theoretisch. |
|----------|----------------|-----------------|
| Cd | 77.55 % | Cd. 77.81 % |
| S | 22.34 % | S 22.19 % |
| | <u>99.89 %</u> | <u>100.00 %</u> |

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 40 Std. | 1.112×10^{-6} | 5.092×10^{-6} | 3.980×10^{-6} | 8.84×10^{-6} |

b. Kadmiumsulfid, gefällt aus Kadmiumsulfatlösung durch Schwefelammonium. Zwei Tage nach der Fällung wurde der Niederschlag untersucht.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 20 Std. | 1.206×10^{-6} | 5.194×10^{-6} | 3.988×10^{-6} | 8.86×10^{-6} |

Das gefällte Kadmiumsulfid und der Greenockit geben denselben Löslichkeitswert. Das Kadmiumsulfid wird demnach entweder als Greenockit gefällt oder ist im Verlaufe von zwei Tagen kristallin geworden.

6. Zinksulfid.

Als Beweglichkeit wurde für das Zink-Jon 47 angenommen.

a. Zinkblende von Santander.

| Analysen: | I | II | Theoretisch. |
|---|-----------------|--|-----------------|
| Zn | 66.42 % | Zn 66.37 % | Zn 66.45 % |
| S | 32.63 " | S 32.54 " | S 32.58 " |
| SiO ₂ | 0.32 " | SiO ₂ 0.10 " | Rest 0.97 " |
| Al ₂ O ₃ + Fe ₂ O ₃ | 0.65 " | Al ₂ O ₃ + Fe ₂ O ₃ 1.01 " | |
| | <u>100.02 %</u> | <u>100.02 %</u> | <u>100.00 %</u> |

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 5 Std. | 1.212×10^{-6} | 4.148×10^{-6} | 2.936×10^{-6} | 6.65×10^{-6} |

b. Zinkblende, dargestellt durch Einwirkung von Schwefelwasserstoff auf Zinkchloriddämpfe bei schwacher Rotglut.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 64. 1898. 454.

Die auf diese Weise erhaltenen Kristalle waren der äußeren Form nach größtenteils als Wurtzit anzusprechen, einige Kristalle wiesen dagegen reguläre Formen auf.

Wahrscheinlich haben sich bei der Abkühlung die hexagonalen Wurtzite infolge der vorhandenen Keime der stabilen regulären Modifikation in Zinkblende umgewandelt. Auch das undurchsichtige Aussehen der Kristalle an manchen Stellen deutete darauf hin. Doch würde dies Verhalten mit der bisherigen Auffassung, daß das System Zinkblende-Wurtzit ein monotropes sei, im Widerspruch stehen.

| Analysen: | | I | II | Theoretisch. |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| | Zn | 63.83 % | 63.42 % | 63.68 % |
| | S | 31.23 " | 31.32 " | 31.22 " |
| | Rest Wasser | | | 5.1 " |
| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
| 7 Std. | 1.360×10^{-6} | 4.290×10^{-6} | 2.930×10^{-6} | 6.63×10^{-6} |

c. Wurtzit, dargestellt durch Erhitzen von gefälltem Zinksulfid in reinem Stickstoff auf 1700°—1800°. Schöne klare hexagonale Kristalle.

| Analysen | | I | II | Theoretisch. |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| | Zn | 66.99 % | 66.87 % | 67.10 % |
| | S | 32.76 " | 32.74 " | 32.90 " |
| | | <u>99.75 %</u> | <u>99.61 %</u> | <u>100.00 %</u> |
| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
| 20 Std. | 1.45×10^{-6} | 14.21×10^{-6} | 12.76×10^{-6} | 28.82×10^{-6} |

d. Zinksulfid, gefällt aus Zinksulfatlösung durch Schwefelammonium. Die Messung wurde am Tage nach der Fällung vorgenommen.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 12 Std. | 1.368×10^{-6} | 32.60×10^{-6} | 31.23×10^{-6} | 70.6×10^{-6} |

Gefälltes Zinksulfid geht bei längerem Stehen in kristallisiertes Zinksulfid über, das die Löslichkeit der Zinkblende zeigt. Gefälltes Zinksulfid, das zwei Monate unter Wasser gestanden hatte, besaß eine Löslichkeit von 6.4×10^{-6} Mol. i. Liter. Infolge einer mangelhaften Wasserbestimmung mußte die zweite Stelle nach dem Komma unbestimmt bleiben.

7. Nickelsulfid.

Die Beweglichkeiten der Ionen des Eisens, Mangans, Nickels und Kobalts sind bislang nicht festgestellt. Angenäherte Werte wurden für sie auf folgende Weise erhalten. Ein Vergleich der Werte Λ für verschiedene Concentrationen bei Nickel-, Kobalt- und Kupfernitrat erlaubt die Annahme, daß die Beweglichkeit des Nickel-Ions um etwa zwei Einheiten, die des Kobalt-Ions um etwa vier Einheiten hinter der Beweglichkeit des Kupfer-Ions zurücksteht. Die Tabelle ist dem Buche „Kohlrausch und Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte“ entnommen, die Messungen stammen von Loeb und Nernst.

| für $\frac{1}{m} =$ | Λ | | | |
|---|-----------|-------|-------|-------|
| | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| $\frac{1}{2}$ Ni(NO ₃) ₂ | 110.8 | 115.8 | 118.1 | 120.8 |
| $\frac{1}{2}$ Co(NO ₃) ₂ | 108.9 | 112.8 | 115.9 | 118.6 |
| $\frac{1}{2}$ Cu(NO ₃) ₂ | 116.1 | 119.2 | 120.4 | 122.5 |

Aus den Werten Λ für Mangan-, Eisen- und Zinksulfat ergibt sich, dass die Beweglichkeit des Mangan-Ions etwa gleich der des Kobalt-Ions, die des Eisens gleich der des Zinks zu setzen ist. Die in folgender Tabelle mitgeteilten Werte für Zinksulfat sind von Kohlrausch, die für Eisen- und Mangansulfat von von Klein gemessen. Auch diese Zahlen sind den Tabellen von Kohlrausch und Holborn entnommen; die Zahlen für Eisen- und Mangansulfat sind durch Interpolation auf dieselbe Concentration umgerechnet, für welche das Leitvermögen des Zinksulfats angegeben ist.

| für $m =$ | Λ | | | |
|---------------------------------|-----------|-------|-------|-------|
| | 0.65 | 1.37 | 2.17 | 3.05 |
| $\frac{1}{2}$ FeSO ₄ | 29.3 | 23.75 | 18.8 | 15.18 |
| $\frac{1}{2}$ ZnSO ₄ | 29.3 | 23.42 | 19.13 | 15.33 |
| $\frac{1}{2}$ MnSO ₄ | 27.92 | 22.21 | 17.72 | 14.13 |

Für die Berechnung der Löslichkeit wurden folgende Ionenbeweglichkeiten angenommen: $\frac{1}{2}$ Fe = $\frac{1}{2}$ Ni = 47, $\frac{1}{2}$ Co = $\frac{1}{2}$ Mn = 45.

a. Millerit, dargestellt durch Schmelzen von gefälltem Nickelsulfid in reinem Stickstoff bei 1800°. Feinkörnige kristalline silberweiße Masse.

| Analysen: | I | II | Theoretisch. |
|-----------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| | Ni 64.32 % | Ni 64.27 % | Ni 64.29 % |
| | S 35.11 " | S 35.11 " | S 35.11 " |
| | Al ₂ O ₃ 0.31 " | Al ₂ O ₃ 0.49 " | Al ₂ O ₃ 0.40 " |
| | <u>99.74 %</u> | <u>99.87 %</u> | <u>100.00 %</u> |

Der Thonerdegehalt stammt aus dem Porzellanrohr, in dem das Sulfid geschmolzen wurde, da bei 1800° das Porzellan zu fließen beginnt.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 80 Std. | 1.349×10^{-6} | 8.550×10^{-6} | 7.201×10^{-6} | 16.29×10^{-6} |

b. Nickelsulfid, gefällt aus Nickelnitratlösung durch Schwefelammonium. Da sich das Sulfid beim Stehen unter Wasser fortgesetzt oxydierte, wurde während der Zeit des Auswaschens reiner Wasserstoff durch das Leitfähigkeitswasser geleitet.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 13 Std. | 1.078×10^{-6} | 18.70×10^{-6} | 17.62×10^{-6} | 39.87×10^{-6} |

8. Kobaltsulfid, aus neutraler Kobaltsulfatlösung durch Schwefelammonium gefällt.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 10 Std. | 1.404×10^{-6} | 19.64×10^{-6} | 18.23×10^{-6} | 41.62×10^{-6} |

9. Sulfide des Eisens.

a. Magnetkies, dargestellt durch Schmelzen von gefälltem Eisensulfür in reinem Stickstoff bei Weißglut. Schwach gelbliche kristalline Masse mit hohem Metallglanz.

| Analysen: | I | II | Theoretisch. |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Fe 63.43 % | Fe 63.47 % | Fe 63.55 % |
| | S 36.58 " | S 36.60 " | S 36.45 " |
| | <u>100.01 %</u> | <u>100.07 %</u> | <u>100.00 %</u> |

Aus den Analysen ergibt sich das Verhältnis Fe:S = 2.034:2.045. Demnach enthält auch der künstliche Magnetkies mehr Schwefel als der Verbindung FeS entspricht. Die Bestimmung der Löslichkeit des Magnetkieses machte unter allen Sulfiden die größten Schwierigkeiten. Verschiedene Male wurden Versuche

aufgegeben, weil sich nach tagelangem Schütteln keine Leitfähigkeitszunahme zeigte. Erst ein sehr ausgedehnter Dauerversuch lehrte, daß der Magnetkies eine bedeutende Löslichkeit besitzt, aber eine außerordentlich kleine Lösungsgeschwindigkeit.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 77 Tage. | 1.028×10^{-6} | 24.72×10^{-6} | 23.69×10^{-6} | 53.60×10^{-6} |

b. Eisensulfür, gefällt aus Ferrosulfatlösung durch Schwefelammonium. Das Auswaschen des Niederschlags erfolgte in Wasserstoffatmosphäre.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 4 Std. | 1.260×10^{-6} | 32.24×10^{-6} | 30.98×10^{-6} | 70.1×10^{-6} |

Der Löslichkeitswert des gefällten Eisensulfürs ist etwas unsicher, da keine vollständige Constanz der Leitfähigkeit sich erreichen ließ.

c. Pyrit von Freiberg in Sachsen.

Zur Berechnung der Concentration aus der Leitfähigkeit wurde angenommen, daß die Hydrolyse des Sulfids nach der Formel verläuft: $\text{FeS}_2 + 2\text{H}_2\text{O} = \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2\text{S} + \text{S}$. Der hierbei entstehende Schwefel wird vermutlich mit dem Schwefelwasserstoff ein Polysulfid bilden.

| | I | II | Theoretisch. |
|-----------|----------------|----------------|-----------------|
| Analysen: | Fe 46.60 % | Fe 46.58 % | Fe 46.62 % |
| | S 53.34 % | S 53.35 % | S 53.38 % |
| | <u>99.94 %</u> | <u>99.93 %</u> | <u>100.00 %</u> |

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Zunahme | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 24 Std. | 1.205×10^{-6} | 19.28×10^{-6} | 18.07×10^{-6} | 40.89×10^{-6} |

d. Pyrit, künstlich.

Dieser Pyrit wurde dargestellt nach einer von Glatzel¹⁾ angegebenen Methode. Es wurden 25 g P_2S_5 mit 50 g wasserfreiem FeCl_3 zwei Stunden in einer Retorte auf dem Sandbade erhitzt, wobei PSCl_3 in die Vorlage überdestillierte. Auf dem Drahtnetz wurde die Retorte noch eine weitere Stunde mit einem kräftigen Brenner erhitzt. Die Retorte war in ihrem unteren Teile mit einer grauweißen Masse erfüllt, die von einer schwärzlichen Schicht bedeckt war. Die graue Masse und vor allem ihr oberer Teil

1) Glatzel, Z. S. f. anorg. Chem. 4. 1893. 198.

war erfüllt von schwebend ausgebildeten Pyritkriställchen, die Hexaeder- und Pentagondodekaederflächen zeigten. Die graue Masse wurde zerrieben und so lange mit siedendem Wasser ausgewaschen, bis das Waschwasser keine Eisenreaction mehr gab.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 16 Std. | 1.433×10^{-6} | 19.48×10^{-6} | 18.05×10^{-6} | 40.84×10^{-6} |

10. Mangansulfür.

a. Grünes Mangansulfür.

Es wurde erhalten, indem eine mäßig verdünnte Mangansulfatlösung in der Siedehitze mit einem großen Ueberschuß von Ammoniumpolysulfid schnell versetzt wurde. Der grüne Niederschlag wurde mit Wasserdampf ausgewaschen und im Schwefelwasserstoffstrom bei 180° getrocknet.

| Analyse: Mn 62.87 % | | | Theoretisch. | |
|---------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| S 36.65 % | | | Mn 63.17 % | |
| <u>99.55 %</u> | | | <u>S 36.83 %</u> | |
| | | | 100.00 % | |
| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
| 25 Min. | 1.230×10^{-6} | 24.61×10^{-6} | 23.38×10^{-6} | 54.50×10^{-6} |

b. Fleischfarbenes Mangansulfür, aus Mangansulfatlösung durch Schwefelwasserstoff gefällt.

Einen Tag nach der Fällung wurde der Niederschlag untersucht.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 90 Min. | 1.261×10^{-6} | 32.60×10^{-6} | 31.34×10^{-6} | 71.60×10^{-6} |

11. Sulfide des Zinns.

Als Beweglichkeit des Sn-Jons wurde 61.5 angenommen.

a. Zinnsulfür.

Das Sulfür wurde durch Entschwefeln des gefällten Sulfids in reinem Stickstoff bei 1000° dargestellt. Es bildet eine schwarze metallglänzende Masse aus großen Krystallblättern.

| Analysen: | I | II | Theoretisch. |
|-----------|------------------|------------------|------------------|
| | Sn 79.26 % | Sn 79.04 % | Sn 78.20 % |
| | S 20.20 % | S 20.00 % | S 21.15 % |
| | Rückstand 0.53 % | Rückstand 0.75 % | Rückstand 0.65 % |
| | <u>99.99 %</u> | <u>99.79 %</u> | <u>100.00 %</u> |

Das krystallisierte SnS enthält also freies Sn, wie der künstliche Bleiglanz freies Pb. Infolge seiner unendlich kleinen Lös-

lichkeit kann das metallische Zinn auf den erhaltenen Löslichkeitswert keinen nennenswerten Einfluß gehabt haben. Der Rückstand bestand aus Porzellanstückchen, die von dem Rohre stammten, in dem das Sulfid geschmolzen wurde.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 7 Std. | 1.050×10^{-6} | 1.118×10^{-6} | 0.068×10^{-6} | 0.14×10^{-6} |

b. Zinnsulfid, Musivgold, Praeparat von Schuchardt, aus dem auch das Sulfür hergestellt wurde.

Zur Berechnung der Concentration aus der Leitfähigkeit wurde angenommen, daß die Hydrolyse des Sulfids nach derselben Formel verläuft wie die des Pyrits.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 24 Std. | 1.206×10^{-6} | 1.738×10^{-6} | 0.532×10^{-6} | 1.13×10^{-6} |

12. **Arsentrisulfid**, aus arseniger Säure durch Schwefelwasserstoff gefällt. Vier Tage nach der Fällung wurde der Niederschlag untersucht.

Zur Löslichkeitsbestimmung der Sulfide des Arsens, Antimons und Wismuths aus der Leitfähigkeit mußte ein besonderer Weg eingeschlagen werden, da bei diesen drei Stoffen für die Beweglichkeit des Kations in der Litteratur kein Anhaltspunkt gegeben ist.

Aus der Löslichkeitsbestimmung des Arsentrisulfids durch Herrn Biltz¹⁾ auf ultramikroskopischem Wege und meiner Leitfähigkeitsmessung wurde die Beweglichkeit des Arsen-Jons berechnet und für das Antimon und Wismuth derselbe Wert angenommen. Vor allem für das Wismuth wird die Annäherung an den richtigen Wert nur eine sehr grobe sein.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|---------------|
| 10 Std. | 1.200×10^{-6} | 4.463×10^{-6} | 3.263×10^{-6} | — |

Herr Biltz fand für den Gehalt der gesättigten Arsensulfidlösung 2.1×10^{-6} Mole im Liter. Nimmt man an, daß das gelöste Sulfid nach der Formel hydrolytisch gespalten ist: $\text{As}_2\text{S}_3 + 6\text{H}_2\text{O} = 2\text{As}(\text{OH})_3 + 3\text{H}_2\text{S}$, so folgt aus dem Leitfähigkeitswert für das Arsen-Jon die Beweglichkeit $\text{As}/_3 = 85$.

13. **Antimonttrisulfid**, aus Brechweinsteinlösung mit Schwefelwasserstoff gefällt. 3 Tage nach der Fällung wurde der Niederschlag untersucht.

1) W. Biltz, die Mitteilung erscheint demnächst in der Z. S. f. phys. Chem.

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 11 Std. | 1.224×10^{-6} | 9.23×10^{-6} | 8.006×10^{-6} | 5.2×10^{-6} |

14. **Wismuthsulfid**, aus colloidalen Wismuthhydroxydlösung mit Schwefelwasserstoff gefällt. Die colloidale Lösung war nach der Vorschrift von Biltz hergestellt ¹⁾).

| Rotationsdauer | Leitfähigkeit des Wassers | Leitfähigkeit Endwert | Zunahme | Concentration in Mol. i. Liter |
|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 11 Std. | 1.480×10^{-6} | 2.017×10^{-6} | 0.537×10^{-6} | 0.35×10^{-6} |

C. Ueber Beziehungen zwischen der Löslichkeit und anderen Eigenschaften der Sulfide.

Werden die kristallisierten und die amorphen Sulfide in Reihen nach ihrer Löslichkeit geordnet, so erhält man folgende zwei Tabellen.

Löslichkeitstabelle der kristallisierten Sulfide.

| Substanz | Löslichkeit in Mol. i. Liter | Substanz | Löslichkeit in Mol. i. Liter |
|--------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| MnS, grün | 54.50×10^{-6} | CuS, regulär | 3.10×10^{-6} |
| FeS, Magnetkies | 53.60×10^{-6} | PbS, Bleiglanz | 1.20×10^{-6} |
| FeS ₂ , Pyrit | 40.85×10^{-6} | SnS ₂ , Musivgold | 1.13×10^{-6} |
| ZnS, Wurtzit | 28.82×10^{-6} | Ag ₂ S, (Silberglanz?) | 0.55×10^{-6} |
| NiS, Millerit | 16.29×10^{-6} | SnS, kristallisiert | 0.14×10^{-6} |
| CdS, Greenockit | 8.85×10^{-6} | | |
| ZnS, Zinkblende | 6.64×10^{-6} | | |

1) W. Biltz, Ber. d. D. chem. Ges. 35. 1902. 4431.

Löslichkeitstabelle der gefällten Sulfide.

| Substanz | Löslichkeit in Mol. i. Liter | Substanz | Löslichkeit in Mol. i. Liter |
|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| MnS | 71.60×10^{-6} | PbS | 3.6×10^{-6} |
| ZnS | 70.60×10^{-6} | CuS | 3.51×10^{-6} |
| FeS | 70.1×10^{-6} | As ₂ S ₃ | $2.1 \times 10^{-6*})$ |
| CoS | 41.62×10^{-6} | Ag ₂ S | 0.55×10^{-6} |
| NiS | 39.87×10^{-6} | Bi ₂ S ₃ | 0.35×10^{-6} |
| CdS | 8.85×10^{-6} | HgS | 0.054×10^{-6} |
| Sb ₂ S ₃ | 5.2×10^{-6} | | |

*) Der Wert 2.1×10^{-6} für As₂S₃ ist durch Herrn W. Biltz ultramikroskopisch gemessen.

Aus den Tabellen geht hervor, daß die gefundenen Löslichkeitswerte der Regel entsprechen, daß die labile Modifikation löslicher als die stabile ist. Das amorphe gefällte Zinksulfid übertrifft an Löslichkeit den Wurtzit, dieser wieder die stabile Zinkblende. Bemerkenswert ist, daß die Zinkblende und der Greenockit, die in der Natur so häufig als isomorphe Mischung auftreten, nahezu gleiche Löslichkeiten zeigen; die gefällten Sulfide des Zinks und Cadmiums besitzen Löslichkeiten, die sich wie 8:1 verhalten.

Weitere Folgerungen, die sich aus der Reihe der kristallisierten Sulfide ziehen lassen, sollen erst im nächsten Teil der Arbeit mitgeteilt werden, wenn das Verhalten dieser Sulfide noch eingehender studiert ist.

Von Bodländer¹⁾ ist eine Beziehung zwischen der Löslichkeit und der Bildungswärme von Elektrolyten entwickelt worden. Die von ihm aufgestellte Formel lautet:

$$E_s = E_A + E_k - 0.058 (0.087) \lg p,$$

in der E_s der Bildungswärme Q des Sulfids geteilt durch 230 gleichzusetzen ist, E_A die Haftintensität des Anions, E_k die des Kations und p die Löslichkeit des betreffenden Electrolyten darstellt. Sind Anion und Kation zweiwertig, so ist der Faktor des

1) Bodländer, Z. S. f. phys. Chem. 27. 1898. 35.

$\lg p = 0.058$; ist die Wertigkeit des einen Ions $= 2$, die des andern $= 1$, so ist der Faktor gleich 0.087 zu setzen.

Da die Haftintensität E_A für die Sulfide unbekannt ist, kann p nicht berechnet werden. Dagegen kann aus der Löslichkeit irgend eines Sulfids E_A abgeleitet, und dann mit Hilfe dieses E_A die Löslichkeit jedes andern Sulfids, dessen E_s und E_k bekannt ist, berechnet werden.

Die folgende Tabelle gibt die Werte E_A , die mit Hilfe der in Kapitel B bestimmten Löslichkeiten einiger gefällter Sulfide berechnet sind.

| | p | E | E_k | E_A |
|--|------------------------|-------|---------|---------|
| $\frac{1}{2} \text{ Mn S}$ | 143.2×10^{-6} | 0.965 | 1.06 | -0.32 |
| $\frac{1}{2} \text{ Tl}_2 \text{ S}^*$ | 0.86×10^{-6} | 0.43 | 0.30 | -0.14 |
| $\frac{1}{2} \text{ Zn S}$ | 141.2×10^{-6} | 0.86 | 0.74 | -0.10 |
| $\frac{1}{2} \text{ Fe S}$ | 140.2 " | 0.52 | 0.33 | -0.08 |
| $\frac{1}{2} \text{ Ni S}$ | 79.74 " | 0.38 | 0.22 | -0.08 |
| $\frac{1}{2} \text{ Cd S}$ | 17.7 " | 0.7 | 0.38 | $+0.04$ |
| $\frac{1}{2} \text{ Pb S}$ | 7.2 " | 0.4 | 0.17 | -0.07 |
| $\frac{1}{2} \text{ Cu}_2 \text{ S}$ | 6.2 " | 0.4 | -0.34 | $+0.29$ |
| $\frac{1}{2} \text{ Ag}_2 \text{ S}$ | 1.10 " | 0.07 | -0.78 | $+0.33$ |
| $\frac{1}{2} \text{ Hg S}$ | 0.107 " | 0.1 | -0.79 | $+0.49$ |

* Der Wert p für das Thallosulfid ist durch W. Böttger¹⁾ bestimmt worden.

Wie die Tabelle zeigt, erhält man bei den verschiedenen Sulfiden sehr verschiedene Werte E_A , die sogar durch Null hindurchgehend ihr Vorzeichen wechseln.

Diese Abweichungen können nicht aus der Ungenauigkeit der Löslichkeitsbestimmungen herrühren, da bedeutende Schwankungen von p , das mit seinem Logarithmus in die Bodländersche Formel tritt, nur eine geringe Änderung des E_A -Wertes zur Folge haben. Angenommen, der Wert p des Silbersulfids sei 1.50×10^{-6} statt 1.10×10^{-6} , dann erhält man für E_A den Wert $+0.34$ statt $+0.33$.

In den Zahlen E_A tritt ein deutlicher Gang hervor, der nur

1) W. Böttger, Z. S. f. phys. Chem. 46. 1903. 571.

in der Mitte der Reihe durch Unregelmäßigkeiten gestört wird. Versuche näher in die Ursachen dieser Veränderlichkeit einzudringen, wurden nicht gemacht; vielleicht ist die Erscheinung auf die Berechnung von E_s aus der Wärmetönung zurückzuführen, die eine periodische Funktion des Atomgewichts ist.

Infolge dieser von einander abweichenden E_A -Werte führt auch die Berechnung der Löslichkeit eines Sulfids aus der eines andern zu keinem befriedigenden Ergebnisse, vor allem, wenn die Sulfide in der oben gegebenen Reihe weit von einander entfernt stehen. Trotzdem seien hier einige Berechnungsversuche mitgeteilt, weil aus ihnen hervorgeht, wie fehlerhaft die Löslichkeitsbestimmungen sein müßten, falls ein constantes E_A vorläge.

Als Ausgangspunkt der Berechnung wurde das Thalliosulfid gewählt, weil seine Löslichkeit durch zwei von einander unabhängige Bestimmungen sicher feststeht (vergl. S. 21). Unter der Annahme, daß ein constantes $E_A = -0.14$ vorläge, wurden folgende Löslichkeiten nach der Bodländerschen Formel berechnet.

| | p berechnet | p gefunden |
|--------------------------------------|------------------------|------------------------|
| $\frac{1}{2} \text{ Mn S}$ | 1.68×10^{-1} | 1.43×10^{-4} |
| $\frac{1}{2} \text{ Fe S}$ | 1.1×10^{-2} | 1.40×10^{-4} |
| $\frac{1}{2} \text{ Zn S}$ | 3.28×10^{-4} | 1.41×10^{-4} |
| $\frac{1}{2} \text{ Cd S}$ | 1.17×10^{-5} | 1.77×10^{-5} |
| $\frac{1}{2} \text{ Pb S}$ | 4.17×10^{-7} | 7.2×10^{-6} |
| $\frac{1}{2} \text{ Ag}_2 \text{ S}$ | 4.18×10^{-12} | 1.10×10^{-6} |
| $\frac{1}{2} \text{ Hg S}$ | 1.74×10^{-12} | 0.107×10^{-6} |

Bodländer hat schon die Sulfide in einer Reihe nach ihrer Löslichkeit angeordnet, die der Differenz $E_k - E_s$ proportional ist. Er hat auch darauf hingewiesen, daß diese Reihe in Uebereinstimmung steht mit den Erfahrungen der Analyse. Diese Tatsache soll hier an der Hand der nunmehr bestimmten Löslichkeiten nochmals erläutert werden, da erst durch die absoluten Werte die Unterschiede im Verhalten der einzelnen Sulfide klar hervortreten.

Die Sulfide vom Mangan bis zum Kobalt werden aus mineral-saurer Lösung infolge ihrer hohen Löslichkeit durch Schwefelwasserstoff nicht gefällt. Unter ihnen ist das Mangansulfid das löslichste, denn schon durch Essigsäure wird es zersetzt. Dann folgen Eisensulfür und Zinksulfid, von denen das erstere das lös-

lichere ist, da es aus neutraler Lösung nicht fällt, während beim Zink eine wenn auch nicht vollkommene Fällung eintritt. In der Tabelle steht das Zinksulfid vor dem Eisensulfür. Vermutlich ist der Löslichkeitswert des letzteren etwas zu niedrig. Den Schluß machen Nickel und Kobalt, deren Sulfide aus Lösungen mit nur wenig Wasserstoffionen durch Schwefelwasserstoff ausgeschieden werden, einmal gefällt aber in Säuren unlöslich sind.

Es folgt die Reihe der aus mineralsaurer Lösung fallenden Sulfide. Hier steht das Cadmiumsulfid an erster Stelle; schon aus ziemlich stark saurer Lösung wird es durch Schwefelwasserstoff gefällt. Dann folgen die drei Sulfide des Bleies, Kupfers und Silbers, die so schwer löslich sind, daß sie aus nicht allzu complexen Verbindungen ihrer Metalle durch Schwefelwasserstoff ausgeschieden werden. Alle drei sind in heißer Salpetersäure löslich. Die geringste Löslichkeit zeigt das Quecksilbersulfid, das nur durch Königswasser oxydiert wird.

Unter den drei Sulfiden des Arsens, Antimons und Wismuths ist das Antimonsulfid am leichtesten löslich, da es von concentrirter Salzsäure zerlegt wird, während das Arsentrisulfid in kalter concentrirter Salzsäure praktisch unlöslich ist. Wismuthsulfid wird nur von heißer concentrirter Salzsäure angegriffen.

D. Prüfung der Berechnungsweise der Concentration aus der Leitfähigkeit.

Im Abschnitt B wurde die Löslichkeit der Sulfide aus der Leitfähigkeit mit Hilfe der Annahme berechnet, daß das gelöste Sulfid praktisch quantitativ hydrolysiert, das gebildete Hydroxyd quantitativ dissociiert, und die Leitfähigkeit des bei der Hydrolyse entstehenden Schwefelwasserstoffes gegenüber der Leitfähigkeit des Hydroxyds zu vernachlässigen ist. Ein solcher Verlauf des Lösungsprozesses ist bei den Sulfiden zu erwarten, deren Metalle stark basische Hydroxyde bilden wie das Thallium und Silber. Bei so schwachen Basen wie Manganhydroxyd ist eine quantitative Dissociation selbst bei den außerordentlich hohen Verdünnungen, um die es sich hier handelt, nicht sehr wahrscheinlich. Daß gerade der geschilderte Vorgang bei der Lösung stattfindet, wurde nicht bewiesen, dagegen geht aus folgenden Angaben hervor, daß diese Berechnungsweise zu richtigen Resultaten führt.

1. Von W. Böttger¹⁾ wurde die Löslichkeit des Thallosulfids

1) l. c.

bei 19.96° auf chemischem Wege zu 0.43×10^{-3} Molen im Liter bestimmt. Aus der von ihm gemessenen Leitfähigkeit $k = 216 \times 10^{-9}$ folgt nach meiner Berechnungsweise eine Löslichkeit von 0.433×10^{-3} Molen im Liter bei 19.96°. Die Uebereinstimmung ist also vollkommen.

Durch Herrn W. Biltz sind in letzter Zeit im hiesigen Laboratorium die Löslichkeiten einer Reihe von Sulfiden auf ultramikroskopischem Wege festgestellt worden. Seiner besonderen Liebenswürdigkeit verdanke ich die hier mitgeteilten Zahlen. Eine Nebeneinanderstellung der so erhaltenen Werte mit den meinigen zeigt im wesentlichen genügende Uebereinstimmung; eine vollkommene ist infolge experimenteller Verhältnisse¹⁾ nicht zu erwarten.

| | W. Biltz | Weigel |
|-------------------|----------------------|-----------------------|
| Mn S | 11×10^{-4} | 7.2×10^{-4} |
| Cd S | 6.6×10^{-4} | 8.8×10^{-4} |
| Pb S | 5.5×10^{-4} | 3.6×10^{-4} |
| Ag ₂ S | 0.8×10^{-4} | 0.55×10^{-4} |

2. Die von mir benutzte Berechnungsweise setzt noch die Kenntniß der Leitfähigkeit des Schwefelwasserstoffs voraus, sodaß Bestimmungen dieser Leitfähigkeit für verschiedene Concentrationen unerlässlich waren.

Das untersuchte Schwefelwasserstoffwasser wurde hergestellt, indem in Leitfähigkeitswasser reiner Schwefelwasserstoff zugleich mit reinem Wasserstoff eingeleitet wurde. Der Schwefelwasserstoff passierte zur Reinigung zwei Waschflaschen mit Wasser, zwei mit Kaliumsulfidlösung und zwei mit Leitfähigkeitswasser; der Wasserstoff durchströmte eine Waschflasche mit Wasser, eine mit Chromsäure, eine mit Silbernitrat und zwei mit Leitfähigkeitswasser.

Das so erhaltene Schwefelwasserstoffwasser wurde nach der Volhardschen Methode titriert. Durch Verdünnen mit Leitfähigkeitswasser wurden verschieden concentrirte Lösungen hergestellt, die zur Controlle nochmals titriert wurden. Die bei verschiedenen Versuchen erhaltenen Werte weichen nicht unwesentlich von ein-

1) vergl. W. Biltz, l. c.

ander ab, doch war die Genauigkeit der Bestimmungen für den vorliegenden Zweck mehr als ausreichend.

| H ₂ S Conc. i. Mol. i. Liter | $\kappa \times 10^{-6}$ | H ₂ S Conc. i. Mol. i. Liter | $\kappa \times 10^{-6}$ |
|---|-------------------------|---|-------------------------|
| 0.00026 | 0.74 | 0.0067 | 9.00 |
| 0.00047 | 1.39 | 0.0142 | 14.43 |
| 0.00085 | 1.78 | 0.0150 | 13.40 |
| 0.00117 | 3.00 | 0.0170 | 14.64 |
| 0.00142 | 3.20 | 0.0175 | 14.80 |
| 0.0025 | 4.75 | 0.020 | 19.30 |
| 0.0046 | 6.85 | 0.033 | 22.90 |

Das Verhältnis der Leitfähigkeiten von äquimolekularen Lösungen des Hydroxyds und des Schwefelwasserstoffs, wie sie bei der Hydrolyse eines Sulfids vom Typus MS entstehen, soll an dem Beispiel des Zinksulfids für die Concentrationen 0.00025 und 0.0025 Mol. i. Liter gezeigt werden.

Die Leitfähigkeit des Zinkhydroxyds ist berechnet aus den Ionenbeweglichkeiten, die den Tabellen von Kohlrausch und Holborn entnommen sind.

| Concentration i. Mol. i. Liter | Leitfähigkeit | |
|-----------------------------------|---------------|---------------------|
| | Zinkhydroxyd | Schwefelwasserstoff |
| 0.00025 | 0.00011 | 0.0000007 |
| 0.0025 | 0.0010 | 0.0000048 |

Die Leitfähigkeit des Schwefelwasserstoffes beträgt im ersten Falle 0.6%, im zweiten 0.5% der Leitfähigkeit des Zinkhydroxyds. Da die ganze Berechnungsweise der Concentration aus der Leitfähigkeit eine solche Genauigkeit nicht beanspruchen kann, ist auf Anbringung einer Correction mit Hülfe der Leitfähigkeitstabelle für den Schwefelwasserstoff verzichtet worden.

**Tabellarische Zusammenstellung der bei 18° bestimmten
Löslichkeiten.**

| Substanz | Rotations- dauer in Stunden | Löslichkeit in Mol. im Liter $\times 10^{-4}$ |
|--|-----------------------------------|--|
| 1. Bleiglanz von Freiberg | 21 | 1.21 |
| 2. Bleiglanz, künstlich | 20 | 1.21 |
| 3. Bleiglanz, durch Umw. v. gef. Pb S | 23 | 1.18 |
| 4. Pb S, gefällt | 5 | 3.60 |
| 5. Hg S, „ | $\frac{1}{2}$ | 0.054 |
| 6. Ag ₂ S, „ | $\frac{1}{2}$ | 0.552 |
| 7. Cu S, „ | 24 | 3.51 |
| 8. Cu ₂ S, regulär | 48 | 3.10 |
| 9. Greenockit, künstlich | 40 | 8.84 |
| 10. Cd S, gefällt | 20 | 8.86 |
| 11. Zinkblende von San- tander | 5 | 6.67 |
| 12. Zinkblende, künstlich | 7 | 6.63 |
| 13. Wurtzit, künstlich | 20 | 28.82 |
| 14. Zn S, gefällt | 12 | 70.60 |
| 15. Millerit, künstlich | 80 | 16.29 |
| 16. Ni S, gefällt | 13 | 39.87 |
| 17. Co S, „ | 10 | 41.62 |
| 18. Magnetkies, künstlich | 4620 | 53.6 |
| 19. Fe S, gefällt | 4 | 70.1 |
| 20. Pyrit von Freiberg | 24 | 40.89 |
| 21. Pyrit, künstlich | 16 | 40.84 |
| 22. Mn S, grün | $\frac{1}{2}$ | 54.5 |
| 23. Mn S, fleischfarben | $1\frac{1}{2}$ | 71.6 |
| 24. Sn S, kristallisiert | 7 | 0.14 |
| 25. Sn S ₂ , Musivgold | 24 | 1.13 |
| 26. As ₂ S ₃ , gefällt | 10 | 2.1 |
| 27. Sb ₂ S ₃ , „ | 11 | 5.2 |
| 28. Bi ₂ S ₃ , „ | 11 | 0.35 |

548 Oskar Weigel, über das Verhalten von Schwermetallsulfiden etc.

Ich kann diese Mitteilung nicht schließen, ohne Herrn Professor Dr. W. Biltz für die reichliche Bewilligung von Institutsmitteln zur Ausführung dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Clausthal i. H.

Chemisches Laboratorium der Bergakademie, Juli 1906.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mitteilungen

aus dem Jahre 1906.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1907.

Inhalt.

| | |
|---|-----|
| Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1905 . . . S. | 1 |
| Verzeichnis der im Jahre 1905/6 abgehaltenen Sitzungen und der darin ge- | |
| machten wissenschaftlichen Mitteilungen " | 5 |
| Wedekindsche Preisstiftung für Deutsche Geschichte " | 11 |
| de Lagarde-Stiftung und Stiftung der Freunde de Lagardes. " | 15 |
| Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden . . " | 16 |
| Bericht über den Thesaurus linguae latinae " | 19 |
| Bericht über das Samoa-Observatorium " | 20 |
| Bericht über die Ausgrabungen von Numantia von A. Schulten " | 24 |
| Bericht über die ausgesetzten Preisaufgaben " | 28 |
| Adresse an Herrn Bücheler " | 29 |
| Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften | |
| zu Göttingen, Ende März 1905 " | 31 |
| Benekesche Preisstiftung " | 41 |
| Verzeichnis der im Jahre 1905 eingegangenen Druckschriften " | 43 |
| Gedächtnisrede auf F. v. Richthofen von H. Wagner " | 71 |
| Gedächtnisrede auf H. Usener von E. Schwartz " | 82 |
| Bericht über die öffentliche Sitzung am 17. November 1906. " | 95 |
| E. Schröder, 'Stadt' und 'Dorf' in der deutschen Sprache des Mittelalters " | 96 |
| F. Klein, Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken . . " | 109 |

Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1905.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat im abgelaufenen Geschäftsjahre 15 ordentliche und 2 öffentliche Sitzungen gehalten. Die Berichte über die öffentlichen Sitzungen finden sich in den Geschäftlichen Mitteilungen aus dem Jahre 1905; diejenigen über die ordentlichen Sitzungen finden sich weiterhin. In 15 Commissionssitzungen wurden geschäftliche Angelegenheiten vorberathen.

Von den Nachrichten der Gesellschaft ist der Jahrgang der mathem.-physical. Klasse 1905 mit fünf Heften, vom Jahrgang 1906 1 Heft erschienen; die Nachrichten von der philol.-historischen Klasse für das Jahr 1905 enthalten 4 Hefte, für das Jahr 1906 ist ein Beiheft ausgegeben. Der Commissionsverlag der Nachrichten beider Klassen ist vom Beginn des Jahres 1906 ab an die Weidmannsche Buchhandlung in Berlin übergegangen.

Von den Abhandlungen der mathem.-physicalischen Klasse erschien:

Bd. III Nr. 3. L. Ambonn, Die Messungen des Sonnendurchmessers.

Nr. 4. M. Brendel, Theorie des Mondes.

Nr. 5. F. Lincke, Luftelektrische Messungen bei 12 Ballonfahrten.

Bd. IV Nr. 1—3. C. Schwarzschild, Untersuchungen zur geometrischen Optik.

Nr. 4. M. Verworn, Die miocäne Cultur der Auvergne.

Von den Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse sind ausgegeben:

Bd. VIII Nr. 4. A. Schulten, Numantia, eine topographisch-historische Untersuchung.

Nr. 5. F. Leo, Der Saturnische Vers.

Nr. 6. Ed. Schwartz, Christliche und jüdische Ostertafeln.

Die Göttingischen gelehrten Anzeigen sind ohne Unterbrechung erschienen. Mit Ende des Jahres scheidet Herr Prof. Dr. R. Meißner aus der Redaction, an seine Stelle wird Herr Ed. Schwartz treten.

Der Schriftenaustausch ist im abgelaufenen Jahre auf sechs weitere Stellen ausgedehnt; er umfaßt jetzt 353 Stellen. Ein Verzeichnis der dadurch oder auf anderen Wegen der Gesellschaft zugegangenen und von ihr der Kgl. Universitäts-Bibliothek überwiesenen Druckwerke ist weiterhin abgedruckt. Diese Zusammenstellung dient als Empfangsbescheinigung, soweit eine solche nicht auf besonderen Wunsch unmittelbar ertheilt ist.

Zur Einleitung und Förderung wissenschaftlicher Untersuchungen bewilligte die Kgl. Gesellschaft:

| | |
|---|---------|
| Herrn Wiechert zur Errichtung einer Horizontalpendel-Station in einem Bergwerk und zu deren Führung auf ein Jahr | M. 1200 |
| Herrn Schulten für Ausgrabungen in Numantia | „ 1000 |
| Herrn Verworn für Fortführung seiner Ausgrabungen in der Auvergne | „ 800 |
| Herrn Wiechert zum Studium von künstlichen Erschütterungen der Erdrinde | „ 600 |
| Herrn Smend zur Drucklegung eines griechisch-syrisch-hebräischen Index zur Weisheit des Jesus Sirach | „ 1000 |
| Herrn Riecke zur Fortsetzung der von Dr. Starck unternommenen spektroskopischen Untersuchungen über Kanalstrahlen | „ 500 |
| Herrn Voigt zur Förderung seiner Untersuchungen über Krystallelektricität | „ 400 |
| Herrn Coehn zur Untersuchung photochemischer Reactionen in gasförmigen Systemen | „ 500 |
| Herrn Iwan Block in Berlin für Fortsetzung seiner Studien über den amerikanischen Ursprung des Syphilis | „ 500 |
| Herrn Kaes in Hamburg für Herstellung hirnanatomischer Tafeln | „ 600 |
| Herrn H. Wagner zur Fortsetzung der Katalogisirung älteren kartographischen Materiales in deutschen Bibliotheken | „ 1200 |

ferner :

| | |
|--|--------|
| Herrn Lüders in Rostock als Reisestipendium für Untersuchungen von Mahabharata-Handschriften | „ 1000 |
| Herrn Brendel für Besoldung eines Hilfsrechners | „ 1200 |

Von der durch die Gesellschaft veranlaßten und unterstützten Ausgabe des Dioskorides de materia medica, bearbeitet von Herrn W. Wellmann, ist der 2. Band (vor dem 1.), in diesem Jahre ausgegeben worden.

Die Scholien zu Lukian sind, nachdem Herr H. Rabe die Bearbeitung durchzuführen übernommen hat, rasch gefördert worden und in diesem Jahre erschienen.

Auf der Delegirten-Versammlung der cartellirten Körperschaften zu Pfingsten in Leipzig war die Kgl. Gesellschaft durch Herrn Klein und Liebisch vertreten; auf der Mahabharata-Conferenz am 16. und 17. Juni in Nürnberg durch Herrn Kielhorn; auf dem Archaeologen-Congreß in Athen durch ihr correspondirendes Mitglied Herrn Keil in Straßburg.

Dem naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein in Kiel sendete die Gesellschaft zum Jubiläum ihre Glückwünsche.

Zur Feier eines fünfzigjährigen Doctorjubilaeums entsendete die Gesellschaft an Herrn Ernst v. Meier in Berlin und Herrn Leo Meier hier Glückwunschsreiben, an Herrn Th. Nöldecke in Straßburg Herrn Andreas als Ueberbringer der Glückwünsche und an Herrn Bücheler in Bonn eine Adresse. (Siehe S. 29).

Durch den Tod verlor die Gesellschaft
in der mathem.-physikal. Klasse:

Walter Flemming in Kiel am 4. August 1905. Corresp.
seit 1887.

Ferdinand Freiherr von Richthofen in Berlin
am 5. Oktober 1905; auswärt. Mitglied seit 1902, Corresp.
seit 1875.

A. von Kölliker in Würzburg am 2. November 1905,
ausw. Mitglied seit 1882, Corresp. seit 1862.

in der philol.-histor. Klasse:

Heinrich Denifle in Rom, im Mai 1905, auswärtiges
Mitglied seit 1896.

Curt Wachsmuth in Leipzig, am 8. Juni 1905, Corresp.
seit 1884.

Julius Oppert in Paris, am 21. August 1905, auswärtig.
Mitglied seit 1887, Corresp. seit 1896.

Hermann Usener in Bonn am 21. October 1905, aus-
wärtig. Mitglied seit 1899, Corresp. seit 1887.

In die Reihe der ordentlichen Mitglieder trat wieder ein
Herr Richard Pietschmann.

4 Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1905.

Die Gesellschaft wählte zum ordentlichen Mitglied in der math.-phys. Klasse Herrn Carl Schwarzschild am 1. Juli 1905, allerhöchst bestätigt am 3. August 1905.

zu Correspondenten in der philol.-histor. Klasse am 8. Juli 1905:

Herrn Charles Rockwell Lammann am Harvard College,
Cambridge Mass.

Herrn Albert Grünwedel in Berlin.

Herrn Friedrich Wilhelm Carl Müller in Berlin.

**Verzeichnis der im Jahre 1905/6 abgehaltenen
Sitzungen und der darin gemachten wissenschaft-
lichen Mittheilungen.**

Öffentliche Sitzung am 13. Mai 1905.

Bericht des Sekretärs für das Geschäftsjahr 1904.

Bericht über den Thesaurus linguae latinae.

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papstur-
kunden und die Germania pontificia.

Bericht über das Observatorium in Apia auf Samoa.

Bericht über die Ausgabe von Gauß Werken und die mathema-
tische Encyklopaedie.

Gedächtnisreden der Herren

F. Frensdorff auf Höhlbaum und Koppmann.

W. Voigt auf E. Abbe.

M. Verworn auf G. Meißner.

(Geschäftliche Mitteilungen 1905 H. 1.)

Ordentliche Sitzung am 20. Mai 1905.

W. Holtz, Greifswald: Wie ein planetarischer Urnebel in Ro-
tation kommen kann. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905.
S. 236).

Derselbe Weshalb die Sterne als Sterne erscheinen? (Nach-
richten, math.-phys. Kl. 1905. S. 238).

C. Runge: Ueber die numerische Auflösung totaler Differential-
gleichungen. Nachrichten, mathem.-phys. Kl. S. 252).

Ordentliche Sitzung am 3. Juni 1905.

E. Schwartz legt vor: G. Mercati Un preteso scritto di San
Petro vescovo d'Alessandria e martire sulla bestemmia e Filone
l'istoriografo.

- F. Kielhorn legt zwei indische Geschichtstafeln vor.
 E. Wiechert legt vor: H. Gerdien, Messungen des vertikalen Leitungsstromes in der freien Atmosphaere bei der Ballonfahrt vom 11. V. 1905 (Nachr. math.-phys. Kl. 1905. S. 258).
 Derselbe legt vor: H. Gerdien, Ein neuer Apparat zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 240).
 Derselbe: Seismische Kurventafeln vom 31. Mai 1905.
 W. Voigt legt vor: A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie. III. Über Lichtgeschwindigkeits- und Überlichtgeschwindigkeits-Elektronen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 201).

Ordentliche Sitzung am 24. Juni 1905.

- A. Verworn, Ueber das älteste Auftreten des Menschen in Europa.
 O. Wallach legt vor: W. Biltz, Beiträge zur Kenntnis der Farblacke. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 46).
 Th. Liebisch berichtet aus den Verhandlungen der cartellirten Gesellschaften in Leipzig über „Chemie der Minerale“.
 F. Kielhorn berichtet über die Verhandlungen der Mahabharata-Conferenz in Nürnberg.
 F. Frensdorff, Die Kaiserin Katharina II. von Rußland und ein Göttingischer Zeitungsschreiber. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 305).
 P. Kehr, Nachträge zu den Papsturkunden Italiens. I. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 321).

Ordentliche Sitzung am 8. Juli 1905.

- W. Meyer überreicht Gesammelte Abhandlungen.
 H. Minkowski, Ueber automorphe Functionen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)
 F. Klein legt vor: K. Schwarzschild, Untersuchungen zur geometrischen Optik. III. (Abhandlungen, math.-phys. Kl. Bd. IV No. 1—3).
 D. Hilbert legt vor: P. Stäckel, Bestimmung aller Translationsflächen, die zugleich Minimalflächen sind. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 343).

Ordentliche Sitzung am 22. Juli 1905.

- M. Verworn, Die miocäne Cultur der Auvergne. (Abhandlungen, math.-phys. Kl. Bd. IV No. 4).

- D. Hilbert, Theorie der Integralgleichungen. 3. und 4. Mittheilung. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 307).
Derselbe legt vor: E. Dickson, On finite algebra. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 358).
W. Voigt, Ueber Pyroelectricität bei centrisch symmetrischen Krystallen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 394).
F. Leo berichtet über die Pfingstkonzferenz der Commission für den Thesaurus linguae latinae.
F. Frensdorff berichtet über die Wedekind-Stiftung.
E. Schröder, Weiteres vom jungen Schiller. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).
E. Schwartz, Christliche und jüdische Ostertafeln. (Abhandlungen, Bd. VIII Nr. 6).
F. Andreas berichtet über C. F. Lehmann, Materialien und Vorstudien zur älteren Geschichte Armeniens und Nordmesopotamiens.
Derselbe berichtet über Resultate seiner Beschäftigung mit den iranischen Handschriftenresten aus Turfan. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

Ordentliche Sitzung am 28. Oktober 1905.

- F. Kielhorn legt vor: A. Hillebrandt, Zur Kritik des Mu-drāvākoṣa. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 429).
E. Schwartz berichtet über die Ausgrabungen von Dr. Schulten in Numantia.
Derselbe legt vor: B. Keil (Straßburg), Eine Kaiserrede Aristides. R. 35. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 381).
A. von Könen: Zur Entstehung der Salzlager Nordwest-Deutschlands. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 339).
F. Klein legt ein Heft der mathematischen Encyclopädie vor.
E. Riecke legt die dritte Auflage seines Lehrbuches der Physik vor.
W. Voigt: Ueber Pyroelectricität an centrisch-symmetrischen Krystallen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 394).

Öffentliche Sitzung am 11. November 1905.

- W. Voigt, Ueber Arbeitshypothesen. (Geschäftl. Mittheilungen 1905, H. 2).

Ordentliche Sitzung am 25. November 1905.

- D. Hilbert legt vor: G. Scheffers, Bestimmung aller Kurven,

- durch deren Translation Minimalflächen entstehen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 472).
- E. Riecke legt vor: J. Stark, Der Doppler-Effect bei den Kanalstrahlen und die Spectra der positiven Atomionen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 459).
- E. Wiechert legt vor: H. Gerdien, Messungen der Dichte des vertikalen elektrischen Leitungsstromes in der freien Atmosphäre am 30. August 1905. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 447).
- Der Vorsitzende legt vor: W. Holtz, Bemerkungen zu meinem Aufsatz über die Sternform der Sterne. — Die Wirkung des Hintergrundes bei der Größenschätzung z. B. des Mondes am Horizont. — Das hüpfende Bild bei abwechselnd links- und rechtsäugigem Sehen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1905. S. 439).
- J. Wackernagel legt vor: A. Bezzenberger, Altpreußisch pö. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 454).
- F. Frensdorff, Nachtrag zu der Abhandlung Kaiserin Katharina II. und ein Göttingischer Zeitungsschreiber. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

Ordentliche Sitzung am 9. Dezember 1905.

- N. Bonwetsch legt vor: K. Müller, Nachtrag zu Calvins Bekehrung. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905. S. 463).
- E. Schwartz legt vor die mit Unterstützung der Gesellschaft bearbeiteten Scholia in Lucianum ed. H. Rabe.
- F. Kielhorn legt vor: Tezpur Felseninschriften des Harjara-varman. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

Ordentliche Sitzung am 23. Dezember 1905.

- E. Wiechert legt vor: Akerblom und Angenheister, Notizen über Erdbebenwellen, welche über den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).
- Der Vorsitzende legt vor: W. Nernst, Ueber die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 1).
- H. Wagner legt vor: W. Ruge, Reisebericht über Katalogisierung des älteren kartographischen Materiales in deutschen Bibliotheken. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1906. S. 1).
- R. Pietschmann legt vor: Berichte des Sachverständigen bei

dem Kaiserlichen General-Konsulat in Kairo Dr. Ludwig Borchard.

Ordentliche Sitzung am 13. Januar 1906.

- E. Schwartz legt den zweiten Band von Wellmanns Dioscorides vor.
- R. Pietschmann legt einen Bericht des Sachverständigen bei dem Kaiserl. Generalkonsulat zu Kairo, Dr. Ludwig Borchardt, vor.
- F. Klein legt das erste Heft des astronomischen Bandes der mathematischen Encyclopädie vor.
- K. Schwarzschild: Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. Heft 1, S. 41).
- Derselbe legt vor: Dr. Meyermann, Vermessung der Umgebung des Orionnebels. Mit 1 Tafel. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.).
- P. Kehr legt vor durch den vorsitzenden Sekretär: W. Wiederhold, Papsturkunden im Arrelat und in Burgund). (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1906. Beiheft).

Ordentliche Sitzung am 3. Februar 1906.

- F. Merkel legt vor: Fr. Heiderich, Die Zahl und die Dimension der Geschmacksknospen der Papilla vallata des Menschen in den verschiedenen Lebensaltern. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. Heft 1, S. 54).
- M. Verworn legt vor: E. Hertel, Mitteilungen über die Wirkung von Lichtstrahlen auf lebende Zellen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. Heft 1, S. 94).
- E. Riecke legt vor: A. Coehn, Ueber elektrische Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. Heft 1. S. 100).
- H. Wagner legt vor: E. Kohlschütter, Ergebnisse der ostafrikanischen Pendlexpedition. 1. Teil: Höhenmessungen. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.).
- R. Pietschmann: Mitteilungen des Herrn Dr. L. Borchardt zu Kairo.

Ordentliche Sitzung am 17. Februar 1906.

- E. Schwartz legt vor: E. Reitzenstein (Straßburg), Ein Bruchstück des Philochoros. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1906. S. 40).
- O. Wallach: Untersuchungen aus dem Göttinger Universitäts-Laboratorium. XV. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 65).

- E. Wiechert legt vor: G. Angenheister, Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption von Erdbebenwellen, die durch den Gegenpunkt des Herdes gegangen sind. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 110).
- E. Wiechert legt vor: F. Åkerblom, Vergleichung der Diagramme aus Upsala und Göttingen von Fernbeben, deren Wellen die Erde umkreist haben. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 121).
- F. Klein kündigt an: J. Weingarten (Freiburg i. B.), Zur Theorie der Wirbelringe. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 81).

Ordentliche Sitzung am 3. März 1906.

- D. Hilbert kündigt an: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906).
- E. Riecke legt vor: A. Coehn, Ueber elektrische Erscheinungen beim Zerfall von Ammonium. Zweite Mitteilung. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1906. S. 106).
- E. Schröder legt vor: Zur Vorgeschichte von Schillers „Künstlern“. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).
- Derselbe macht Mitteilungen über den ältesten Gutenberg-Druck.

Ordentliche Sitzung am 17. März 1906.

- F. Kielhorn berichtet in Vertretung des Direktors über den vom Verwaltungsrate der Wedekind-Stiftung verteilten Preis.
- W. Meyer: De scismate Grandimontanorum (4 Rythmen c. 1187). (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1906. S. 49).

Ordentliche Sitzung am 31. März 1906.

- Der Vorsitzende legt vor: W. Holtz (Greifswald), Elektrische Versuche mit einer Tischplatte. — Physik ohne Apparate: Anziehung und Abstoßung unelektrischer Körper. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).
- F. Kielhorn überreicht von Herrn J. F. Fleet eine englische Version von Bühlers: Indische Palaeographie.
- R. Pietschmann legt Mitteilungen des Sachverständigen in dem Generalkonsulat in Kairo, Dr. Ludwig Borchardt, vor.
-

Wedekindsche Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath hatte unterm 14. März 1901 (Nachr. der Kgl. Gesellschaft der Wiss., geschäftl. Mittheilungen 1901, Heft 1) als Preisfrage für den Zeitraum 1901—1906 ausgeschrieben:
eine kritische Geschichte der sächsischen
Bisthumsgründungen in der Karolingischen
Zeit.

Eine Bewerbung um diesen Preis ist nicht eingelaufen.

Wie in den Jahren 1886 und 1896 war demnach auch jetzt nur der dritte in den Ordnungen § 14 vorgesehene Preis zu vertheilen. Zur Prüfung der Frage, ob die geschichtliche Litteratur des letzten Jahrzehnts ein Werk zur deutschen Geschichte geliefert habe, das den von dem Stifter gestellten Anforderungen entspreche, wurde zunächst ein den Statuten § 17 entsprechendes Preisgericht gebildet. Die Herren Professor Edward Schröder in Göttingen und Professor Freiherr v. d. Ropp in Marburg, die die auf sie gefallene Wahl bereitwillig übernahmen, kamen mit den fünf Mitgliedern des Verwaltungsraths der Stiftung auf Grund eines von Herrn Kehr erstatteten Referats und eines von Herrn v. d. Ropp erstatteten Correferats einstimmig zu dem Beschlusse, dem Buche von Max Lehmann, Freiherr vom Stein, drei Bände, Leipzig 1902—05 den Wedekindpreis zuzuerkennen.

Das Buch entspricht dem, was der Stifter von dem zu krönenden Werke fordert, in Hinsicht der Forschung wie der Darstellung vollauf. Der Verfasser hat seine Biographie auf einem gewaltigen den Archiven abgewonnenen Material aufgebaut, es in sorgfältiger kritischer Verarbeitung ausgenutzt und die früheren Bearbeitungen des Gegenstandes durch Ausdehnung und Gründlichkeit seiner Forschung weit hinter sich gelassen. Die vortrefflich

abgerundete und geschlossene Darstellung, die dem Verfasser gelungen ist, läßt den Leser vergessen, welch sprödes Material es zu verarbeiten galt. Für eine der entscheidenden Perioden der neueren deutschen Geschichte ist mit dem Buche von Max Lehmann eine erhebliche Förderung der politischen Geschichte und ganz besonders der Verwaltungsgeschichte erreicht. Aus diesen Gründen hat der Verwaltungsrath beschlossen, dem Werke des Herrn Max Lehmann den statutenmäßigen Preis von 1650 Mark zuzuerkennen.

Göttingen, den 14. März 1906.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

F. Frensdorff, z. Z. Director.

Preisaufrage der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindstiftung stellt für den neuen mit dem 14. März 1906 beginnenden fünfjährigen Verwaltungszeitraum wiederholt die Aufgabe:

eine kritische Geschichte der sächsischen
Bisthumsgründungen in der Karolingischen
Zeit.

1. Form und Einsendung der Bewerbungsschriften. Bewerbungsschriften müssen vor dem 1. August 1910 an den Direktor des Verwaltungsraths der Stiftung eingesandt werden und aller äußern Zeichen entbehren, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist ihr ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

2. Preisgericht. Das Preisgericht besteht aus dem Verwaltungsrathe der Stiftung und sovielen von ihm aus den übrigen Angehörigen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, den ordentlichen, den auswärtigen Mitgliedern und den Correspondenten, hinzu erwählten anerkannt sachkundigen und unparteilichen Männern, daß die Gesamtzahl sieben ist. Die Mitglieder des Preisgerichts können nicht an der Bewerbung Theil nehmen. Die übrigen Mitglieder der Königlichen Gesellschaft dürfen sich wie jeder andere um den Preis bewerben.

3. Urtheil. Das Urtheil des Preisgerichts wird am 14. März 1911 in einer Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemacht und in deren „Nachrichten“ in der Abtheilung: Geschäftliche Mittheilungen veröffentlicht.

4. Preis. Der Preis beträgt 3300 Mark und muß ganz oder kann gar nicht zuerkannt werden. Ist der Verfasser der Preisschrift bereits verstorben, so fällt der Preis seinen Erben zu.

Der Verfasser der gekrönten Schrift oder dessen Erben werden noch besonders durch den Direktor von dem ihnen zugefallenen Preise benachrichtigt und können diesen bei der Königlichen Universitätskasse zu Göttingen auf Anweisung des Direktors gegen Quittung erheben.

5. Druck der Preisschrift. Die gekrönte Schrift geht in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselbe einer Buchhandlung in Verlag geben oder auf Kosten der Stiftung drucken lassen.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Kapitale der Stiftung zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Gesellschaft auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine ausserordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Gesellschaft fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder, falls er nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflage soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls er verstorben ist, für dessen Erben und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Gesellschaft festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in
Göttingen mit einem Wedekind'schen Preise gekrönt und
herausgegeben.

6. Freiemplare. Von den Preisschriften, die die Stiftung herausgibt, erhält der Verfasser zehn Freiemplare, der Verwaltungsrath ebenfalls zehn zu freier Verfügung.

7. Zurückforderung nicht gekrönter Schriften. Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen

Empfangsscheines innerhalb eines Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergibt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

Göttingen, den 14. März 1906.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

**de Lagarde Stiftung und Stiftung der Freunde
de Lagardes.**

Auch im abgelaufenen Jahre ging der Stiftung der Freunde de Lagardes eine ansehnliche Schenkung zu.

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

Die Arbeiten für die Sammlung und Herausgabe der Papsturkunden vor Innocenz III sind während des Berichtsjahres 1905/06 auf allen Gebieten gleichmäßig gefördert worden. An ihnen beteiligten sich der Leiter des Unternehmens Professor Kehr, dessen Tätigkeit sich wesentlich auf das unerschöpfliche Rom und Mittelitalien erstreckte, der ständige Mitarbeiter Dr. Caspar, der die Bearbeitung des unteritalienischen Materials fortsetzte, Professor Dr. Brackmann in Marburg, dem die Bearbeitung der *Germania pontificia* übertragen ist, und Oberlehrer Dr. Wiederhold in Goslar, der sich der Sammlung der französischen Papsturkunden widmet.

I. In Italien, wo das Material in Abschriften und Kollationen im Laufe von fast 10 Jahren zusammengebracht worden ist, handelt es sich nur noch um dessen Revision, welche am besten mit der Fertigstellung des Druckes der „*Italia pontificia*“ verbunden wird. Dabei kommen immer noch vereinzelte Stücke zum Vorschein, die bei dem großen Aufräumen sich verkrochen hatten oder überhaupt verschollen waren. Nicht weniger als 50 solcher verirrter oder übersehener Stücke, von Urban II bis Celestin III, wurden im 3. Heft der Nachrichten für 1905 in den Nachträgen zu den Papsturkunden Italiens gedruckt. Unterdessen sind wieder neue Dokumente an den Tag gekommen. Von großer Wichtigkeit sind darunter die alten Papsturkunden für die römische Titelerkirche von S. Marcellus in Rom mit zwei Originalen von Wibert (Clemens III) und einem Original von Burdinus (Gregor VIII), die, obwohl im II. Band der *Monumenta ordinis servorum s. Mariae* schon 1898 gedruckt, allen, wie es scheint, entgangen sind. Wieder andere Stücke kamen im Vatikanischen Archiv zum Vorschein

oder werden den Bemühungen unsers unermüdlichen Freundes, des Cav. Pasquinangeli verdankt.

Mit dem Druck der *Italia pontificia* ist, wie im letzten Jahresbericht angekündigt worden war, begonnen worden. Es wird beabsichtigt, das Werk in einzelnen Faszikeln herauszugeben, von denen jedes eine Gruppe oder eine Landschaft umfassen soll. Das erste Heft: *Roma* wird voraussichtlich im Juli ausgegeben werden; das zweite: *Latium* wird sich unmittelbar anschließen. Der Druck der folgenden Hefte: *Tuscia*, *Umbria* etc. wird, da das Manuskript bereits im wesentlichen druckfertig vorliegt, ohne Unterbrechung und Verzögerung weitergehen.

Dr. Caspar hat gleichzeitig die Bearbeitung des süditalienischen Materials fortgesetzt, teils mit den reichen Bücherschätzen der Königlichen Bibliothek in Berlin, teils durch Revision der Archivalien an Ort und Stelle. Er arbeitete während der Zeit vom 1. Januar bis 1. Juli 1905 in Rom und Neapel, vom 1. Oktober bis 31. Dezember 1905 wiederum in Rom und in Monte Cassino. Mit dem Druck wird auch er bald beginnen können.

II. Die Bearbeitung der Papsturkunden in Deutschland ist gefördert worden, wenn auch in dem Berichtsjahr keine größere Unternehmung möglich war. Der Bearbeiter der *Germania pontificia*, Dr. Brackmann, wurde vom Gymnasium in Hannover an das in Marburg versetzt und gleichzeitig zum außerordentlichen Professor für historische Hilfswissenschaften an der Universität ernannt. Diese neue Tätigkeit Prof. Brackmanns wird seinen Arbeiten für die *Germania pontificia* in Zukunft in besonderem Maße zu Gute kommen und eine ganz andere Ausdehnung und Vertiefung ermöglichen, als dies in Hannover möglich war; aber für den Augenblick hat die doppelte Last des Unterrichts am Gymnasium und an der Universität die Fortführung der Arbeiten gehemmt. Immerhin hat Professor Brackmann seine rheinischen und westfälischen Sammlungen ergänzen können.

III. Oberlehrer Dr. Wiederhold ist im April 1905 von seiner einjährigen Forschungsreise nach Burgund mit Beute reich beladen, nach Goslar zurückgekehrt. Die freie Zeit, die ihm der Unterricht ließ, widmete er dann der Bearbeitung der gewonnenen Materialien, indem er zunächst die Papsturkunden der *Franche-Comté* zusammenstellte. Hierüber hat er in dem Beiheft der Nachrichten für 1906 genaueren Bericht erstattet und nicht weniger als 86 Papsturkunden, von Benedikt IX bis Celestin III, teils ganz unbekannte oder nur in Citaten bekannte Stücke, heraus-

18 Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

eben. An die Franche-Comté werden sich die anderen Provinzen anschließen.

Wir schließen diesen Bericht mit dem Ausdruck des Dankes an alle, die unsere Arbeiten auch in diesem Jahre gefördert haben, an erster Stelle dem Herrn Kultusminister, der unserm Mitarbeiter Dr. Caspar das ihm in den Vorjahren gewährte Stipendium auch für 1905 bewilligte.

Die Kommission für die Herausgabe der älteren
Papsturkunden.

Bericht über den Thesaurus linguae latinae.

Band I ist im Mai 1905 abgeschlossen worden; Band II ist im Druck vollendet. Der Druck von Band III und IV hat begonnen.

Der bisherige Generalredactor, Herr Prof. Vollmer, ist als ordentlicher Professor an die Münchener Universität berufen worden. Um sich seine Thätigkeit und Erfahrung in wirksamer Weise zu sichern, hat die Commission ihn in ihre Mitte cooptirt. Als Generalredactor berief die Commission an seiner Stelle den Privatdocenten an der Universität Freiburg i. B. Herrn Dr. Ernst Lommatzsch, der das Amt am 1. October 1905 angetreten hat.

Auch der Redactor Herr Prof. Ihm mußte seine Stellung am Thesaurus aufgeben, da er einer Berufung an die Universität Halle gefolgt ist. An seine Stelle trat am 1. April dieses Jahres der bisherige Privatdocent in Halle, Herr Dr. B. Maurenbrecher.

Das Bureau umfaßt zur Zeit den Generalredactor, Redactor, Sekretär und 10 Assistenten.

In ihrer letzten Conferenz hat die Commission, durch das Entgegenkommen des Verlegers dazu in den Stand gesetzt, beschlossen, die Behandlung der Eigennamen, die sich in der in Band I und II durchgeführten Art ohne schwere Gefahr für das ganze Unternehmen nicht fortführen ließ, von der Behandlung der übrigen Wörter zu lösen und in ein neben jedem Bande gesondert erscheinendes Supplement zu verweisen.

Bericht über das Samoa-Observatorium für 1905.

Wie im Vorjahre berichtet ist, haben die Zusicherungen des Reiches und des K. Preußischen Unterrichtsministeriums im Jahre 1904 den Fortbestand unseres Samoa-Observatoriums auf die Dauer von weitem fünf Jahren gewährleistet. Von diesen war das abgeschlossene Rechnungsjahr 1905 das zweite, zugleich das vierte seit seiner Begründung im Jahre 1902.

Ebenso ward im Vorjahre schon des Wechsels in der Person des Observators gedacht. Dr. Franz Linke hat die Leitung des Observatoriums im Januar 1905 aus den Händen des Dr. Tetens übernommen. Er hat durch regelmäßige monatliche Berichte das Kuratorium über alle wichtigen Vorgänge auf dem Laufenden erhalten und es ist durch ihn ein frischer Zug in das gesamte Unternehmen gekommen. Sein Gesundheitszustand und der des Gehülfen Possin war, von kurzen Unterbrechungen abgesehen, ein guter. Der Wunsch, die Bearbeitung der Beobachtungsergebnisse, namentlich was die Erbebenregistrierung betrifft, nicht bis zur Rückkehr des jeweiligen Observators zu verschieben, sondern womöglich fortlaufende, zur Publikation bestimmte Berichte zu erhalten, zwang uns in die dauernde Anstellung eines Rechners zu willigen, der in der Person eines Herrn Kaufmann seit dem 17. Juni v. J. für uns tätig ist. Weiter wurde das Personal des Observatoriums vorübergehend durch den vom amerikanischen Departement of Terrestrial Magnetism in Washington entsandten Herrn Heimbrod vermehrt, welcher von Fiji kommend unter Dr. Linkes Leitung in die erdmagnetischen Beobachtungen eingeführt werden sollte, um dann an der magnetischen Vermessung des Stillen Ozeans mit Teil zu nehmen. Er trat im Nov. 1905 zum Observatorium in Beziehung und hat Apia im März d. J. wieder verlassen. Das Samoanische Wärterpersonal bestand, wie früher, aus zwei festbesoldeten Personen.

Auf diese Weise ist das Unternehmen aus den bisherigen kleinen Verhältnissen herausgewachsen. Es hat sich indeß mit völliger Gewißheit gezeigt, daß die Beaufsichtigung und Durchführung des geplanten geophysikalischen Beobachtungszyklus in seiner Gesamtheit mit der geringen Zahl von wissenschaftlichen und sonstigen Hilfskräften, wie sie in den ersten Jahren tätig waren, nicht bewerkstelligt werden konnte.

2. Als dringendstes Bedürfnis stellte sich unter den neuen Verhältnissen eine Erweiterung der Baulichkeiten heraus. Das Wohnen in den primitiven Samoanischen Häusern war auf die Dauer für die europäischen Beamten nicht angängig und gestattete keine geregelte Bureautätigkeit, die als Vorbedingung für die geforderte provisorische Bearbeitung der Beobachtungen erkannt ward. Daher wurden die eingehend begründeten Anträge Dr. Linkes auf Erbauung eines festen Wohnhauses trotz der finanziellen Bedenken vom Kuratorium genehmigt. Das Gouvernement bewilligte zum Zweck dieses Hausbaus eine Erweiterung des eingezäunten Territoriums, welches dem Observatorium an der Spitze der Halbinsel Mulinuu schon 1902 zugewiesen war. Am 17. Mai v. J. ward mit den Erdarbeiten begonnen und das fertige Wohnhaus zu Anfang Oktober bezogen. Es liegt direkt am Eingange des Grundstücks, so daß alle Einzelgebäude innerhalb desselben gut übersehen werden können, und besteht aus einem Erdgeschoß aus festem Beton und einem zweiten Geschoß aus Holz; im untern befinden sich ein größerer Arbeitsraum, ein Apparatenzimmer und gemeinschaftliches Ess- und Wohnzimmer, im obern die Schlafräume und ein Zimmer für den Observator. Außer diesem wohnt Herr Kaufmann und der Gehülfe Possin in dem Hause, das sich nach den letzten Berichten trefflich bewährt haben soll; vor allem auch während eines heftigen Orkans, der an den Beobachtungshütten ziemlichen Schaden anrichtete. Neben dem Hause erhebt sich ein 15 m hoher Beobachtungsturm aus leichtem Gebälk. Die Uebersiedelung des Personals nach Mulinuu bedingte zugleich den Neubau eines kleinen Küchen- und Vorratsgebäudes. Herr Heimbrod hat eines der leerstehenden Samoa-häuser innegehabt.

Allerdings hat dieser Bau mit seinen Nebenkosten insgesamt etwas über 10000 Mk. erfordert, wozu noch 1600 Mk. für die großenteils aus Europa bezogene innere Einrichtung kommt. Da diese Ausgaben i. J. 1904 bei Bemessung der notwendigen Zuschüsse noch nicht voraus zu sehen waren, so ist die Finanzgebarung des abgelaufenen Jahres etwas ins Schwanken gekommen

und wir haben dasselbe mit einem Fehlbetrag von etwa 1700 Mk. abgeschlossen. Es ist unwahrscheinlich, daß dieser in den nächsten Jahren wieder eingespart werden kann.

Immerhin ist ein Objekt in unsern Besitz gelangt, das auch nach einigen Jahren noch einen Verkaufswert von 5—6000 Mk. repräsentiert, und die Amortisation geschieht z. T. durch Mietzahlungen von Seiten der im Hause wohnenden Beamten.

Wir übergehen die anderweitigen Umgestaltungen in den Baulichkeiten, die Dr. Linke als notwendig anerkannt hat. Nach Abschluß derselben hat am 21. Nov. v. J. eine kleine Einweihungsfeier mit Besichtigung der gesamten Einrichtungen unter Anwesenheit von etwa 40 Weißen und 80 Samoanern stattgefunden, über deren gelungenen Verlauf die Samoanische Zeitung seiner Zeit berichtet hat.

3. Was die Beobachtungen betrifft, so sind die erdmagnetischen, meteorologischen und seismischen regelmäßig durchgeführt, und, soviel sich beurteilen läßt, nunmehr mit allen den Garantien, die eine spätere sorgfältige Bearbeitung verbürgen. Die wichtigste Neuerung ist die seit Herbst v. J. erfolgende regelmäßige Einsendung von Erdbebenberichten an das hiesige Geophysikalische Institut, welches dieselben in üblicher Weise so rasch wie möglich zur Veröffentlichung bringt und an die Tauschstationen verteilt. Und hierbei spielen jetzt nicht etwa nur die Nahbeben, sondern auch die Fernbeben eine Rolle. Eine Störung erlitten die Arbeiten des Observators einerseits durch die Beaufsichtigung der Bauten, andererseits durch die erneuten Ausbrüche des Vulkans auf der Nachbarinsel Sawaii. Wie schon Dr. Tetens, wurde auch Dr. Linke vom Gouvernement gebeten, den letztern zu besuchen behufs Beruhigung der Eingeborenen. Dies hat er in der Zeit vom 9—22. Okt. v. J. ausgeführt und dabei gleichzeitig neue Stationen für den makroseismischen Erdbebendienst errichtet.

Im Oktober und Dezember 1905 hat Dr. Linke außerdem an zehn Orten auf beiden Inseln die erdmagnetischen Elemente bestimmt als Grundlage für eine magnetische Landesvermessung.

Ebenso ward durch Vereinbarung mit dem Gouvernement die Beaufsichtigung eines selbstregistrierenden Pegels gegen eine dem Observatorium zu zahlende Entschädigung von jährlich 1800 Mk. übernommen. Ueber die Uebernahme der Beaufsichtigung des gesamten meteorologischen Beobachtungsnetzes der Inseln durch das Observatorium, soweit dadurch nicht dessen eigentliche Aufgaben leiden, schweben noch Unterhandlungen.

Die luftelektrischen Messungen konnte Dr. Linke erst in

den allerletzten Monaten in Angriff nehmen und Drachenbeobachtungen stehen erst in Aussicht, wenn es gelingt ein Motorboot zu erhalten, um diese vom Wasser aus auszuführen.

4. Die zweijährige Periode, für welche sich Dr. Linke verpflichtet hat, die Leitung des Observatoriums zu führen, läuft im Januar nächsten Jahres ab. Es ist bereits gelungen in Dr. Angenheister, z. Z. Assistent am Geophysikalischen Institut hieselbst, einen geeigneten Ersatzmann zu gewinnen. Er wird voraussichtlich im November d. J. Europa verlassen. Der Gehülfe Possin scheint geneigt noch längere Jahre in unsern Diensten zu bleiben.

Dr. Tetens ist im August v. J. nach längerem Aufenthalt in den Vereinigten Staaten nach Europa zurückgekehrt. Die Bearbeitung der von ihm zurückgebrachten Beobachtungsergebnisse, welche sich jedoch nur auf die meteorologischen und seismischen beziehen wird, konnte er in Folge einer Erkrankung erst am 11. November v. J. beginnen. Er hat zu diesem Zweck seinen Wohnsitz nach Göttingen verlegt, wo ihm Prof. Wiechert einen Arbeitsplatz im Geophysikalischen Institut zur Verfügung stellte.

Herr Gouverneur Dr. Solf, welcher freundlichst das Amt eines Mitglieds des Kuratoriums übernommen hatte, weilt seit November v. J. auf Urlaub in Deutschland, hat jedoch seinen beabsichtigten Besuch in Göttingen bisher noch nicht ausgeführt.

H. Wagner.

Bericht über die Ausgrabungen von Numantia.

Von

A. Schulten.

Der Unterzeichnete beehrt sich, der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften über die von ihm mit Mitteln der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften auf die Stätte des alten Numantia unternommenen Ausgrabungen zu berichten.

Die Grabungen haben am 12. August 1905 begonnen und sind, da dem Unterzeichneten durch das Kultusministerium weitere Mittel zu Verfügung gestellt wurden, bis zum 11. November mit 20—50 Arbeitern fortgesetzt worden. Die beiden am Schlusse meiner Schrift über Numantia formulirten Aufgaben einer künftigen Grabung lauteten: 1) die iberische Stadt 2) die römische Circumvallation zu suchen. Beides konnte versucht werden, da sowohl die Ibererstadt als auch die Circumvallation irgendwelche Spuren hinterlassen haben mußte. Daß in beiden Fällen das Suchen zum Finden führen werde, war nicht eben wahrscheinlich, da 1) bei den 1861 von spanischer Seite veranstalteten Grabungen nichts von einer iberischen Stadt gefunden sein sollte, 2) die im wesentlichen aus Erdwerken bestehenden römischen Linien vielleicht nur geringe und schwer auffindbare Reste hinterlassen hatten. In beiden Fällen ist jedoch die Unternehmung von Glück begünstigt worden. Schon am ersten Tage ergaben die bis auf den gewachsenen Boden gesickerten Gräben, daß die Ibererstadt vorhanden ist: sie kam überall unter der römischen Stadt zum Vorschein; sie war den Spaniern entgangen, weil sie weder tief genug gegraben hatten noch auch im Stand gewesen waren, Iberisches von Römischem zu scheiden. Die iberische Stadt liegt unter dem

Schutt durch Feuer zerstörter Häuser aus Lehmziegeln. Die Fundamente der Häuser bestehen aus Bruchsteinen; der Oberbau war, wie zahlreiche Kohlenreste darthun, aus Holz gebaut. An einigen Stellen sind solche Lehmziegelgebäude auf Bruchsteinfundamenten erhalten. In den Wohnungen wurden große Mengen von Keramik gefunden, deren Ornamente einen völlig phönizischen Charakter haben. Dies und andere ebenfalls durchaus phönizische Gegenstände — Fragmente kleiner Gefäße aus buntem Smalt, Bronzeblech mit gravierter Zeichnung assyrischen Stils — lehren, daß die weitab vom Meere gelegene Bergstadt, in der man nur barbarische Produkte erwartete, völlig von phönizischem Einfluß beherrscht war, daß diese alte Technik sich hier bis zum Jahre 133 v. Chr., in dem die Stadt zerstört wurde, erhalten hat, beides Thatsachen von nicht geringer historischer Bedeutung. Auch sonst zeigt das iberische Numantia durchaus keinen barbarischen Charakter. Der Plan der Stadt ist regelmäßig, die Straßen sind geradlinig und gut gepflastert, der Plan der Häuser ist rechtwinkelig.

Unter der iberischen Stadt kamen überall plumpe, schlecht gebrannte Gefäße zum Vorschein: vor ihr lag also auf dem Hügel von Gaway bereits eine prähistorische Ansiedlung.

Das Uebereinander dieser drei Schichten machte die Grabung ebenso interessant wie schwierig. Das Geschick und die langjährige Praxis meines Begleiters H. Könen haben sich glänzend bewährt.

Um für den Fall, daß eine Fortsetzung der Ausgrabung unmöglich sein sollte, etwas in sich Abgeschlossenes zu erreichen, habe ich die Grabung vor allem auf ein Quartier im Süden der Stadt konzentriert, in dem das Uebereinander der beiden Städte drastisch zu Tage trat. Es ist hier ein für das Ganze typischer Querschnitt erzielt worden. Man sieht u. a., wie spätere, römische Mauern in tiefe numantinische Keller, in denen auch die großen Vorratgefäße vorhanden sind, gesetzt sind, wie Fußböden mehrerer Epochen übereinander liegen.

Kunstvolle Architektur und wertvolle Gegenstände waren in der armen Bergstadt nicht zu erwarten und sind auch nicht gefunden worden. Aber es fehlt nicht an interessanten Objekten. Hervorzuheben sind zahlreiche kleine Thonkugeln mit allerhand Ornamenten und Zeichen. Da einige von ihnen die Form der antiken Schleuderbleie haben, wird man sie als Schleuderkugeln ansehen dürfen. Zahlreich sind kleine Handmühlen, Schleifsteine,

Gewichte zum Verschließen der Haustüren. Ein in der iberischen Brandschicht gefundener Schädel hat dolichokephale Form.

Da es nach der glücklichen Entdeckung der iberischen Stadt galt, zunächst ihrer Untersuchung die volle Kraft zuzuwenden, ist die zweite Aufgabe, die Aufsuchung der Circumvallation, erst begonnen worden. Aber auch hier sind bereits wichtige Ergebnisse erzielt. Es wurden auf dreien der die Stadt umgebenden Hügel und an einem vierten Punkte in der östlichen Ebene große Mengen von Scherben römischer Amphoren und anderer, in die scipionische Zeit passender Keramik festgestellt. Man muß diese Reste auf die zur Einschließung der Stadt angelegten sieben Kastelle beziehen. In der That kamen an der Stelle in der östlichen Ebene Fundamente und Stücke einer eisernen Wurfwanne zum Vorschein, welche letztere sehr wahrscheinlich ein römisches Pilum darstellt. An einer zweiten Stelle, auf einem Hügel im Süden der Stadt, wurden Umwallungen und innerhalb derselben Mauerzüge gefunden: zu dieser Verschanzung führte aus der Ebene eine starke Mauer aus Bruchstein empor, bei der sich eine römische Spitzhacke fand. Es dürfte in der Umwallung ein scipionisches Kastell, in der den Hügel hinaufführenden Mauer ein Stück der die Kastelle verbindenden Schanzen gefunden sein. Diesen Anhaltspunkten wird in der zweiten Kampagne nachzugehen sein.

Alles Ausgegrabene ist von H. Könen und einem Geometer im Maßstab 1:100 aufgenommen; alle Fundstücke sind sorgfältig gezeichnet und z. T. photographirt worden.

Da der Hügel von Numantia ‚Monumento Nacional‘ ist, erregten die deutschen Grabungen und besonders ihre glücklichen Erfolge die Empfindlichkeit einer chauvinistischen Presse, doch sind die Grabungen dank dem korrekten Verhalten der spanischen Regierung und persönlichen Beziehungen vor einer Störung bewahrt worden, auch konnten 14 Kisten mit Funden zu ruhigem Studium nach Deutschland gesandt werden.

Durchaus wohlwollend verhielt sich zu der ersten und verhält sich zu der bevorstehenden zweiten Kampagne die Königl. spanische ‚Academia de Historia‘ zu Madrid. Ich durfte ihr in der Sitzung vom 24. November 1905 über die Grabungen berichten und wurde zum Korr. Mitglied ernannt. Dieses für das vorliegende Unternehmen sehr wichtige Verhalten der maßgebenden gelehrten Körperschaft des Landes ist auf die Initiative des H. Edoardo Saavedra, den man als die Seele der Akademie

bezeichnen kann, zurückzuführen. Herr Saavedra hat meine Unternehmung von ihren ersten Anfängen an gefördert und besonderen Wert darauf gelegt, daß die Grabung von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in die Wege geleitet wurde. An zweiter Stelle gebührt dem Director des Madrider Museo Arqueologico, Herrn Catalina Garcia Dank.

Bericht über die ausgesetzten Preisaufgaben.

Die philologisch-historische Klasse stellt für das Jahr 1907 folgende Preisaufgabe:

Die Gesellschaft verlangt eine Geschichte der antiken Commentare zu den Gedichten Hesiods, in Verbindung mit einer Untersuchung der wichtigsten Scholienhandschriften, die so weit geführt sein muß, daß der Plan einer wissenschaftlichen Ausgabe danach aufgestellt werden kann.

Die zur Bewerbung um den Preis bestimmten Arbeiten müssen vor dem 1. Februar 1907 an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften eingeliefert werden, mit einem Spruch versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers. Der Preis beträgt 1000 Mark.

Adresse an Herrn Bücheler.

Verehrter Herr College!

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften erscheint vor Ihnen an dem Tage, der Sie auf ein halbes Jahrhundert ruhmvoller Arbeit und Lehre zurückblicken läßt, mit den guten Wünschen, die dem festlichen Tage, mit dem Ausdruck von Verehrung und Dank, die dem wissenschaftlichen Führer gelten. Das waren Sie längst, als Sie vor genau einem Vierteljahrhundert unter die Zahl unserer Mitglieder traten; Sie waren es fast vom ersten Tage Ihrer Laufbahn an, da Sie als Jüngling mit starken und raschen Schritten auf der Bahn, die Ritschl Ihnen gewiesen hatte, vorwärtsdrangen. Ihre Jugendarbeiten, von Frontin und Theokrit über Petron und Varro und lateinische Declination zum Ceres-hymnus und Akademikerindex, sind heute so frisch und wirksam wie am ersten Tage; Ihre Wiedergewinnung der italischen Dialekte war eine wahre Erstreckung des philologischen Reiches; Ihre Satiriker, Herodas, die metrischen Inschriften mit einer nie versiegenden Fülle kleinerer Gaben waren und sind ein von reifen Früchten überquellender Herbst.

Ein Meister der Sprache, dem all ihre Zeiten und Sphären vertraut sind, ein Kritiker, dem sich keiner seines Zeitalters vergleichen darf, sei es als Treffer des Verlorenen sei es als Beurteiler des Erhaltenen, ein Interpret, der das Feine fühlt, das Dunkle sieht, das Verschlungene löst, so haben Sie die Grundmauern Ihrer Wissenschaft befestigt. Sie haben den Zusammenhang der Philologie mit der epigraphischen und sprachwissenschaftlichen Forschung lebendig gemacht und erhalten, Sie haben vor allem durch Ihre Interpretation der umbrischen Tafeln ein vollkommenes Beispiel gegeben, wie das sprachlich Versteckte, auch Form und Etymologie, nur durch Erfassung des Inhalts auf-

geklärt werden kann, Sie haben durch die auf dem Gebiet der Einzelsprache energisch durchgeführte Forschung ein Muster aufgestellt, das auf die allgemeine Sprachwissenschaft von eindringender Wirkung gewesen ist.

Wer sich vermessen wollte, die wissenschaftlichen Taten abzuwägen, würde vielleicht in Ihrer Wirksamkeit als Lehrer eine Summe von productiver Arbeit finden, die Ihrer litterarischen Production die Wage hält. Sicherlich, wenn die gestalteten Werke des Gelehrten nie das selbstgesteckte Ziel erreichen, der Rückblick auf Ihre Lehrtätigkeit erfüllt nicht nur die wissenschaftliche Welt mit Bewunderung, er muß auch Ihnen das beglückende Gefühl des vollen Erfolges geben.

Sie haben so früh die höchsten Ehren Ihrer Facultät erreicht, daß das halbe Jahrhundert vorüber und der Winter Ihres Lebens noch nicht gekommen ist. Möge er freundlich kommen und Ihnen warmen Sonnenschein über den Weg und durchs Fenster werfen.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingen, im März 1906.

**Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen
Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Ende März 1906.**

Sekretäre.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.

Ehren-Mitglieder.

Friedrich Althoff, Dr., Wirkl. Geh. Rat, Ministerial-Direktor
Excellenz zu Berlin, seit 1901.
Gottlieb Planck, Dr., Prof., Wirklicher Geheimer Rat, Excellenz,
zu Göttingen, seit 1901.
Georg von Neumayer, Dr., Wirklicher Geheimer Rat, Excellenz,
zu Neustadt a. Hardt, seit 1901.
Wilhelm v. Hartel, Dr., k. k. Oesterreichischer Unterrichts-
minister, Excellenz, zu Wien, seit 1901.
Rochus Freiherr von Liliencron, Dr., Wirklicher Geheimer Rat
und Prälat, Excellenz, zu Schleswig, seit 1901.
Conrad Studt, Dr., k. Preuss. Minister der geistlichen, Unterrichts-
und Medicinal-Angelegenheiten, Excellenz, zu Berlin, seit 1901.
Georg Kopp, Dr., Kardinal-Fürstbischof, Eminenz, zu Breslau,
seit 1902.
Julius Wellhausen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Göttingen,
seit 1903.

Ordentliche Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit
1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1879. (Zuvor
Assessor seit 1872).
Adolf von Koenen, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, seit 1881.

Woldemar Voigt, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1883.
 Friedrich Merkel, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrat; seit 1885.
 (Zuvor Correspondent seit 1880.)
 Theodor Liebisch, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, seit 1887.
 Felix Klein, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1887. (Zuvor
 Assessor seit 1871, Correspondent seit 1872.)
 Gottfried Berthold, Dr. ph., Prof., seit 1887.
 Albert Peter, Dr. ph., Prof., seit 1889.
 Otto Wallach, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1890.
 David Hilbert, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1895.
 Emil Wiechert, Dr. ph., Prof., seit 1903.
 Max Verworn, Dr. med., Prof., seit 1903.
 Karl Schwarzschild, Dr. ph., Prof., seit 1905.

Philologisch-historische Klasse.

Herrmann Wagner, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1880.
 Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Prof., Geh. Justiz-
 rat, seit 1881.
 Franz Kielhorn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1882.
 Karl Dilthey, Dr. ph., Geh. Reg.-Rat, Prof., seit 1892.
 Wilhelm Meyer, Dr. ph., Prof., seit 1892.
 Gustav Cohn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893.
 Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Prof., seit 1893.
 Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893, D. z.
 Sekretär.
 Paul Kehr, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1895.
 Richard Pietschmann, Dr. ph., Prof., seit 1897.
 Jacob Wackernagel, Dr. ph., Prof., seit 1902 (zuvor Corre-
 spondent, seit 1901).
 Lorenz Morsbach, Dr. ph., Prof., seit 1902.
 Eduard Schwartz, Dr. ph., Prof., seit 1902.
 Edward Schröder, Dr. ph., Prof., seit 1903 (zuvor Correspondent
 seit 1894).
 Friedrich Andreas, Dr. phil., Prof., seit 1904.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Alexander Agassiz, Prof., zu Cambridge, U. S. A., seit 1898.
 (Zuvor Correspondent seit 1879.)

- Arthur Auwers, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, Beständiger
Secretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit
1882. (Zuvor Correspondent seit 1871.)
- Adolf von Baeyer, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München, seit 1892.
(Zuvor Correspondent seit 1879.)
- Ernst Benecke, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904. (Zuvor
Correspondent seit 1889.)
- Wilhelm von Bezold, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Berlin,
seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1897.)
- Ludwig Boltzmann, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit
1887. (Zuvor Correspondent seit 1882.)
- Gaston Darboux, Dr., Membre de l'Institut, Prof., Beständiger
Secretär der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1901. (Zuvor
Correspondent seit 1883.)
- Richard Dedekind, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Braunschweig,
seit 1862. (Zuvor Correspondent seit 1859.)
- Paul Ehrlich, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, Direktor des Instituts
für Serumforschung zu Frankfurt a. M., seit 1904.
- Julius Elster, Dr., Professor, Oberlehrer am Gymnasium in
Wolfenbüttel, seit 1902.
- Wilhelm Foerster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin-
Westend, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1875.)
- Robert Helmert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Director des geodät.
Instituts zu Potsdam, seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1896.)
- Ewald Hering, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Leipzig, seit 1904.
- Joseph Dalton Hooker, Director der Königlichen Gärten zu
Sunnigdale, seit 1865.
- William Thomson Lord Kelvin, Prof., zu Glasgow, seit 1864.
(Zuvor Correspondent seit 1859.)
- Carl Klein, Dr., Prof., Geh. Bergrat, zu Berlin, seit 1888.
(Zuvor ordentl. Mitglied seit 1877.)
- Friedrich Kohlrausch, Dr., vormals Präsident der phys.-techn.
Reichsanstalt, zu Marburg (Hessen), seit 1879. (Zuvor Assessor
seit 1867.)
- Walter Nernst, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1905.
(Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898.)
- Carl Neumann, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1868.
(Zuvor Correspondent seit 1864.)
- Johannes Orth, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Berlin, seit 1902.
(Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893.)
- Wilhelm Pfeffer, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1902.
(Zuvor Correspondent seit 1885.)

Vorstände der Mitglieder

- Encarté, Membre de l'Institut, Prof. zu Paris, seit 1892.
(Zuvor Correspondent seit 1884.)
- Reinke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Kiel, seit 1886.
(Zuvor ordentl. Mitglied seit 1882.)
- Retzius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1904. (Zuvor
Correspondent seit 1886.)
- Amadeus Schwarz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu
Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1875, Corre-
spondent seit 1869.)
- H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Prof., zu Straßburg, seit
1898. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1879.)
- ard Suseb., Dr., Prof., Präsident der K. Akademie der
Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent
seit 1884.)
- Gustav Tschermak, Dr., Prof., k. k. Hofrat in Wien, seit 1902.
(Zuvor Correspondent seit 1884.)
- Wilhelm Waldeyer, Dr. med. u. Dr. ph., Prof., Geh. Medicinal-
rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften
zu Berlin, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1877.)
- Heinrich Weber, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1886. (Zuvor
ordentl. Mitglied seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Philologisch-historische Klasse.

- Friedrich Bechtel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895. (Zuvor
Assessor seit 1882.)
- Franz Bücheler, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1899.
(Zuvor Correspondent seit 1881.)
- Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts, zu
Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent seit 1875.)
- Leopold Delisle, Membre de l'Institut, ancien Administrateur
général de la Bibl. Nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor
Correspondent seit 1866.)
- Hermann Diels, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Beständiger Sekretär
der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin seit 1899.
- L. Duchesne, Membre de l'Institut, Abbé, zu Paris, seit 1891.
- Franz Ehrle, Préfet der vaticanischen Bibliothek, zu Rom, seit
1901.
- M. J. de Goeje, Prof., zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspon-
dent seit 1872.)
- Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1901. (Zu-
vor Correspondent seit 1886.)

- Adolf Kirchhoff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1881.
(Zuvor Correspondent seit 1865.)
- Ernst von Meier, Dr., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1901.
- Theodor Nöldeke, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor
Correspondent seit 1864.)
- Gustav Roethe, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl.
Mitglied seit 1893.)
- Wilhelm Schulze, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl.
Mitglied seit 1898.)
- Theodor von Sickingen, Dr., Prof., k. k. Sektionschef, zu Meran,
seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1868.)
- Wilhelm Thomsen, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
- Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit
1896.
- Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr., Prof., Geh.
Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1897. (Zuvor ordentl. Mitglied seit
1892.)
- Wilhelm Wilmanns, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit
1901. (Zuvor Correspondent seit 1894.)

Correspondenten.

Mathematisch-physikalische Klasse.

- Svante Arrhenius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1901.
- Dietrich Barfurth, Dr., Prof., zu Rostock, seit 1904.
- Charles Barrois, Dr., Prof., zu Lille, seit 1901.
- Max Bauer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1892.
- Friedrich Becke, Dr., Prof., zu Wien, seit 1904.
- Friedrich Beilstein, Dr., Wirkl. Staats-Rat, Excellenz, zu St.
Petersburg, seit 1880.
- Robert Bonnet, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1904.
- Eduard Bornet, Prof., zu Paris, seit 1885.
- J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.
- Alexander von Brill, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
- Woldemar Christoffer Brögger, Dr., Director der geologischen
Reichsanstalt in Christiania, seit 1902.
- Heinrich Bruns, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1892.
- Otto Bütschli, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Heidelberg, seit 1889.
- Georg Cantor, Dr., Prof., zu Halle, seit 1878.
- Carl Chun, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
- Giacomo Ciamician, Dr., Prof., zu Bologna, seit 1901.
- Ulisse Dini, Prof., zu Pisa, seit 1880.

- Theodor Wilhelm Engelmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Berlin, seit 1884.
- Emil Fischer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1901.
- Rudolf Fittig, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1882.
- Lazarus Fletcher M. A. F. R. S., Keeper of the Department of Mineralogy, British Museum zu London, seit 1901.
- Robert Fricke, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1904.
- Georg Frobenius, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
- Sir Archibald Geikie, vormalig Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom, zu London, seit 1889.
- Karl Goebel, Dr., Prof., zu München, seit 1902.
- Camillo Golgi, Prof., zu Pavia, seit 1892.
- Paul Gordan, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1870.
- Giovanni Battista Grassi, Prof., Vicesekretär der math.-naturw. Klasse der R. Academia dei Lincei, zu Rom, seit 1901.
- Viktor Hensen, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Kiel, seit 1892.
- Ludimar Herrmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Königsberg i. Pr., seit 1886.
- Wilhelm Hittorf, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Münster, seit 1879.
- Jacob Heinrich van't Hoff, Dr. ph., med., jur. u. ing., Prof., zu Berlin, seit 1892.
- Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1869.
- Sir William Huggins, Präsident der Royal Society, zu London, seit 1876.
- Adolf Hurwitz, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1892.
- Alexander von Karpinski, Excellenz, Präsident des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1892.
- Ludwig Kiepert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Hannover, seit 1882.
- Leo Königsberger, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1874.
- Carl Koppe, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1901.
- E. Ray Lankester, Prof., Director des Natural history Museum zu London, seit 1901.
- A. Michel Lévy, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
- Heinrich Limpricht, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor seit 1857.)
- Ferdinand Lindemann, Dr., Prof., zu München, seit 1882.
- Sir Joseph Norman Lockyer, Prof., zu London, seit 1876.
- Hubert Ludwig, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
- Ernst Mach, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1887.
- Adolf Mayer, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1872.

- Dmitri Mendelejeff, Dr., Prof., zu St. Petersburg, seit 1892.
Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Prof., K. K. Oesterr. Hofrat
zu Wien, seit 1877.
Hermann Minkowski, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1878.
Edmund von Mojsisovics, Dr., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1902.
Simon Newcomb, Prof., vormalig Superintendent of the American
Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Max Nöther, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1892.
Wilhelm Ostwald, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1901.
J. L. Penfield, Professor an der Yale University, zu New Haven,
U. S. A., seit 1902.
Edmond Perrier, Membre de l'Institut, Director des Muséum
d'Histoire naturelle zu Paris, seit 1901.
Eduard Pflüger, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Bonn, seit
1872.
Emile Picard, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1884.
Max Planck, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Alfred Pringsheim, Dr., Prof., zu München, seit 1904.
Friedrich Prym, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1891.
Georg Quincke, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1866.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.
Friedrich von Recklinghausen, Dr., Prof., zu Straßburg i. E.,
seit 1901.
Theodor Reye, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1877.
Wilhelm Conrad Röntgen, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München,
seit 1883.
Henry Enfield Roscoe, Prof., zu London, seit 1874.
H. Rosenbusch, Dr., Prof., Geh. Ober-Bergrat, zu Heidelberg,
seit 1882.
Carl Runge, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.
Franz Eilhard Schulze, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin,
seit 1883.
Arthur Schuster, Dr., Prof., zu Manchester, seit 1901.
Simon Schwendener, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., Geh. Reg.-Rat,
zu Berlin, seit 1892.
Hugo Seeliger, Dr., Prof., zu München, seit 1901.
Walther Spring, Dr., Prof., zu Lüttich, seit 1901.
Johann Strüver, Dr., Prof., zu Rom, seit 1874.
Ludwig Sylow, Dr., zu Frederichshall, seit 1883.
Johannes Thomae, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Jena, seit 1873.

- Th. Tschernyschew, Dr., Direktor des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1904.
Victor Uhlig, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Hermann Vöchting, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Hermann Vogel, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Potsdam, seit 1887.
Karl von Voit, Dr., Prof., Geh.-Rat u. Ober-Medicinalrat, zu München, seit 1879.
Aurelius Voß, D., Prof., zu München, seit 1901.
Emil Warburg, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Präsident der phys. technisch. Reichsanstalt zu Charlottenburg, seit 1887.
Eugen Warming, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1888.
Julius Weingarten, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Freiburg i/B., seit 1886.
Julius Wiesner, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1902.
Ferdinand Zirkel, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Leipzig, seit 1886.

Philologisch-historische Klasse.

- Theodor Aufrecht, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1871.
Otto Benndorf, Dr., k. k. Hofrat, Sektionschef, Director des k. k. österreichischen archäol. Instituts, zu Wien, seit 1883.
Friedrich von Bezold, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Bonn, seit 1901.
Adalbert Bezzenberger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Königsberg i. Pr., seit 1884.
Gustav Bickell, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., zu Wien, seit 1901.
Wilhelm von Bippen, Dr., Syndicus der Stadt Bremen, zu Bremen, seit 1894.
Max Bonnet, Dr., Prof., zu Montpellier, seit 1904.
Sophus Bugge, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1887.
Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.
Maxime Collignon, Dr., Prof., an der faculté des lettres, zu Paris, seit 1894.
Julius Eggeling, Dr., Prof., zu Edinburgh, seit 1901.
Adolf Ermann, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1888.
Arthur J. Evans, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1901.
John Faithfull Fleet, Dr., zu London, seit 1885.
Wendelin Förster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Percy Gardner, Prof., zu Oxford, seit 1886.
Gustav Groeber, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Charles Groß, Prof., zu Cambridge, (Mass.), U. S. A., seit 1891.

- Albert Grünwedel, Dr. ph., zu Berlin, seit 1905.
 Ignazio Guidi, Prof., zu Rom, seit 1887.
 Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
 G. N. Hatzidakis, Dr., Prof., zu Athen, seit 1901.
 Albert Hauck, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., Geh. Kirchenrat, zu Leipzig, seit 1894.
 Joh. Ludwig Heiberg, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1899.
 Wolfgang Helbig, Dr., Prof., zu Rom, seit 1882.
 Riccardo de Hinojosa, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1891.
 Georg Hoffmann, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1881.
 Oswald Holder-Egger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1896.
 Theophile Homolle, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1901.
 Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrat zu Dresden, seit 1885.
 Eugen Hultsch, Dr., Prof., zu Halle a. S., seit 1895.
 Hermann Jacobi, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1894.
 Julius Jolly, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., zu Würzburg, seit 1904.
 Finnur Jonsson, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
 Adolf Jülicher, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., zu Marburg, seit 1894.
 Ferdinand Justi, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1876.
 Bruno Keil, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
 Konstantinos Kontos, Prof., zu Athen, seit 1892.
 Adolf Köcher, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1886.
 Axel Kock, Dr., Prof., zu Lund, seit 1901.
 Karl von Kraus, Dr., Prof., zu Prag, seit 1901.
 Charles Rockwell Lanmann, Prof., Harvard College, zu Cambridge (Mass.), seit 1905.
 Georg Löschcke, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
 Sir Clements Robert Markham, zu London, seit 1890.
 Aug. Mau, Dr., Prof., und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts zu Rom, seit 1894.
 Paul Jonas Meier, Dr., Prof., Direktor des Herzogl. Museums zu Braunschweig, seit 1904.
 Giovanni Mercati, zu Rom, seit 1901.
 Eduard Meyer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1895.
 Leo Meyer, Dr., Prof., k. Russ. Wirkl. Staatsrat, zu Göttingen, seit 1855. (Zuvor Assessor seit 1861.)
 Adolf Michaelis, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1879.
 Hermann Möller, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1894.
 Ernesto Monaci, zu Rom, seit 1901.
 Gabriel Monod, Membre de l'Institut, zu Versailles, seit 1901.
 Carl Müller, Dr. th., Prof., zu Tübingen, seit 1899.

- Friedrich Wilhelm Carl Müller, Dr. phil., zu Berlin, seit 1905.
Arthur Napier, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1904.
Benedictus Niese, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1901.
Heinrich Nissen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1884.
Hermann Oldenberg, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1890.
Paolo Orsi, Dr., Prof., direttore del Museo zu Siracus, seit 1904.
Joseph Partsch, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Leipzig, seit 1901.
Eugen Petersen, Dr., Prof., zu Halensee-Berlin, seit 1887.
Richard Pischel, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1889.
Richard Reitzenstein, Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904,
Max Rieger, Dr., zu Alsbach a. d. Bergstraße, seit 1897.
Moritz Ritter, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1892.
Carl Robert, Dr., Prof., zu Halle, seit 1901.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1892.
Dietrich Schaefer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.
Carl Schuchhardt, Dr., Prof., Direktor des Kestner-Museums zu Hannover, seit 1904.
Otto Seeck, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1895.
Albert Sorel, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Elias Steinmeyer, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1895.
Rudolf Thurneysen, Dr., Prof., zu Freiburg i. B., seit 1904.
Ludwig Traube, Dr., Prof., zu München, seit 1894.
Johannes Vahlen, Dr. ph. u. Dr. jur., Prof., Geh. Reg.-Rat,
Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1895.
Girolamo Vitelli, Dr., Prof., zu Florenz, seit 1904.
Wilhelm Windelband, Dr., Prof., zu Heidelberg, seit 1901.
Heinrich Zimmer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.
-

Benekesche Preisstiftung.

Die für das Jahr 1906 ausgeschriebene Preisaufgabe (vgl. Jahrgang 1903 dieser „Nachrichten“) hat keine Bearbeitung gefunden.

Für das Jahr 1909 stellt die philosophische Fakultät der Universität Göttingen folgende neue Preisaufgabe:

„Von Etvös wurde eine sehr empfindliche Methode angegeben, Trägheit und Gravität der Materie zu vergleichen. Mit Rücksicht hierauf und im Hinblick auf die neuere Entwicklung der Elektrodynamik sowie auf die Entdeckung der radioaktiven Substanzen ist das Newtonsche Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität möglichst weitgehend zu prüfen“.

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1908, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an die Fakultät einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung und innen den Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatt muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls ihr ein Preis nicht zuerkannt wird.

Der erste Preis beträgt 3400 Mk., der zweite 680 Mk., und die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigentum ihrer Verfasser.

Die Bekanntmachung der zuerkannten Preise erfolgt am 11. März 1909 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät in Göttingen.

In den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissen-

schaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen von 1904 und 1905, finden sich die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1906 und 31. August 1907 einzusenden sind.

Göttingen, den 1. April 1906.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan:

In Vertretung: W. Fleischmann.

Verzeichnis
der im Jahre 1905 eingegangenen Druckschriften.

A. Gesellschafts- und Institutspublikationen.*)

- Aachen** Geschichtsverein: Zeitschrift 26 1904.
Aarau Historische Gesellschaft des Kantons Aargau: Taschenbuch 1904.
Aberdeen University: Studies 10. 11. 1904.
Adelaide R. Society of South Australia: Transactions 28 1904.
Agram Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti: Rad 157—160 1904—05.
— Ljetopis 19 1905.
— Starine 31 1905.
— Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena 9 1904: 10 1905 1.
— Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae (Diplomatički zbornik kraljevine hrvatske, dalmacije i slavonije) vol. 2 1904.
— Građa za povjest književnosti hrvatske kn. 4 1904.
— Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika svez. 24 1904.
Agram Hrvatsko naravoslovno društvo (Societas scientiarum naturalium Croatica): Glasnik 16, 1905 17, 1905.
Aix Université: Annales des facultés de droit et des lettres 11—, 1905.
Altenburg Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes: Mitteilungen aus dem Osterlande N. F. 11 (30) 1905.
Amiens Société des antiquaires de Picardie: Bulletins 1904, 4 (1904—05).
Amsterdam K. Akademie van wetenschappen: Verhandelingen Wis- en natuurlkundige afdlg. 1. sect. 9, 1905 2. sect. 11 1905 12. 1. 1905 Afdlg. Letterkunde 6, 1904.

*) Nur wenn es mit dem Jahrgange der Zeitschrift nicht übereinstimmt, ist das Jahr der Veröffentlichung (in runden Klammern) besonders angegeben worden.

- (Amsterdam) Verslag van de gewone vergaderingen der Wis- en natuurkundige afdeeling 13 1904—05.
- Jaarboek 1904 (1905).
- Total eclipse of the sun, may 18, 1901 (Dutch observations:) Reports on the Dutch expedition to Karang Sago, Sumatra, publ. by the Eclipse committee 2—4 1901—05.
- (Pascolus, Johannes) Fanum Apollinis. Carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Acc. septem poemata laudata. 1905.
- Amsterdam** K. Nederlandsch aardrijkskundig genootschap: Tijdschrift 2 ser. 22 1905.
- Amsterdam** Wiskundig genootschap: Nieuw archief voor wiskunde 2. r. 6, 1905 7, 1905.
- Wiskundige opgaven met de oplossingen 9_{1—3} 1904—05.
- Programma van jaarlijksche prijsvragen voor 1905 (1904).
- Revue semestrielle des publications mathématiques 13 1904 (1905).
- Annaberg** Verein für Geschichte von Annaberg und Umgegend: Mitteilungen 9. Jahrbuch f. 1902—04 (2. Bd. 4. H.) (1905).
- Antwerpen** Société r. de géographie: Bulletin t. 28 (28. & 29. ann. soc.) 4 1905 t. 29 (29. & 30. ann. soc.) 1 1905.
- Athen** Ἐπιστημονικὴ ἐταιρεία: Ἀθηνᾶ 16 1904 3/4 17 1905.
- Athen** Ksl. Deutsches Archäologisches Institut: Mitteilungen 29 1904 3/4 30 1905 1—3.
- Athen** École Française: Bulletin de correspondance hellénique 29 1905.
- Augsburg** Historischer Verein für Schwaben und Neuburg: Zeitschrift 31 1904.
- Baltimore** Johns Hopkins university: Circular (166—180) n. s. 1904 1—3 1905 1—7.
- American journal of mathematics 26 1904 27 1905 1—3.
- Memoirs from the biological laboratory 5 1903.
- Studies in historical and political science 22 1904 23 1905 1—10.
- Baltimore** Maryland geological survey: Miocene text & plates 1904.
- Basel** Naturforschende Gesellschaft: Verhandlungen 17 1904 18 1905₁.
- Batavia** Genootschap van kunsten en wetenschappen: Notulen van de algemeene en directievergaderingen 42 1904 s. 4.
- Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde 47 s. 4. 48₁ 1905.

- (Batavia) Dagh-Register gehouden int casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India a. 1656/57 'sGravenhage 1904.
- Rapporten van de Commissie in Nederlandsch-Indië voor oudheidkundig onderzoek op Java en Madoera 1901—03 (1904—05).
- Batavia** K. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië: Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië 64 (X, 8) 1905.
- Batavia** K. magnetisch en meteorologisch observatorium: Observations 26 1903 (1905).
- Bayreuth** Historischer Verein für Oberfranken: Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken 22, (37) [! 38] 1905.
- Bergen** Museum: Aarbog 1904, 1905 1. 2. Aarsberetning 1904 (1905).
- Nordgaard, O., Hydrographical and biological investigations in Norwegian fiords (the protist plankton and the diatoms in bottom samples by E. Jørgensen). 1905.
- Sars, G. O., An account of the Crustacea of Norway 5 7—10 1905.
- Berkeley** University of California: Biennial report of the president 1902—04 (1904).
- The university chronicle 64 1904 7 1 1904.
- Announcement of courses 1903/04 (1903) 1904/05 (1904).
- Bulletins n. s. 5, 1904.
- Publications American archaeology and ethnology 1 1. s. 1903—04 2 1—4 1904—05 3 1905 Astronomy Lick observatory bulletin 65—85 1904—05 Botany 1 1902—03 2 1/2 1904 Classical philology 1 1. s. 1904—05 Pathology 1 3—7 1904 Physiology 1 13—22 1904 2 1—3 1904 Zoology 1 1—3 1902—04 2 1—3 1904—05.
- The department of anthropology. 1905.
- Bulletin of the department of geology 3 16—22 1904.
- Berlin** K. Akademie der Wissenschaften: Abhandlungen 1904.
- Sitzungsberichte 1904 41—53 1905 1—33.
- Acta Borussica Behördenorganisation Bd. 7 1904. Ergänzungsbd.: Briefe König Friedrich Wilhelms I. an den Fürsten Leopold zu Anhalt-Dessau 1905.
- Berlin** Gesamtverein der deutschen Geschichts- und Altertumsvereine: Korrespondenzblatt 53 1905.
- Berlin** Verein für die Geschichte Berlins: Schriften 40. 41. 1905.
- Mitteilungen 22 1905.
- Berlin** Verein für Volkskunde: Zeitschrift 15 1905.

Berlin Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte: Mitteilungen 15 1905. Beihefte (Texte und Forschungen) 6—8 1905. Mitglieder-Verzeichnis 1905.

Berlin Deutsche Physikalische Gesellschaft: Verhandlungen 6 1904 10—24.

Bern Allgemeine Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz: Jahrbuch für Schweizerische Geschichte 30 Zürich 1905.

Bern Schweizerische Naturforschende Gesellschaft (Société helvétique des sciences naturelles): Verhandlungen (Actes) 87. Jahresversammlung (session) 1904 Winterthur 1905.

— Carte géologique de la Suisse publ. par la Commission géologique fédérale Blatt VII 2. éd. géolog. 1904. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz (46) N. F. 16 Text & Atlas 1905 (47) 17 1905 (48) 18 1905 (49) 19 1904. Spezialkarte 31 1904 & Erläuterungen 1905 Carte spéciale 32 1904 31 [! 33] 1904 (Beiträge N. F. 15) Specialk. 34—36.

Bern Naturforschende Gesellschaft: Mitteilungen 1904 (1905).

Bologna R. Accademia delle scienze dell' Istituto: Memorie 5. ser. 9 1900—02 10 1902—04 Indice generale dei 10 tomi 1905 6. ser. 1 1904.

— Rendiconto delle sessioni n. s. 5 1900—1901 (1901) 6 1901—02 (1902) 7 1902—03 (1903) 8 1903—04 (1904).

Bonn Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande: Bonner Jahrbücher 111/112 & Tafelbd. 1904.

Bonn Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande, Westfalens und des Reg.-Bez. Osnabrück: Verhandlungen 61 1904 62 1905¹. Beil.: Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1904 (1904—05) 1905¹.

Bordeaux Faculté des lettres: Annales 4. sér. 27 ann. 1905 Revue des études anciennes t. 7 Bulletin italien t. 5.

Bordeaux Société des sciences physiques et naturelles: (Mémoires Append.) Commission météorologique de la Gironde Observations pluviométriques et thermométriques 1903—04 (1904).

— Procès-verbaux des séances 1903—04 (1904).

Boston American academy of arts and sciences: Memoirs n. s. 13² 1904.

— Proceedings 40²⁻²⁴ 1904—05 41¹⁻¹³ 1905.

— The Rumford fund. 1905.

Boston Society of natural history: Memoirs 5^{10, 11} 1903—04 6¹ 1905.

— Proceedings 31²⁻¹⁰ 1903—04 32^{1, 2} 1904.

— Occasional papers 7¹⁻³ 1904.

Boston Public library: Works of fiction in the german language 1905.

- Boulder** University of Colorado: Investigations of the department of psychology and education 2 2. s. 1905.
- Braunsberg** Historischer Verein für Ermland: Zeitschrift für die Geschichte und Altertumskunde Ermlands 15 2 (45) 1905.
- Monumenta historiae Warmiensis (25. Lfg.) Bd. IX 1 1905.
- Braunschweig** Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig: Jahrbuch 3 Wolfenbüttel 1904.
- Braunschweigisches Magazin 10 ebd. 1904.
- Bremen** Naturwissenschaftlicher Verein: Abhandlungen 18 1 1905.
- Jahresbericht 39 1903/04 (1904) 40 1904/05 (1905).
- Breslau** Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur: Jahresbericht 81 Erght. 1904 82 1904 (1905).
- Brisbane** R. Society of Queensland: Proceedings 19 1905 1.
- Brooklyn** Institute of arts and sciences: Cold Spring Harbor monographs 3—5 1905.
- The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences Science Bulletin 1 3/4 New-York 1905.
- Brünn** Naturforschender Verein: Verhandlungen 42 1903 (1904).
- Bericht der meteorologischen Commission über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen 22 1902 (1904).
- Schindler, H., Beitrag zur Kenntnis der Niederschlagsverhältnisse Mährens und Schlesiens. 1904.
- Brüssel** Académie r. de Belgique: Mémoires Classe des sciences Collection in 4° T. 1 fasc. 1. 2. 1904 Collection in 8° T. 1 fasc. 1—5 1904—05 Classe des lettres et des sciences morales et politiques et Classe des beaux-arts Collection in 4° T. 1 fasc. 1 1905 Collection in 8° T. 1 fasc. 1—5 1904—05 2 1 1905.
- Bulletin de la classe des sciences 1904 12 1905 1—8.
- Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts 1904 12 1905 1—8.
- Classe des sciences Concours pour 1905 et 1906 et prix perpétuels.
- Classe des lettres et des sciences morales et politiques Concours pour 1908 et prix perpétuels.
- Annuaire 71 1905.
- Commission r. d'histoire: Wauters, A., Table chronologique des chartes et diplômes imprimés concernant l'histoire de la Belgique t. 10 1904 (2 Expl.).
- Brüssel** Société des Bollandistes: Analecta Bollandiana 24 1905. (Append.) Chevalier, U., Repertorium hymnologicum t. 3 (supplementum) 33 897 sqq. 1904. Poncelet, A., Catalogus codicum hagiographicorum Latinorum bibliothecarum Romanarum praeter quam Vaticanae pag. 1—96 1905.

arrivés der im Jahre 1905 eingegangenen Druckdrüben.

ociété Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
verbaux 18 (2. sér. 8) 1904 + (1905) 19 (2. sér. 9) 1905 12.

Magyar tudományos akadémia: Almanach 1905.

rt sur les travaux en 1904 présenté par le secrétaire
l (1905).

zések a nyelv- és széptudományi osztálya köréből 18 s. 12.
19 1—4 1904—05.

- Nyelvtudományi közlemények 34 1—4 1904 35 1 1905.
- Editiones criticae scriptorum Graecorum et Romanorum a collegio philologico classico publici iuris factae: Albii Tibulli carmina. Acc. Sulpiciae alacridia. Ed. G. Némethy. 1905.
- Értekezések a tarsadalmi tudományok köréből 13 s. 1904.
- Értekezések a történeti tudományok köréből 20 1—4 1904—05.
- Török-Magyarkori történelmi emlékek 2. oszt. (Írók) Török történetirók 3. 1904.
- Magyar jogtörténeti emlékek: A Magyar törvényhatóságok jogszabályainak gyűjteménye (Monumenta Hungariae juridico-historica: Corpus statutorum Hungariae municipalium) 5 s. 1904.
- Rimay, János, Munkái kiadja Bárány Radványzky Béla. 1904.
- Archaeologiai értesítő 24 1904 1—3 25 1905 1.
- Szendrei, J., A Magyar viselet történeti fejlődése. 1905.
- Matematikai és természettudományi közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra 20 s. s. 1904—05.
- Matematikai és természettudományi értesítő 22 1—4 1904 23 1. 2. 1905.
- Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 20 1902 (1905).
- Budapest K. Magyar természettudományi társulat: Szilády, Z., A Magyar állattani irodalom ismertetése 3 (1891—1900) 1903.**
- Természettudományi könyvkiadó-vállalat 74 1904.
- Rath, A., Könyveinek címjegyzéke. 1901.
- Budapest K. Ungar. Geologische Anstalt: Földtani közlöny (Geologische Mitteilungen) 34 1904 11, 12. 35 1905 1—7.**
- Mitteilungen aus dem Jahrbuche 14 s. s. 1905 15 1 1904.
- Jahresbericht 1902 (1903).
- Geologische Spezialkarte der Länder der Ungar. Krone Sectionsbl. Zone 14 Kol. 15 1903 & Erläuterungen 1905 Zone 20 Kol. 22 1903.
- Kalecsinszky, A. v., Übersichtskarte der untersuchten Thone der Länder der Ungarischen Krone. 1899—1904.
- Schafarzik, F., Übersichtskarte der auf dem Gebiete der Länder der Ungarischen Krone vorkommenden wichtigeren Decorations und Bau-Gesteine. 1902.

- Budapest** Reg. Scient. Universitas Hung.: Acta 1903/04 2 (1904) 1904/05 1 (1904).
- Buenos Aires** Sociedad científica Argentina: Anales 58 1904 4—59 1905 1—4. s. 60 1905 1—3.
- Buenos Aires** Deutsche Akademische Vereinigung: Veröffentlichungen 1 s.
- Buenos Aires** Museo nacional: Anales 3. ser. 4 1905.
- Cambridge, Brit.** Philosophical society: Transactions 20 1/2 1905. — Proceedings 13 1—3 1905.
- Cambridge, Mass.** Museum of comparative zoölogy at Harvard college: Memoirs 30 2 1905 31 text & plates 1905 32 1905. — Bulletin 42 2 1905 45 4 1904 46 3—5 1904—05 47 1905.
- Catania** Società di storia patria per la Sicilia orientale: Archivio storico per la Sicilia orientale a. 1 1904 2 1905 1. s.
- Catania** Accademia Gioenia di scienze naturali: Atti a. 74—81 ser. 4 vol. 10—17 1897—1904. — Bollettino delle sedute n. s. fasc. 1—86 1888—1905.
- Charkow** Имп. Университетъ (Université Imp.): Записки (Annales) 1904 4. прилож. 1905 1.
- Charlottenburg** Physikalisch-Technische Reichsanstalt: Wissenschaftliche Abhandlungen 4 2 1905. — Die Tätigkeit 1904 (1905).
- Chemnitz** Verein für Chemnitzer Geschichte: Mitteilungen 13 Jahrbuch 1904—05 (1905).
- Cherbourg** Société nationale des sciences naturelles et mathématiques: Mémoires 34 (4. sér. 4) 1905.
- Chicago** University: The decennial publications 1. ser. 1—10 1903—04. A descriptive catalogue of the decennial publications 1904. — The astrophysical journal 21 1905 22 1905 1—4. — The journal of geology 12 1904 7. s. 13 1905 1—7. — The American journal of sociology 10 1904 4—6 11 1—3. — The journal of political economy 13 1904—05.
- Chicago** John Crerar library: Annal report 10 1904 (1905).
- Chicago** Field Columbian museum: Publication 93 1904 94 1904 96—101 1905 103 1905.
- Chicago** Open court publishing co.: The open court 19 1905. — The monist 15 1905.
- Chur** Historisch-Antiquarische Gesellschaft von Graubünden: Jahresbericht 34 1904 (1905).
- Chur** Naturforschende Gesellschaft Graubündens: Jahresbericht N. F. 47 1904/05 (1905).

- Cincinnati** University: Record 1. ser. 1 s. 5. s.—11. 1904—052 1—5 1905.
 — University studies 2. ser. 1 1—s 1905.
- Cincinnati** Lloyd library: Bulletin 7 1903.
 — Mycological notes by C. G. Lloyd 15—18 1903—04.
- Cordoba** (Rep. Argent.) Academia nacional de ciencias: Boletín 17 4 1904 18 1 1905.
- Cordoba** Gobierno de la provincia: Río, M. E., y Achával, L., Geografía de la provincia de Córdoba. Publicación oficial. Vol. 1. 2. & Atlas. Buenos Aires 1904—05.
- Danzig** Naturforschende Gesellschaft: Schriften N. F. 11 1—s 1904—05.
 — Katalog der Bibliothek 1 1904.
- Davenport** Academy of natural sciences: Proceedings 9 1901—03 (1904).
- Des Moines** Iowa geological survey: Vol. 14 annual report 1903 (1904).
- Dorpat** Имп. Юрьевск. Университетъ (Imp. Universitas Jurievensis olim Dorpatensis): УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ (Acta et commentationes) 12 1904.
- Dortmund** Historischer Verein für Dortmund und die Grafschaft Mark: Beiträge zur Geschichte Dortmunds und der Grafschaft Mark 13. 14. 1905.
- Dresden** K. Sächs. Altertums-Verein: Neues Archiv für Sächsische Geschichte und Altertumskunde 26 1905.
 — Jahresbericht 80 1904/05 (1905).
- Dresden** Verein für Geschichte Dresdens: Dresdner Geschichtsblätter 13 1904 14 1905 1—s.
 — Mitteilungen 17/18 1905.
 — Richter, O., Dresden sonst und jetzt. 1905.
- Dresden** Verein für Erdkunde: Mitteilungen H. 1 1905.
 — Bücherei-Verzeichnis 1905.
 — Schneider, O., Muschelgeld-Studien. 1905.
- Drontheim** Det K. Norske Videnskabers Selskab: Skrifter 1904 (1905).
- Dublin** R. Irish academy: Proceedings 3. ser. 25 sect. A s 1905 sect. B 1905 sect. C s—11 1905.
- Dublin** R. Dublin society: The scientific transactions 2. ser. 8 s—1s 1904—05 9 1 1905.
 — The scientific proceedings n. s. 10 s. s. 1904—05 11 1—s 1905.
 — The economic proceedings 1 s. s. 1904—05.

- Dürkheim** Pollichia: Mitteilungen 20 (Jg. 61) 1904 21 (Jg. 62) 1905.
- Düsseldorf** Geschichts-Verein: Beiträge zur Geschichte des Niederrheins 19 1904.
- Edinburgh** Mathematical society: Proceedings 23 1904/05 (1905).
- Edinburgh** R. physical society: Proceedings 16 1904/05 1—3.
- Eichstätt** Historischer Verein: Sammelblatt 19 1904 (1905).
- Eisenberg** Geschichts- und Altertumsforschender Verein: Mitteilungen 3 s. (20) 1905.
- Elberfeld** Bergischer Geschichtsverein: Zeitschrift 37 (N. F. 27) 1904 38 (N. F. 28) 1905.
- Emden** Naturforschende Gesellschaft: Jahresbericht 88 1902/03 (1904) (2 Expl.).
- Erfurt** K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften: Jahrbücher N. F. 31 1905.
- Erfurt** Verein für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt: Mitteilungen 25 1904.
- Erlangen** Physikalisch-Medizinische Sozietät: Sitzungsberichte 36 1904 (1905).
- Florenz** Biblioteca nazionale centrale: Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa 48—59 1904—05.
- Frankfurt a. M.** Verein für Geschichte und Altertumskunde: Archiv für Frankfurts Geschichte und Kunst 3. F. 8 1905.
- Frankfurt a. M.** Physikalischer Verein: Jahresbericht 1903/04 (1905).
- Frankfurt a. M.** Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften: Rektoratswechsel 1905.
- Freiburg i. B.** Kirchengeschichtlicher Verein für Geschichte, christliche Kunst, Altertums- und Literaturkunde des Erzbistums Freiburg: Freiburger Diözesan-Archiv N. F. 5 (32) 1904 6 (33) 1905.
- Genf** Société d'histoire et d'archéologie: Mémoires 2. sér. 8 s. 1904.
- Genf** Société de physique et d'histoire naturelle: Mémoires 34 s. 1905 35 s. 1905.
- Genf** Conservatoire et jardin botaniques: Annuaire 7/8 1904.
- Genua** Istituto Maragliano per lo studio e la cura della tubercolosi e di altre malattie infettive: Annali a. 1 vol. 1 1—s. 1904.
- Giessen** Oberhessischer Geschichtsverein: Mitteilungen N. F. 13 1905.
- Giessen** Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde: Bericht 34 1905.
- Göteborg** Högskola: Årsskrift 10 1904.

Verzeichnis der im Jahre 1905 eingegangenen Druckschriften:

- e Denison university:** Bulletin of the scientific laboratories
-1: 1904 General index to the first 10 vol. 1904.
- istorischer Verein für Steiermark:** Steirische Zeitschrift
eschichte 2 1904.
- aturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:** Mitteilungen
04 (1905) Haupt-Repertorium üb. H. 21—40 1905.
- ld Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:** Pommerache
bücher 6 1905.
- ld Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern**
ur Rügen: Mitteilungen 36 1904 (1905).
- ben Niederlausitzer Gesellschaft für Anthropologie und Alter-**
tums inde: Niederlausitzer Mitteilungen 8 7/8 1904.
- ng K. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Neder-**
landsch-Indië: Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van
Nederlandsch-Indië 7. volgr. 4 (58) 1905.
- Haarlem Hollandsche maatschappij der wetenschappen:** Natuur-
kundige verhandelingen 6 1 1905.
- Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles 2. sér.
10 1905.
- Programma voor 1904.
- Programme pour 1904 pour 1905.
- Huygens, Christiaan, Oeuvres complètes 10 La Haye 1905.
- Haarlem Museum Teyler:** Archives 2. sér. 9 1905.
- Catalogue de la bibliothèque t. 3 1904.
- Habana Universidad:** Revista de la facultad de letras y ciencias
vol. 1 2. s. 1905.
- Hald Station franco-scandinave de sondages aériens:** Travaux
1902—03 Viborg 1904.
- Halle Ksl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Natur-**
forscher: Leopoldina 40 1904 12 41 1905 1—11.
- Halle Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen:**
Zeitschrift für Naturwissenschaften 77 6 1905.
- Halle Verein für Erdkunde:** Mitteilungen 1905.
- Halle Deutsche Morgenländische Gesellschaft:** Zeitschrift 58 4 1904
59 1—3 1905.
- Sitzungen 1904.
- Halle Landwirtschaftliches Institut der Universität:** Berichte aus
dem physiologischen Laboratorium und der Versuchsanstalt 17
1904.
- Hamburg Verein für Hamburgische Geschichte:** Zeitschrift 12 1905.
- Mitteilungen 24 1904 (1905).
- Hamburg Mathematische Gesellschaft:** Mitteilungen 4 6 1905.

- Hamburg** Naturwissenschaftlicher Verein: Verhandlungen 3. F. 12 1904 (1905).
- Hanoi** École française d'extrême-orient: Bulletin 4 1904 4 5 1905 1s.
- Heidelberg** Historisch-Philosophischer Verein: Neue Heidelberger Jahrbücher 13 s 1905 14 1 1905.
- Heidelberg** Naturhistorisch-Medizinischer Verein: Verhandlungen N. F. 8 1 1904.
- Heidelberg** Grhzgl. Sternwarte (Astrometrisches Institut): Mitteilungen 5. 6. 1905.
- Helsingfors** Finska vetenskaps-societeten: Öfversigt af förhandlingar 46 1903/04 (1904).
- Observations météorologiques publ. p. l'institut météorologique central 18 1899 (1904) 19 1900 (1905).
- Heinrichs, A., Etat des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1893/94 (1904) 1894/95 (1905).
- Helsingfors** Societas pro fauna et flora Fennica: Acta 25 1903—04 26 1904.
- Meddelanden 30 1903/04.
- Helsingfors** Commission géologique de la Finlande: Bulletin 15. 16. 1905.
- Hermannstadt** Verein für Siebenbürgische Landeskunde: Archiv N. F. 31 s 1905 32 s 1905.
- Jahresbericht 1904 (1905).
- Hermannstadt** Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften: Verhandlungen und Mitteilungen 53 1903 (1905).
- Hohenleuben** Vogtländischer Altertumsforschender Verein: Jahresbericht 74/75 1905.
- Jassy** Universitatea: Annales scientifiques 3 s. s. 1905.
- Ithaca** Cornell university: The journal of physical chemistry 9 1905 1—s.
- Kalkutta** Asiatic society of Bengal: Bibliotheca Indica n. s. 1095—1111. 1113—1127. 1904—05.
- Kalkutta** Geological survey of India: Memoirs Palaeontologia Indica n. s. 2 s 1905.
- Records 31 s. s. 1904 32 1. s. 1905.
- Kalkutta** Board of scientific advice for India: Annual report 1903/04 (1905).
- Kapstadt** South African philosophical society: Transactions 15 s—s 1904—05 16 1. s. 1905.
- (**Kapstadt**) South African association for the advancement of science: Report 2. meeting Johannesburg 1904.

- Kasan** Имп. Университетъ: Ученыя записки 72 1905 1—10.
 — Увѣстiя физико-математическаго общества (Bulletin de la société physico-mathématique) 2. сер. (sér.) 14 s—4 1904—05.
- Kassel** Verein für Hessische Geschichte und Landeskunde: Zeitschrift N. F. Suppl. 14 1905.
- Kassel** Verein für Naturkunde: Abhandlungen und Bericht 49 üb. d. 68. u. 69. Vereinsj. 1903/05 (1905).
- Kiel** Gesellschaft für Schleswig-Holsteinische Geschichte: Zeitschrift 34 1904 35 1905.
- Kiel** Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein: Schriften 13 1 1905 Register zu Bd. 1—12 1904.
- Kiel** Sternwarte der Universität: Astronomische Beobachtungen 1 1905.
- Kiew** Общество естествоиспытателей (Société des naturalistes): Записки (Mémoires) 19 1905.
- Kioto** College of science and engineering, Imp. University: Memoirs 1 2 1904/05.
- Klagenfurt** Geschichtsverein für Kärnten: Carinthia I 94 1904.
 — Jahres-Bericht 1903 u. Voranschlag 1904 (1904).
- Klausenburg** Erdélyi múzeum-egylet (Siebenbürgischer Museumverein): Értésítő ' az orvos - természet - tud. szakosztályából (Sitzungsberichte der medizinisch-naturwissenschaftlichen Sektion) I. Orv. sz. (Medizin. Abtlg.) 29. évf. 1904 26. köt. 1 II. Természettud. sz. (Naturwiss. Abtlg.) 28. évf. 1903 25. köt. 3 (1904) 29. évf. 1904 26. köt. (1904—05).
- Königsberg i. Pr.** Altertumsgesellschaft Prussia: Bezzenberger, A., Analysen vorgeschichtlicher Bronzen Ostpreussens. 1904.
 — Hollack, E., u. Peiser, F. E., Das Gräberfeld von Moythienen. 1904.
- Königsberg i. Pr.** Physikalisch-ökonomische Gesellschaft: Schriften 45 1904.
- Kopenhagen** Det K. Danske Videnskabernes Selskab: Skrifter Histor. og filosof. Afdelg. 6. R. 6 s 1905 Naturvidensk. og mathem. Afdelg. 7. R. 1 4 1905 2 4 1905.
 — Oversigt over Forhandlinger (Bulletin) 1904 s (1905) 1905 1—5.
- Krakau** Akademia umiejętności: Anzeiger (Bulletin international) Philol. Kl. & Histor.-philos. Kl. (Classe de philologie & Classe d'histoire et de philosophie) 1904 s—10 1905 1—7 Mathem.-naturwiss. Kl. (Classe des sciences mathématiques et naturelles) 1904 s—10 1905 1—7.

- (Krakau)** Catalogue of Polish scientific literature Katalog literatury naukowej Polskiej wydawany przez komisję bibliograficzną wydziału matematyczno-przyrodniczego 4 1904.
- Kristiania** Videnskabs-Selskabet: Forhandling 1903 (1904) 1904 (1905).
- Lalbach** Musealverein für Krain (Muzejsko društvo za Kranjsko): Mitteilungen 17 1904 2—4.
- Izvestja 10—12 1900—02 14 1904.
- Landshut** Historischer Verein für Niederbayern: Verhandlungen 41 1905.
- La Plata** Dirección general de estadística de la provincia de Buenos Aires: Demografía a. 1900 (1905) 1901 (1904) 1902 (1905).
- Leiden** Maatschappij der Nederlandsche letterkunde: Handelingen en mededeelingen 1904/05 (1905) Bijl.: Levensberichten der afgestorven medeleden 1905.
- Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde 23 (n. r. 15) 24 1905 24 (n. r. 16) 1—3 1905.
- Cartularium der abdij Mariënweerd uitg. d. James de Fremery. 1890.
- Hesseling, D. C., Het Negerhollands der Deense Antillen. 1905.
- Nederlandsche Volksboeken 10 1905.
- Leiden** Sterrewacht: Verslag van den staat en van de aldaar volbrachte waarnemingen 1902—04 (1905).
- Leipzig** K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften: Abhandlungen Philol.-histor. Kl. 23 1. 2. 1904—05 Mathem.-phys. Kl. 29 2. 4. 1905.
- Berichte über die Verhandlungen Philol.-histor. Kl. 56 1904 4. 5. Mathem.-phys. Kl. 56 1904 5 57 1905 1—4.
- Leipzig** Fürstl. Jablonowskische Gesellschaft: Preisschriften 39 (24 d. histor.-nationalökonom. Sektion) 1905.
- Jahresbericht 1905.
- Leipzig** Naturforschende Gesellschaft: Sitzungsberichte 30/31 1903/04 (1905).
- Lemberg** Towarzystwo Inżynierów: Lud 10 1904 4 11 1905.
- Linz** Museum Francisco-Carolinum: Jahres-Bericht 63 1905.
- Liverpool** Literary and philosophical society: Proceedings 92/93. sess. 1902/03 & 1903/04 no. 57 (1904).
- Liverpool** Biological society: Proceedings and transactions 19 1904/05 (1905).
- London** R. Society: Philosophical Transactions Ser. A 204 1904 pag. 221 ff 205 1905 pag. 1—355 Ser. B 197 1904 pag. 347 ff 198 1905 pag. 1—141.

- (London) Proceedings 75 (Obituary notices of fellows) 4 1905
Ser. A 76 1905 Ser. B 76 1905.
— Year-book 9 1905.
— Reports to the evolution committee 2 1905.
— Reports of the sleeping sickness commission 5. 6. 1905.
— Report to the government of Ceylon on the pearl oyster fisheries
of the gulf of Manaar, by W. A. Herdman. With supplementary
reports upon the marine biology of Ceylon, by other naturalists.
P. 2. 1904.
(—) International Association of Academies: Report of proceedings
2. general assembly held in London 1904 (2 Expl.).
London Mathematical society: Proceedings 2. ser. 25—7 1903 31—7
1905.
— List of members 1904 (1904/05 41. sess.).
London R. astronomical society: Memoirs 55 1904 appendix 2 1904
57 1. s. 1905.
— Monthly notices 65 1—9 1904—05 66 1 1905.
London R. microscopical society: Journal 1905.
London Linnean society: Transactions 2. ser. Botany 610. 11. 1904
7 1. s. 1904—05 Zoology 9 1—9 1904—05 10 1—3 1904—05.
— Proceedings 1904/05 (1905).
— Journal Botany 36 no. 255/256 1905 37 no. 258. 259. 1905
Zoology 29 no. 191. 192. 1905.
— List 1905/06 (1905).
London Zoological society: Proceedings of the general meetings
for scientific business 1904 1 s. 2. 1905 1.
London Secretary of the admiralty: Report of H. M.'s astronomer
at the Cape of good hope 1904 (1905).
Lucca R. Accademia di scienze, lettere ed arti: Atti 24 1886.
Lübeck Verein für Lübeckische Geschichte und Altertumskunde:
Mitteilungen 11 7. s. 1904.
— Jahresbericht 1902. 1903. 1904.
Lüttich Société géologique de Belgique: Annales 31 4 1903/04 32
1—3 1904—05.
Lüttich (Exposition universelle) III^{me} Congrès international de l'art
public 1905: Patronage, programme, comités, règlement, travaux,
festivités, adhésion.
— Broerman, E., Aux amis des arts de toutes les nations. de tous
les domaines de la pensée et du travail. Bruxelles 1905.
Lund Universitetet: Årsskrift (Acta) 39 1. s. 1903—04.
Luxern Historischer Verein der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz,
Unterwalden und Zug: Der Geschichtsfreund 60 1905.

- Lyon** Académie des sciences, belles-lettres et arts: Mémoires 3. sér. 8 1905.
- Lyon** Société Linnéenne: Annales n. s. 51 1905.
- Lyon** Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles: Annales 8. sér. 2 1904 (1905).
- Lyon** Université: Annales n. s. II. Droit, Lettres 14 1905.
— Bulletin historique du diocèse de Lyon paraissant sous le patronage des facultés catholiques 6 1905.
- Madison** Wisconsin academy of sciences, arts and letters: Transactions 14, 1903 (1904).
- Madrid** R. Academia de la historia: Boletín 46. 47. 1905.
- Madrid** R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales: Memorias 22 1905.
— Revista 1 1904;— 2 1905 3 1905 1. 2.
— Programa de premios para el concurso del a. 1906 (1904).
- Madrid** Universidad central de España: Memoria del curso de 1903 á 1904 y Anuario del de 1904 á 1905 (1905).
- Magdeburg** Verein für Geschichte und Altertumskunde des Herzogtums und Erzstifts Magdeburg: Geschichts-Blätter für Stadt und Land Magdeburg 39 1904.
- Mailand** R. Istituto Lombardo di scienze e lettere: Memorie Cl. di scienze matem. e natur. 20 (3. ser. 11) 3—5 1904—05 Cl. di lettere e scienze mor. e stor. 21 (3. ser. 12) 5 1905.
— Rendiconti 2. ser. 37 17—20 1904—05 38 1—16 1905.
— Atti della fondazione scientifica Cagnola 19 1903/04 (1905).
- Manchester** Literary and philosophical society: Memoirs and proceedings 49 1904/05 (1905).
- Manchester** University: Publications (7) Historical series 3 1905.
- Mannheim** Altertumsverein: Mannheimer Geschichtsblätter 6 1905 1—12.
- Maredsous** Abbaye: Revue Bénédictine 22 1905.
- Marseille** Faculté des sciences: Annales 14 1904.
- Meiningen** Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte und Landeskunde: Schriften 50. 51. 1904—05.
- Meissen** Verein für Geschichte der Stadt Meissen: Mitteilungen 6, 1904.
- Melbourne** R. Society of Victoria: Proceedings n. s. 17, 1905 18, 1905.
- Melbourne** Secretary for mines and water supply of Victoria: Annual Report 1904.
- Messina** R. Accademia Peloritana: Atti 20 1905/06 1 (1905).

- Metz** Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde: Jahr-Buch 16 1904.
- Mexiko** Academia Mexicana de ciencias exactas, físicas y naturales: Anales 1 1. 2. 1903.
- Mexiko** Sociedad científica „Antonio Alzate“: Memorias y Revista 13 1899 ^{9/10} (1904) 19 1902/03 ^{11/12} (1904) 20 1903 ^{11/12} 21 1904 ^{1/4}.
- Mexiko** Instituto geológico: Boletín 20 1905.
— Parergones 1 s—s 1904—05.
- Mexiko** Observatorio meteorológico central: Boletín mensual 1902 agosto 1902 septiembre 1904 mayo.
- Missoula** University of Montana: Bulletin 23 [! 24] —26 1905.
- Möln** Verein für die Geschichte des Herzogtums Lauenburg: Archiv 8 (Vaterländisches Archiv für das Herzogtum Lauenburg N. F. 11) 1 1905.
- Montevideo** Museo nacional: Anales 5 pág. 161—372 1905.
- Montpellier** Académie des sciences et lettres: Mémoires 2. sér. Sect. de médecine 2 s 1905 Sect. des sciences 3 s 1904.
- Moskau** Математическое общество (Société mathématique): Математическій сборникъ 24 s 1904.
- Moskau** Société imp. des naturalistes: Nouveaux mémoires 16 (Mémoires 22) s. 4. 1901—05.
— Bulletin 1904 s—s (1905).
- Moskau** Метеорологическое обсерваторіумъ Имр. Университета: Наблюдения 1902 (1903).
- München** K. Bayer. Akademie der Wissenschaften: Abhandlungen Philos.-philol. Kl. 22 (Denkschriften 74) 1 1902 s 1905 23 1 1905 Histor. Kl. 23 (Denkschriften 76) s 1904 Mathem.-physik. Kl. 22 (Denkschriften 75) s 1904.
— Sitzungsberichte d. philos.-philol. u. d. histor. Kl. 1904 s (1905) 1905 1—s d. mathem.-physik. Kl. 1904 s (1905) 1905 1. s.
— Almanach (16.) 1905.
— Krumbacher, K., Das Problem der neugriechischen Schriftsprache (Festrede) 1903.
— Amira, K. v., Konrad v. Maurer (Gedächtnisrede) 1903.
— Pringsheim, A., Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Festrede) 1904.
— Heigel, K. Th., Zum Andenken an Karl v. Zittel 1904.
— Friedrich, J., Gedächtnisrede auf Karl Adolf v. Cornelius 1904.
- München** Historischer Verein von Oberbayern: Oberbayerisches Archiv für vaterländische Geschichte 51 s 1905.
— Altbayerische Monatsschrift 4 1903/04 s 5 1905 1—s.

- Neapel** Società R.: Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche 2. ser. 12 1905 della R. Accademia di scienze morali e politiche 35 1905.
- (**Neapel**) Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche 3. ser. 10 (a. 43) 1904 ₈₋₁₂ 11 (a. 44) 1905 ₁₋₇ Indice generale dei lavori pubblicati dal 1737 al 1903 (1904).
- Rendiconto delle tornate e dei lavori dell'Accademia di scienze morali e politiche a. 42. 43. 1904—05.
- Neisse** Philomathie: Bericht 32 1902/04.
- Neuburg a. D.** Historischer Verein: Neuburger Kollektaneen-Blatt 66/67 1902/03.
- New Haven** American oriental society: Journal 25, 1904 26, 1905.
- New York** American mathematical society: Bulletin 11 ₄₋₁₀ 1905 _{12, 1-3} 1905.
- Annual register 1905.
- (**New York**) The astronomical and astrophysical society of America: Meeting 6 Philadelphia Pa. 1904 (repr. from „Science“ n. s. 21 1905).
- New York** American geographical society: Bulletin 37 1905 ₁₋₁₁.
- New York** Columbia university: Quarterly 7 ₂₋₄ 1905 8, 1905.
- Nürnberg** Naturhistorische Gesellschaft: Abhandlungen 15, 1904.
- Nürnberg** Germanisches Nationalmuseum: Anzeiger (& Mitteilungen) 1904.
- Bredt, E. W., Katalog der mittelalterlichen Miniaturen. 1903.
- Odessa** Новороссійское общество естествоиспытателей (Société des naturalistes de la Nouvelle Russie): Записки (Mémoires) 26. 27. 1904—05.
- Osnabrück** Verein für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück: Mitteilungen 29 1904 (1905).
- Ottawa** Departement of the interior: White, J., Standard topographical map Sheet I. S. W. 1904.
- ders., Relief map of the dominion of Canada 1904.
- ders., Resource map (& Statistics) of the dominion of Canada 1904.
- Padua** Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana: Atti Cl. di scienze naturali, fisiche e matematiche n. s. 1 1904, Cl. di scienze storiche, filologiche e filosofiche n. s. 1 1904.
- Palermo** Circolo matematico: Rendiconti 19 1905 20 1905.
- Annuario 1905.
- Paris** Académie des sciences: de Laguerre, Oeuvres t. 1 1898 2 1905.

- Paris** Société mathématique de France: Bulletin 32 1904, 33 1905.
- Paris** Comité international des poids et mesures: Procès-verbaux des séances 2. sér. 3 1905.
- Paris** École polytechnique: Journal 2. sér. 10 1905.
- Paris** Musée Guimet: Annales Bibliothèque d'études 16 1904 17 1905.
- Revue de l'histoire des religions a. 25 1904 t. 49 s. t. 50 a. 26 1905 t. 51 1. 2.
- Le jubilé du Musée Guimet 1904.
- Philadelphia** American philosophical society: Transactions n. s. 21, 1905.
- Proceedings 43 1904 no. 177. 178. 44 1905 no. 179. 180.
- Philadelphia** Academy of natural sciences: Proceedings 56 1904 2. s. (1904—05) 57 1905 1. 2.
- Philadelphia** American academy of political and social science: Annals 25. 26. 1905.
- Philadelphia** University of Pennsylvania: The university bulletins 5. ser. 2 s. (Catalogue 1904/05) 1904 3 s. (The provost's report 1904) 1905 4 s. (Proceedings of university day 1905) 1905 5 s. (Proceedings of commencement 1905) 1905 6. ser. 1 s. (University of Pennsylvania publications) 1905.
- Pisa** Società Toscana di scienze naturali: Atti Processi verbali 14 1903/05 6—8.
- Pisa** R. Scuola normale superiore: Annali Filosofia e filologia 18 1905.
- Pisa** R. Università: Annuario 1904/05 (1905).
- Porto** Academia polytechnica: Annaes scientificos 1 s. 1905.
- Posen** Historische Gesellschaft für die Provinz Posen: Zeitschrift 19 1904.
- Historische Monatsblätter für die Provinz Posen 5 1904.
- Potsdam** K. Preuss. Geodätisches Institut: Veröffentlichung N. F. 18—23 1905.
- Centralbureau der internationalen Erdmessung Veröffentlichungen N. F. 11 1905.
- Comptes rendus des séances de la 14. conférence générale de l'association géodésique internationale (Verhandlungen der 14. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung) 1903 vol. (Th.) 2 (1905).
- Prag** Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen: Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit 1904 (1905).
- Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde 5 s. s. 1904—05 6 1905.
- Bibliothek Deutscher Schriftsteller aus Böhmen 16 1905.

- Prag** Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen: Mitteilungen 43 1904—05.
- Prag** Deutscher Naturwissenschaftlich-Medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“: Sitzungsberichte 1904 N. F. 24 (52).
- Prag** Česká společnost entomologická (Societas entomologica Bohemiae): Časopis (Acta) 1 1904.
- Prag** K. K. Sternwarte: Magnetische und meteorologische Beobachtungen 65 1904 (1905).
- Regensburg** Historischer Verein von Oberpfalz und Regensburg: Verhandlungen 56 (N. F. 48) 1904.
- Rennes** Société scientifique et médicale de l'ouest: Bulletin 13 1904 s. 4. 14 1905 1.
- Rennes** Faculté des lettres: Annales de Bretagne 20 1904—05.
- Riga** Naturforscher-Verein: Korrespondenzblatt 46 1903 47 1904.
- Rom** R. Accademia dei Lincei: Atti Cl. di scienze fisiche, matematiche e naturali Memorie a. 298 ser. 5 vol. 4 1904 a. 301 ser. 5 vol. 5 1904 Rendiconti ser. 5 vol. 13 1904 2. sem. 12 14 1905 1. sem. 1—12 2. sem. 1—10 Atti a. 301 1904 ser. 5 Notizie degli scavi di antichità vol. 1 4—12; indici (1905) a. 302 1905 vol. 2 1—7. Atti a. 302 1905 Rendiconto dell' adunanza solenne 1905.
- Rendiconti Cl. di scienze morali, storiche e filologiche ser. 5 vol. 13 1904 9—12 14 1905 1—8.
- Rom** R. Società Romana di storia patria: Archivio 27 s. 4 1904 28 s. 1905.
- Rom** Società italiana delle scienze: Memorie di matematica e di fisica 3. ser. 13 1905.
- Rostock** Verein für Rostocks Altertümer: Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock 4, 1905.
- Salzwedel** Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte und Industrie Abt. f. Geschichte: Jahresbericht 32 1905.
- Katalog der Bibliothek 1904.
- San Francisco** California academy of sciences: Memoirs 4 1904.
- Proceedings 3. ser. Zoology 3 7—13 1904 Botany 2 11 1904 Geology 1 10 1904.
- Constitution and by-laws. Officers, trustees and members. 1904.
- San Francisco** Geographical society of California: Transactions and proceedings 2. ser. 4 1904.
- Sankt Gallen** Historischer Verein: Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte 29 (3. F. 9) s. 1905.
- Neujahrsblatt (4. F.) 1904. 1905.

- Sankt Petersburg** Имп. Академія наукъ (Académie Imp. des sciences):
 Записки (Mémoires) 8. sér. Физ.-матем.-отдѣл. (Cl. des sciences phys. et mathém.) 16 4—10 1904—05 Истор.-филол. отдѣл. (Cl. des sciences histor.-philol.) 6 7 1904 8 1. 2. 1905.
- **Извѣстія** (Bulletin) 17 5 1902 18 1903 19 1903 20 1904 21 1904.
- **Извѣстія постоянной центральной сейсмической комисіи** (Comptes rendus des séances de la commission sismique permanente) 2 1 1905.
- **Ежегодникъ зоологическаго музея** (Annuaire du musée zoologique) 9 з. 4. 1905.
- **Bibliotheca Buddhica** 4 1904 8 1904.
- **Вѣстникъ Хронологическаго Византийскаго Временника** 11 1905.
- **Извѣстія отдѣленія русскаго языка и словесности** 9 1904 4 10 1905 1. 2.
- **Сборникъ отдѣленія русскаго языка и словесности** 76—79 1904—05.
- Sankt Petersburg** Имп. Русск. географическое общество: **Извѣстія** 39 1903 40 1904 41 1905 1—4.
- **Отчетъ** 1904 (1905).
- **Извѣстія Туркестанскаго отдѣла** 4 6 1905.
- Sankt Petersburg** Духовная академія: **Церковный вѣстникъ** 30 1904 49—52 31 1905 1—39. 42—47. Прилож.: **Христіанское чтеніе** 84 1904 декабрь 85 1905 январь—ноябрь.
- Santiago** Sociedad científica de Chile (Société scientifique du Chili):
 Actas (Actes) 13 1903 4/5 14 1904 1—4.
- Santiago** Universidad: **Anales** t. 114/115 a. 62 1904 mayo-octubre t. 116 a. 63 marzo-junio.
- São Paulo** Sociedade scientifica: **Revista** n. 1. 2. 1905.
- Schmalkalden** Verein für Hennebergische Geschichte und Landeskunde: **Zeitschrift** 15 1905.
- Siens** R. Accademia dei rozzi: **Bullettino Senese di storia patria** 11 1904 1 (1905) 12 1905 1.
- Speier** Historischer Verein der Pfalz: **Mitteilungen** 27 1904.
- Stavanger** Museum: **Aarshefte** 15 1904 (1905).
- Stockholm** K. Svenska vetenskaps-akademien: **Handlingar** n. f. 39 1—5 1904—05.
- **Les prix Nobel en 1902** (1905).
- **Meddelanden från Nobelinstitut** bd. 1 1 1905.
- **Arkiv för matematik, astronomi och fysik** 1 3/4 1904 2 1/2 1905.
- **Arkiv för kemi, mineralogi och geologi** 1 3/4 1904 2 1 1905.
- **Arkiv för botanik** 4 1905.
- **Arkiv för zoologi** 2 1—3 1904—05.

- (**Stockholm**) Astronomiska iakttagelser och undersökningar anställda på Stockholms Observatorium 8 : 1905.
- Lönnberg, E., Peter Artedi. Transl. by W. E. Harlock. 1905.
- Stockholm** K. Biblioteket: Sveriges offentliga bibliotek accessionskatalog 17 1902 (1904).
- Strassburg** Historisch - Literarischer Zweigverein des Vogesen-Clubs: Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Literatur Elsass-Lothringens 21 1905.
- Sunderland** West Hendon House observatory: Publications 3 1905.
- Sydney** Geological survey of New South Wales: Records 7 : 1904 8 : 1905.
- Geological sketch map of the country in the vicinity of Sydney 1904.
- Tokio** Medicinische Facultät der Ksl.-Japan. Universität: Mitteilungen 6 : 1905.
- Tokio** College of science, Imp. University: Journal 20 : 1904—05.
- Tokio** Earthquake investigation committee: Publications in foreign languages 19—21 1904—05.
- Tokio** Sūgaku-Butsurigakkwa (Physico-mathematical society): Kiji-Gaiyō (Proceedings) 2 : 1905.
- Tokio** Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mitteilungen 10 : 1905.
- Satzung und Geschäftsordnung 1904.
- Toronto** Canadian institute: Transactions 8 : (16) 1905.
- Toulouse** Faculté des sciences: Annales 2. sér. 6 1904 : 7 1905 1. 2.
- Turin** R. Accademia delle scienze: Memorie 2. ser. 55 1905.
- Atti 40 1905 & (Annesso:) R. Osservatorio astronomico Osservazioni meteorologiche fatte nell' a. 1904 (1905).
- Upsala** Observatoire météorologique de l'université: Bulletin mensuel 36 1904 (1904—05).
- Upsala** Geological institution of the university: Bulletin 6 (No. 11/12) 1902/03 (1905).
- Urbana** Illinois state laboratory of natural history: Bulletin 7 : 1905.
- Washington** Carnegie institution: Year-book 3 1904 (1905). (1—3 1902—04 2. Expl.)
- Publication 4. 6—13. 15—21. 23—31. 1903—05.
- Contributions from the solar observatory Mt. Wilson, California 1. 2. 1905.
- Washington** Smithsonian institution: Bulletin of the United States national museum 53 : 1905.

(Washington) Report of the national museum f. the year ending june 30, 1903 (1905).

— Contributions from the United States national herbarium 9 1905.

Washington Coast and geodetic survey: Report of the superintendent 1903/04 & appendix 1—8 (1904).

Washington United States geological survey: Bulletin 234—240. 242—246. 248—250. 252—255. 257—262. 264. 1904—05.

— Annual report of the director 25 1903/04 (1904).

— Monographs 47 1905.

— Professional paper 29—33. 35. 39. 1904—05.

— Water-supply and irrigation papers 99. 100. 103. 105—122. 124. 126. 128. 132. 1904—05.

— Mineral resources of the United States 1903 (1904).

— (Maps) United States scale 1/2, 500,000 1898. United States 1895 repr. 1904. United States 1896 repr. 1904 Base map Contour map Relief map.

— (Topographic map:) Arizona sc. 1/250,000 Chino sheet 1891 repr. 1900 Echo Cliffs sheet 1891 repr. 1901 Kaibab sheet 1886 repr. 1903 San Francisco Mt. sheet 1894 repr. 1905. California Concord quadrangle sc. 1/62500 1897 repr. 1905 Mt. Hamilton sheet sc. 1/62500 1897 repr. 1901 Napa quadrangle sc. 1/125000 1902 (Los Angeles co.) Pasadena sheet sc. 1/62500 1900 repr. 1904 Pomona quadrangle sc. 1/62500 1904 (Los Angeles co.) Rock Creek quadrangle sc. 1/62500 1903 San Francisco quadrangle sc. 1/62500 1899 repr. 1904 Tamalpais sheet sc. 1/62500 1897 repr. 1905. Illinois sc. 1/62500 Chicago quadrangle 1901 repr. 1904 (Cook county) Evanston quadrangle 1899 repr. 1905. Kansas-Missouri Kansas city sc. 1/125,000 1894 repr. 1900. Maryland Brandywine sheet sc. 1/62500 1895 repr. 1899. Maryland-District of Columbia-Virginia Washington quadrangle sc. 1/62500 1900 repr. 1904. Massachusetts sc. 1/62500 Boston quadrangle 1903 Dedham sheet 1894 repr. 1902. Nebraska Iowa Omaha and vicinity sc. 1/62500 1898. New York city and vicinity sc. 1/62500 1901 repr. 1904. New York Niagara falls and vicinity sc. 1/62500 1902. Wisconsin sc. 1/62500 Delavan sheet 1893 repr. 1901 Geneva sheet 1893 repr. 1903.

Washington Department of agriculture: Monthly weather review 33, (335) 1905.

Washington Bureau of standards: Bulletin 1 s. s. 1905.

- Washington** Georgetown university: Publication 2. ser. 2 (A catalogue of the officers and students 117. year 1904/05) 1905.
- A catalogue of the faculty and students of Georgetown college preparatory school 1904/05 (1905).
- Wien** Ksl. Akademie der Wissenschaften: Denkschriften Mathem.-naturwiss. Kl. 77 1905.
- Sitzungsberichte Philos.-histor. Kl. 149 1904 (1905) Mathem.-naturwiss. Kl. Abt. 1 1904 113_{8—10} 1905 114_{1—5} Abt. 2a 1904 113_{8—10} 1905 114_{1—7} Abt. 2b 1904 113_{7—10} 1905 114_{1—8} Abt. 3 1904 113_{8—10} 1905 114_{1—5}.
- Almanach 54 1905.
- Archiv für österreichische Geschichte hrsg. von der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Kommission 93, 1905.
- Monumenta conciliorum generalium seculi XV ediderunt socii delegati: Concilium Basileense Scriptores t. 3 p. 4 1896.
- Der römische Limes in Österreich 5 1904 6 1905.
- Mitteilungen der Erdbeben-Kommission N. F. 25—29 1904—05.
- Wien** Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Jahrbuch für Landeskunde von Niederösterreich N. F. 3 1904 (1905).
- Monatsblatt 3 1904.
- Wien** Verein Carnuntum: Bericht 1902 (1904) 1903 (1905).
- Wien** Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse: Schriften 44 1903/04 (1904) 45 1904/05 (1905).
- Wien** K. K. Zoologisch-Botanische Gesellschaft: Verhandlungen 54 1904₁₀.
- Wien** K. K. Österreichische Kommission der internationalen Erdmessung: Veröffentlichung Tinter, W., Die Schlussfehler der Dreiecke der Triangulierung erster Ordnung in der k. u. k. österreichisch-ungarischen Monarchie 1904 Forts. 1905.
- Wien** Österreichische Gradmessungs-Kommission: Verhandlungen Protokolle über die Sitzungen 1902 (1903) 1903 (1904).
- (Publicationen für die internationale Erdmessung) Astronomische Arbeiten des K. K. Gradmessungs-Bureau 13 1903.
- Wien** K. K. Zentral-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus: Jahrbücher 1903 (48) N. F. 40 & Anhang (1905).
- Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. Prof. Dr. J. M. Pernter. 21 1904₁₂ 22 1905_{1—11}.
- Wien** K. K. Geologische Reichsanstalt: Verhandlungen 1904_{13—18} 1905_{1—12}.
- Jahrbuch 1904 54_{2—4} 1905 55 General-Register der Bände 41—50 (u. d. Verhandlungen 1891—1900) 1905.

Wien K. u. K. Militär-geographisches Institut: Die Ergebnisse der Triangulierungen Bd. 1—3 1901—05.

(**Wien**) Congrès international de botanique: 2. session 1905.

— Briquet, J., Texte synoptique des documents destinés à servir de base aux débats présenté au nom de la Commission internationale de nomenclature botanique. Berlin 1905.

Wiesbaden Verein für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung: Mitteilungen an seine Mitglieder 1904/05.

Wiesbaden Nassauischer Verein für Naturkunde: Jahrbücher 58 1905.

Würzburg Historischer Verein von Unterfranken und Aschaffenburg: Archiv 46 1904.

— Jahres-Bericht 1903 (1904).

Würzburg Physikalisch-Medizinische Gesellschaft: Verhandlungen N. F. 37 s.—10 1904—05 38 1 1905.

— Sitzungsberichte 1904 4—10 1905 1. s.

Zürich Antiquarische Gesellschaft: Mitteilungen 26 s 1905.

Zürich Naturforschende Gesellschaft: Vierteljahrsschrift 49 1904 s. 1/4 50 1905 1.—s.

Zürich Astronomische Mitteilungen 96 1905 (Seperatabdr. a. d. Vierteljahrsschrift 50 1905).

Zürich Physikalische Gesellschaft: Mitteilungen 8 1905.

Zürich Schweizerisches Landesmuseum: Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde (Indicateur d'antiquités suisses) N. F. 6 1904/05 2—4 7 1905/06 1.—s. (Beil.): Rahn, J. R., Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler: Die Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens beschrieben von R. Durrer Bog. 18—23.

— Jahresbericht 13 1904 (1905).

Zürich Eidg. Polytechnikum: Festschrift zur Feier des fünfzig-jährigen Bestehens Bd. 1. 2. Frauenfeld 1905.

B. Anderweitig eingegangene Druckschriften.

Abbe, E., Gesammelte Abhandlungen Bd. 2 Jena 1906.

Abhandlungen, Astronomische, als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten hrsg. v. H. Kreutz 8—10 Kiel 1905.

- Acta mathematica** hrsg. v. (réd. p.) G. Mittag-Leffler 30 1905¹.
- Adamkiewicz, A.**, Der Krebs und die „Goldene Statue“. Wien 1905.
- Wissenschaft und Verbrechen. Wien 1899.
- Archivio paleografico italiano** dir. da E. Monaci fasc. 20 Roma 1905.
- Blätter**, Kritische, für die gesamten Sozialwissenschaften Jg. 1¹ Berlin 1905.
- Bratke, E.**, Epilegomena zur Wiener Ausgabe der Altercatio legis inter Simonem Judaeum et Theophilum Christianum. Wien 1904. (Aus: Sitzungsberichte d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien Philos.-histor. Kl. Bd. 148.)
- Bulletin de la société des anciens textes français** 30. ann.² Paris 1904.
- Cabreira, A.**, Quelques mots sur les mathématiques en Portugal. Avec biographie de l'auteur par A. Santos Lucas. Lisbonne 1905.
- Le Devoir** t. 29 An familistère, Guise (Aisne) 1905.
- Echo**, Literarisches, Jg. 7¹⁴ Berlin 1905.
- Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** (2 Expl.:) Bd. 5, 1 H. 2 Leipzig 1905.
- Evans, A. J.**, The palace of Knossos. (Repr. from the Annual of the British School at Athens No. 10 1903—04.)
- Fischer-Treuenfeld, R. v.**, Paraguay. Ein historischer Abriss. Braunschweig 1905. (Aus: Südamerikan. Rundschau 13. Jg. 1905.)
- Flora Batava** Aflg. 345—348 Leiden 1904.
- Fritsche, H.**, Die Jährliche und Tägliche Periode der Erdmagnetischen Elemente. Publication VI. Riga 1905.
- Gacitúa, C. M.**, La delincuencia Argentina ante algunas cifras y teorías. Córdoba 1905.
- Galilei, Galileo**, Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d' Italia. Vol. 15 Firenze 1904 16 1905.
- Glaser, E.**, Suwâ' und al-'Uzzâ und die altjemenischen Inschriften. München 1905.
- Hallier, H.**, Das proliferierende persönliche und das sachliche, konservative Prioritätsprinzip in der botanischen Nomenklatur. Hamburg 1900. (Aus: Jahrbuch der Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten 17 1899.)
- Neue Vorschläge zur botanischen Nomenklatur. Propositions nouvelles pour la nomenclature botanique. New propositions to botanical nomenclature. ebd. 1905. (Aus: Jahrbuch . . . 22 1904 3. Beiheft.)

- Hatzidakis, G. N.,** *Ἀπάντησις εἰς τὸν K. Krumbacher. Ἐν Ἀθήναις* 1905.
 — Die Sprachfrage in Griechenland. *Ἐν Ἀθήναις* 1905. (= *Βιβλιοθήκη Μαργασῆ* Ἀριθ. 305.)
- Helmert, F. R.,** Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. (Aus: Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wiss. 1905 2s.)
- Hildebrandsson, H. Hildebrand,** Rapport sur les observations internationales des nuages au Comité international météorologique 2 Upsala 1905.
- Hofmann, Th.,** Bauten des Herzogs Federigo di Montefeltro als Erstwerke der Hochrenaissance. Als Mskr. gedr. (1904).
 — Raffael in seiner Bedeutung als Architekt. Dresden 1900.
- Hollander, J. H.,** The financial history of Baltimore. Baltimore 1899.
- Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Bd. 33 Jg. 1902 : Bd. 34 Jg. 1903 1. 2. Berlin 1905.
- Janet, Ch.,** Anatomie du gaster de la myrmica rubra. Paris 1902.
 — Etudes sur les fourmis les guêpes et les abeilles 1 1893. (Extr. d. Annales de la soc. entomolog. de France 1893.)
 — Etudes . . . Note 19 1898. (Extr. d. Mémoires de la société zoolog. de France a. 1898.)
 — Notice sur les travaux scientifiques de Ch. Janet. Lille 1902.
- Jornal de ciencias mathematicas e astronomicas** publ. pelo F. Gomes Teixeira vol. 15 : Coimbra 1905.
- Journal, The American, of philology** vol. 26 1 (101) Baltimore 1905.
- Jurisch, K. W.,** Über die Arbeit als Rechtsboden. (Aus: Annalen der Naturphilosophie 4. Bd.) [1905.]
 — Ueber Luftrecht. Berlin 1904. (Aus: Bericht d. 5. Intern. Kongresses f. angew. Chemie zu Berlin 1903 Sekt. XI Bd. 4.)
- Kerntler, F.,** Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes auf Grund allgemein anerkannter Thatsachen und auf dem Wege einfacher Anschauung. Budapest 1905.
- Kiseljak, M.,** Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Grössen mit drei Einheiten. Bonn 1905.
- Klein, C.,** Über Theodolithgoniometer. (Aus: Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wiss. 1905 2s.)
- Light, The greater.** Philadelphia Vol. 6 s—12 1904—05 7 1. 2. 1905.
- Marcuse, A.,** Handbuch der geographischen Ortsbestimmung. Braunschweig 1905.
- Martí, C.,** The weather-forces of the planetary atmospheres. Print. as mscr. Nidau 1905.

- Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), Gesammelte Abhandlungen zur Mittellateinischen Rythmik. Bd. 1. 2. Berlin 1905.
- Montellus, O.**, Das Rad als religiöses Sinnbild in vorchristlicher und christlicher Zeit. Uebers. v. A. Lorenzen. (Aus: Prometheus Jg. 16.) [1905.]
- Montessus de Ballore, R. de**, Sur les fractions continues algébriques. (Estr. d. Rendiconti del circolo matematico di Palermo t. 19 1905.)
- Nature** (Vol. 71—73) No. 1836—1886 London 1905.
- Nernst, W.**, u. **Schönflies, A.**, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. 4. verb. Aufl. München & Berlin 1904.
- Nijhoff, Martinus**, Périodiques, publications de sociétés savantes, longues séries et volumes séparés. Livr. 1. La Haye 1905.
- The principal works relative to the history of the Netherlands. 2. ed. The Hague 1905.
- Portugalia**. Materiaes para o estudo do povo portuguez. T. 2 fasc. 1. Porto 1905.
- Protestantenblatt** Jg. 38^{16—18}. Bremen & Berlin 1905.
- Review**, The Psychological, Monograph supplements vol. 6 s (no. 28) University of Iowa studies in psychology no. 4 Lancaster, Pa. & New York 1905.
- Revue historique** 30. ann. t. 87—89 Paris 1905.
- Ricerche sperimentali eseguite nel biennio 1903—1904 nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Bologna diretto dal Prof. Dott. Giacomo Ciamician** ann. 14 e 15. (1903—05.)
- Riecke, Eduard**, Lehrbuch der Physik. 3. verb. u. verm. Aufl. Bd. 1. 2. Leipzig 1905.
- Rosenbusch, H.**, Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. 4. Aufl. Bd. 1 s. Stuttgart 1905.
- Sacco, F.**, I molluschi de terreni terziarii dei Piemonte e della Liguria: Considerazioni generali; indice generale dell' opera Torino 1904.
- Samuelson, A.**, Luftwiderstand und Flugfrage. Hamburg 1904.
- Scholia** in Lucianum ed. H. Rabe. Lipsiae 1906.
- Schuchardt, Hugo**, an Adolf Mussafia. Graz 1905.
- Series**, Harvard Oriental, vol. 5. 6. Cambridge, Mass. 1904 9 1905.
- Spring, W.**, Sur la limite de visibilité de la fluorescence et sur la limite supérieure du poids absolu des atomes. (Extr. du Bulletin de l'Acad. r. de Belgique Cl. d. sciences 5 1905.)
- Sur l'origine des nuances vertes des eaux de la nature et sur l'incompatibilité des composés calciques, ferriques et humiques en leur milieu. (Extr. du Bulletin . . . 7 1905.)

- Stodolkiewicz, A. J.**, Éléments de calculs exponentiels et de calculs inverses. Varsovie 1905.
- Stoll, H.**, Alkohol und Kaffee in ihrer Wirkung auf Herzleiden und nervöse Störungen. 2. Aufl. Leipzig 1905.
- Suyematsu (Baron)**, Russland und Japan. Aus d. Engl. übers. v. F. Müller. London 1904.
- Tafner, V.**, A Ryncholophusok tapintó készülékéről (Doct. értekezésül Kolozsvár) Budapest 1904.
- Thesaurus linguae Latinae** vol. 1 fasc. 8. 9. Lipsiae 1905.
- Thomsen, J.**, Systematisk gennemførte termokemiske Undersøgelser, numeriske og teoretiske Resultater. København 1905.
- Vejdovsky, F.**, Zur Hämoecöltheorie. Leipzig 1905. (Aus: Zeitschrift f. wissenschaftl. Zoologie Bd. 82.)
- Ueber die Nephridien von Aeolosoma und Mesenchytraeus. Prag 1905. (Aus: Sitzungsberichte d. K. Böhm. Ges. d. Wiss. in Prag 1905.)
- Ueber einige Süßwasser-Amphipoden. III. ebd. 1905. (Aus: Sitzungsberichte . . . 1905.)
- Виноградовъ, И. В.**, Космографія (Математическая и физическая географія). С.-Петербургъ 1904.
- Теорія мирового разума над. 2. дополн. С.-Петербургъ 1903.
- Wieners, H.**, Sammlung mathematischer Modelle hrsg. v. d. Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner Leipzig 1905.
- Wilson, J. Cook**, On the traversing of geometrical figures. Oxford 1905.
-

Ferdinand, Freiherr von Richthofen.

Von

Hermann Wagner.

Ein Rückblick auf die beiden letzten Jahre erfüllt uns Geographen mit Trauer. Wie ein Sturmwind über das Blachfeld braust und selbst die stärksten Bäume entwurzelt, so hat der Tod unbarmherzig in die Reihen der Führer unter den Geographen eingegriffen und manchen dahingerafft, dessen kraftvolle äußere Erscheinung noch Jahre des Wirkens zu verbürgen schien.

Fast jeder Name, der zu nennen wäre, bedeutet eine Autorität hohen Ranges auf dem jeweiligen Spezialgebiet. Sophus Ruge in Dresden, der gediegene Kenner der Geschichte der Erdkunde, eröffnete den traurigen Reigen. Wenige Tage vor seinem 60. Geburtstag, den seine Schüler glänzend zu feiern gedachten, traf Friedrich Ratzel, kaum dem Staube der Großstadt entflohen, ein Herzschlag und entriß uns den ideenreichsten und fruchtbarsten geographischen Schriftsteller unserer Zeit. Kurze Wochen darauf starb sein stillerer Kollege an der nämlichen Leipziger Hochschule, einer der besten Kenner antiker Geographie, Hugo Berger, dessen „Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde bei den Griechen“ von Partsch mit Recht als ein unsterbliches Vermächtnis gepriesen wird. Und noch war kein Jahr seit Ruges Tod verstrichen, so sank auch der vierte der namhaften Geographen Sachsens, der weitgereiste Vulkanologe Alphons Stübel ins Grab. In Eduard Richter in Graz, dem ausgezeichneten Kenner der Alpen, verlor bald darauf Oesterreich seinen bedeutendsten heimischen Geographen, gleichwie Frankreich den nämlichen Verlust in Elisée Reclus zu beklagen hatte, jenem formgewandten genialen Forscher, dessen „Nouvelle géographie universelle“ in 19 mächtigen Bänden zu den wenigen vollendeten geographischen

Enzyklopaedien modernen Gepräges gehört. Sie umfaßt die gesamte Erdoberfläche, während Karl Ritter in seiner Allgemeinen Vergleichenden Erdkunde mit der gleichen Zahl von Bänden, an der er 40 Jahre arbeitete, noch nicht mit Asien zum Abschluß kam.

Und nicht genug — gleich jäh, wie ein Jahr zuvor Friedrich Ratzel, — schied am 6. Oktober 1905 Ferdinand von Richthofen von uns. Seinem Andenken sind meine heutigen Worte gewidmet. Denn er gehörte, — von dem kongenialen Karl von Seebach früh in seinem Wert erkannt und zum Mitglied vorgeschlagen, — schon seit 1875 zu den unsrigen.

Ein Trost ist es, daß die Mehrzahl der Genannten — und mit Absicht beschränke ich mich auf den Kreis der Gelehrten unter den Geographen — die Schwelle des Greisenalters überschritten hatte, als sie abgerufen wurden: — am heutigen Tage würde Richthofen sein 73. Lebensjahr vollendet haben. Keiner ist unter ihnen, der nicht auf ein Leben voll rastloser Arbeit, aber auch bleibender Erfolge zurückblickte. Doch drei Namen haben an dem unvergleichlichen Aufschwung der Geographie während der letzten Dezzennien einen besonders hervorragenden Anteil. Diesen Ruhm teilt Richthofen mit Reclus und Ratzel. Es erscheint müßig in unserm Kreise die Frage aufzuwerfen, wem unter ihnen die Palme gereicht werden müsse. Die eigenen Schülerkreise haben ihre Entscheidung bereits mit lauter Stimme getroffen und heben je ihren Meister auf den Schild.

Nun wird auch der bedeutendste Gelehrte und Forscher zum anerkannten Führer nicht ohne ein Heraustreten mit seiner Person, nicht ohne die Initiative, mit der er Fachgenossen und weitere Kreise in Bewegung setzt, Unternehmungen zur Förderung wissenschaftlicher Ziele ins Leben ruft, kurz sich als kraftvoller Organisator bewährt. — Von diesem Standpunkt, nicht weniger aber wenn man strengwissenschaftliche Leistungen in den Vordergrund stellt, wird es kaum einem Widerspruche begegnen, wenn ich sage, daß wir in Richthofen das anerkannte Haupt deutscher Geographen verloren.

Ferdinand, Freiherr von Richthofen, aus einer bekannten schlesischen Adelsfamilie stammend, die besonders in der Neuzeit dem Staat und Heerwesen hervorragende Männer stellte, hat eine strenge wissenschaftliche Schule als Geolog durchgemacht, bevor er in den 60er Jahren auf lange dem Gesichtskreis deutscher Forscher fast entschwand. Ein Schüler Beyrichs wandte er

sich bald jener Stätte regster Forschertätigkeit auf geologischem Gebiete zu, die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts in Wien aufblühte. Er griff sogleich, obgleich noch jung an Jahren, mit großem Erfolg in diese Arbeiten der Geologischen Reichsanstalt ein. Schon seine ersten Untersuchungen in den Alpen und Karpaten lassen den Mann von weiten Gesichtspunkten und kühner Kombinationsgabe erkennen, als der er sich später auf größerm Arbeitsfeld erwies. Die Erklärung mancher der Südtiroler Dolomiten als echter Korallenriffe, schon 1860 ausgesprochen, hat durch die spätern Arbeiten der Oesterreicher ihre volle Bestätigung gefunden. In den Studien über die ungarisch-siebenbürgischen Trachytgebirge wurden von ihm die Grundzüge einer Klassifikation vulkanischer Gesteine nach ihrer zeitlichen Bildungsfolge gelegt, die er acht Jahre später bei der Untersuchung der eruptiven Massen in den pazifischen Staaten Nordamerikas noch fester zu begründen vermochte, und die sich heute allgemeiner Anerkennung erfreuen.

Der Drang sich solchem größern Arbeitsfeld zuzuwenden, ließ ihn eine günstige Gelegenheit ins Ausland zu gehen ergreifen: es gelang ihm vermöge seiner Beziehungen sich der preußischen Gesandtschaft nach China und Japan unter Führung des Grafen Friedrich von Eulenburg anzuschließen. Mit diesem betrat er 1860 den Boden des Landes, mit dessen Namen der seine in Zukunft für immer verbunden werden sollte, damals noch ohne zu ahnen, daß gerade China ihn später für Jahre fesseln würde.

Das langverschlossene Land öffnete in jener Zeit noch widerwillig den Fremden die Tore; nur wenige Küstenpunkte und die Hauptstadt waren diesen zugänglich. Die Verhandlungen in Peking zogen sich in die Länge. Eines der Kriegsschiffe führte währenddem einen Teil des Personals nach Formosa, den Philippinen, Celebes und Java. Richthofen nahm an diesen Fahrten Teil, trennte sich schließlich, als die Gesandtschaft heimkehrte, von ihr und durchstreifte Hinterindien, doch ohne zu der eigentlichen Forschertätigkeit, die ihm vorschwebte, zu gelangen. Dann ging er nach Kalifornien hinüber, verweilte auf dem Boden der Nachbargebiete nicht weniger als fünf Jahre, ohne viele Lebenszeichen von sich zu geben, lange aber Seite an Seite mit den amerikanischen Geologen arbeitend, die damals als echte wissenschaftliche Pioniere die Erforschung der neu gewonnenen Gebirgsländer des Westens begannen.

In Asien hatte sich mittlerweile ein Umschwung vollzogen. Die große Taiping-Rebellion im Innern des chinesischen Reiches

war niedergeworfen, es war Aussicht vorhanden in das merkwürdige Land, das, soviel man auch über Sitten und Gebräuche der Bewohner schon kannte, was Bodenbau und Landesnatur betrifft, noch immer eine völlige Terra incognita war, einzudringen. Richthofen erzählt uns, wie er in der Neujahrsnacht 1867 auf 68 mit dem Geologen Whitney den Plan überlegte, die geologische Durchforschung Chinas als große, Jahre umfassende Aufgabe in Angriff zu nehmen. Ihr hat er dann in der Tat die nächsten vier Jahre gewidmet, um erst 1872 nach zwölfjährigem ununterbrochenen Aufenthalt im Ausland in die Heimat zurückzukehren.

Es ist erstaunlich, mit welcher Energie und Umsicht er das Ziel, möglichst viel von dem weiten Reiche zu sehen — die sog. 18 chinesischen Provinzen umfassen einen Flächenraum fast von der Hälfte Europas — verfolgte. Auf sieben Einzelreisen, die ihn meist nach Schanghai für kürzern Aufenthalt zurückführten, hat er — fast ganz auf eigene Kosten, nur von einem Dolmetsch und einem chinesischen Diener begleitet — das Land durchzogen; am meisten die nordöstlichen Provinzen, vor allem das Halbinselland Schantung mit seiner schon damals von Richthofen als wichtige Eingangspforte erkannten Bucht von Kiautschou, dann lange Linien durchs Innere ziehend, von Kanton bis in die Mandschurei, von Peking wiederum südwestwärts bis in die fruchtbare Kernprovinz Sze-tschuan, um schließlich auf dem Jang-tse-kiang abwärts fahrend die Küste in Schanghai wieder zu erreichen.

Nur wenig ist während dieser interessanten Streifzüge nach Europa gemeldet. Seine gehaltvollen Briefe an die Handelskammer in Schanghai, die seine letzten Reisen unterstützte, ließen freilich dem Kenner bereits erraten, was man dereinst von ihm zu erwarten habe. Doch hat Richthofen niemals ein zusammenhängendes Reisewerk über seine Wanderjahre veröffentlicht.

In der Heimat erwarteten ihn größere Aufgaben. Die Schlachten auf den französischen Feldern waren inzwischen geschlagen, das Deutsche Reich war gegründet; Berlin begann in die Aufgabe dessen Schwerpunkt zu werden hineinzuwachsen. Wie in so vielen Zweigen des Verkehrs und Erwerbs, der geistigen Bewegung in Politik, Wissenschaft und Kunst, so prägt sich der Umschwung, den die politische Wandlung jener Tage zur Folge hatte, auch auf geographischem Gebiet in prägnanter Weise aus. Kein Zweifel, daß in den funfziger und sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts das kleine Gotha der anerkannte Mittelpunkt geographischer Bestrebungen in Deutschland war, getragen von einer Persönlich-

keit voll eigenartigster Agitationskraft, August Petermann. Diese Glanzzeit Gothas sank mit dem politischen Umschwung unserer Geschichte, dem Emporkommen Berlins und der Erweckung der dortigen Gesellschaft für Erdkunde aus langem Schlaf durch Männer wie Bastian und Richthofen. Denn kaum war dieser mit den Erfahrungen des Forschers und Weltmanns heimgekehrt, so übernahm er mit dem Vorsitz deren Reorganisation und hat sie, mit kurzen Unterbrechungen immer wieder an ihre Spitze berufen, zu Ansehen und Einfluß emporgehoben.

Aber nicht diese Seite seiner vielumfassenden Wirksamkeit oder andere größere Unternehmungen, die er mit organisatorischer Meisterschaft und seltener Ausdauer in der Folge zur Durchführung gebracht hat, sind es, die uns Anlaß bieten sein Gedächtnis in unserm Kreise wachzurufen. Wir danken Richthofen weit mehr, daß er nach zwölfjährigem bewegten Leben und anstrengender Forschertätigkeit mit all ihren aufreibenden Folgen die Energie besaß, sogleich an die Gestaltung seiner reichen Beobachtungsergebnisse heranzutreten, und daß er es in einer derartig monumentalen Form getan, welche sein Werk über China zu einem der klassischen der geographischen Literatur stempelt.

Der erste Band, 1877 erscheinend, enthält bekanntlich im Grunde nur Einleitungen; kaum wird darin schon der Boden des eigentlichen China betreten. Erst der zweite Band, Nordchina umfassend und von einem höchst wertvollen Atlas begleitet, sucht, an die unmittelbaren Beobachtungen anknüpfend und fünf Jahre später ausgegeben, das Muster einer modernen geographischen Landesbeschreibung zu geben. Die Fülle aufreibender Berufs- und Repräsentationspflichten, die in spätern Jahren auf den Schultern des berühmt gewordenen Mannes lasteten, haben ihn nicht mehr zur Vollendung dieses seines Lebenswerkes kommen lassen. Es ist ein Torso geblieben, erweist sich dennoch in jenen ersten mächtigen Quartbänden als das Erzeugnis eines gewaltigen, einen Riesenstoff bemeisternden Geistes. Kaum daß ihm, m. E., was abgerundete Form und Gedankenfülle angeht, Alexander von Humboldt, — mit dem man Richthofen oft — aber nicht durchweg glücklich — verglichen hat, — etwas Gleiches an die Seite stellen kann.

Jahre tiefen wissenschaftlichen Studiums gingen dem Erscheinen jenes ersten Bandes voraus. Durch nichts giebt sich der Ernst in der Erfassung wissenschaftlicher Aufgaben, der jede einzelne Arbeit Richthofens wie ein ganzes Wesen durchdrang, besser kund, als durch das unentwegte Streben, in die geschicht-

liche Entwicklung der Erkenntnisse über das von ihm neu erschlossene Gebiet einzudringen. Entbehrt er bei dem Mangel der Kenntnis der chinesischen Sprache auch der Möglichkeit, manchen dunklen Punkt an der Hand der heimischen Quellen selbst zu prüfen, so versenkt er sich doch in die ihm zugängliche Literatur aller Zeiten und Kulturvölker mit einer Gründlichkeit und Ausdauer, die an die sprichwörtlich gewordene Karl Ritters heranreicht, nur daß er diesen Altmeister geographischer Quellenforschung an Gestaltungs- und Darstellungskraft übertrifft.

Viel tiefer, als durch solche historische Untersuchungen hat freilich der einstige Geologe, der im Laufe der Wanderjahre und beim Studium der wechselseitigen Wirkungen aller ihm entgegentretenden Erscheinungsformen der unbelebten, wie der belebten Natur zum gewiegten Geographen geworden war, durch die großartigen Auffassungen unsere Wissenschaft gefördert, durch die er Ostasien mit dem von ihm neu aufgebauten Begriffe von Zentralasien zu verbinden gewußt hat.

Keine geringern hatte er in diesem Streben einer begrifflichen Nachbildung der Oberflächengestaltung der mächtigsten Kontinentalmasse der Erde zu Vorgängern, als Ritter und Humboldt. Hatte der erstere Hochasien mehr in den Gesichtskreis gerückt und damit endgültig der aus der historischen Entwicklung unserer Kenntnisse von Asien hervorgegangenen Ueberschätzung Vorderasiens ein Ende gemacht, so beruht Humboldts Verdienst in dem Versuch, Ordnung und System in die — allerdings kaum noch von modernen Reisenden betretenen — Gebirgszüge zu bringen. Ich darf freilich, ohne weit auszuholen, nicht bei den heute überwundenen Ansichten jener Koryphaeen verweilen, wohl aber meiner Ansicht Ausdruck verleihen, daß der Fortschritt, welchen wir in unsern Auffassungen über den Aufbau Asiens dem Geiste Richthofens verdanken, kaum schärfer bezeichnet wird, als durch seine Gegenüberstellung zentraler Trockengebiete und der peripherischen Umgebungslandschaften, die ihre Umgestaltung zur Kulturfähigkeit der oberflächlichen Entwässerung durch die dem Meere zu eilenden Flußsysteme empfangen.

Diese grundlegenden Gedanken haben den großen Forscher bis ins Alter beschäftigt. Ihrer weitem Durchführung sind die fünf hochinteressanten Abhandlungen gewidmet, mit denen Richthofen in den letzten Jahren seines Lebens nach Aufnahme in die Berliner Akademie dieser den Zoll entrichtete. Es sind diese „geomorphologischen Studien über Ostasien“ Versuche den Aufbau jener Ländermassen in großen Leitlinien staffelförmig zur Tiefe

sinkender Erdschollen zu ergründen und uns damit einzelne große Züge im Antlitz der Erde zu deuten.

Es ist bekannt, daß Eduard Sueß die gleichen Probleme seit Jahren für die ganze Erdoberfläche verfolgt und diesem seinem bahnbrechenden Werke, dessen Schlußstein zu legen er eben in Begriff steht, den Namen des „Antlitzes der Erde“ verliehen hat. Verwandten und ebenbürtigen Geistes hat Richthofen an der Lösung dieser Fragen den hervorragendsten Anteil und bewußtvoll hat er auch systematisch in dieselbe eingegriffen, durch ein Werk mit bescheidenem Titel, aber voll reichster Ideen, dem „Führer für Forschungsreisende“ (1886). Es ist hervorgegangen aus einer kurzen Anleitung zu geologischen Beobachtungen auf Reisen, die er für Neumayers Handbuch allgemeiner Anweisungen zu Beobachtungen auf Reisen schrieb. In jenem Werke werden aber zugleich die Grundlinien zu einer neuen allgemeinen „Morphologie der Erdoberfläche“ gelegt, und zwar vor allem durch die feinsinnigen Klassifikationen der Oberflächenformen der festen Erdrinde; durch eben dieses Werk ward ein Impuls gegeben, der unsere Wissenschaft in neue Bahnen gelenkt und von dem fast sklavischen Anschluß an die Geologie befreit hat, welchem sie in der ersten nachritterschen Epoche zu verfallen schien. So intensiv hatte zuvor Niemand die oberflächliche Umgestaltung der aus tektonischen Vorgängen entstandenen Böden und Großformen im Bereich der Landfläche auf ihre Ursache hin erforscht.

Zwei Vorgänge gewaltigster Wirkung im Laufe der Aeonen sind es besonders, die Richthofen beschäftigt haben, um zu ihrer Erklärung bestechende Theorien zu ersinnen. Die allmähliche Vernichtung ganzer Gebirgszüge und ihre Umgestaltung in mehr oder weniger ebene Rumpfflächen durch die abnagende Wirkung der Meeresbrandung und andererseits die Zuschüttung weiter Hohlformen in Trockengebieten durch die saigernde Kraft des Windes. Allerdings hat weder die sogenannte Abrasionstheorie noch die der Lößbildung auf aeolischem Wege, die Richthofen den in gelben Lehmstaub gehüllten Landschaften Nordwestchinas abgelauscht hatte, sich allseitige Zustimmung zu verschaffen vermocht. Mehr und mehr macht man für die Bildung der Fastebenen oder Rumpfflächen aus einst emporgefalteten Krustentücken der Erdrinde die abtragende Wirkung der Atmosphaerilien und des fließenden Wassers verantwortlich und hält die Lößbildung auch in feuchtem Klima für möglich. Wie dem auch sei, durch diese Gegengründe verliert die Genialität der Richthofenschen Erklärungsversuche kaum etwas von ihrer Großartigkeit.

Es ist wohl kaum anzunehmen, daß Richthofen zur Abfassung seines so viele abgerundete Vorschläge für Klassifikation der Oberflächenformen enthaltenden Führers für Forschungsreisende gelangt wäre ohne die Anregungen, die ihm selbst die Lehrtätigkeit dafür bot.

Als man 1875 in Preußen mit Ernst damit vorging, an allen Universitäten eigene Lehrstühle für Geographie zu errichten, bot man auch Richthofen einen solchen an. Die prinzipielle Annahme durch ihn bekundete bereits den vollen Uebergang zur Erdkunde, den der einstige Geolog innerlich wohl schon seit länger vollzogen hatte. Aber während wir andern geographischen Autodidakten — ein solcher war Richthofen ja gleichfalls insofern, als er während seiner Studienjahre niemals zu Karl Ritter in nähere Beziehungen getreten ist, — damals sofort in das neu übernommene Lehramt einspringen mußten, hat eine beneidenswerte Gunst des Schicksals ihm noch volle vier Jahre freier Gelehrtentätigkeit ohne alle amtlichen Verpflichtungen vergönnt. Erst 1879 eröffnete er in Bonn seine Vorlesungen, folgte 1883 einem Rufe auf den seit acht Jahren verwaisten Lehrstuhl Oscar Peschels in Leipzig und siedelte nach sechs weitem Semestern wieder nach Berlin über. Hier ward dem inzwischen ausgereiften Universitätslehrer eine Stätte bereitet, wie sie ihm gerade in ihrer Beschränkung zusagte. Neben Heinrich Kiepert, der die historische Geographie vertrat, übernahm Richthofen eine Professur der physikalischen Erdkunde und schuf alsbald ein für seine Lehrzwecke reich ausgestattetes Institut um sich. Hier ist es ihm dann immerhin vergönnt gewesen, noch fast zwanzig Jahre als Lehrer zu wirken.

Es entzieht sich den engern Fachgenossen meist, den Erfolg einer solchen Tätigkeit näher zu beurteilen. Wie es scheint, wirkte Richthofen durch seine überaus sorgfältig durchgearbeiteten Vorlesungen — einige bereitet man zur Zeit für die Herausgabe vor — doch mehr auf den kleinen Kreis schon tiefer in die Materie eingedrungenen Schüler. Seine Uebungen, geographisches Kolloquium benannt, hat er zu einer Höhe und Blüte zu bringen gewußt, wie selten ein akademischer Lehrer die ähnlichen Einrichtungen. Er genoss vor uns andern in Berlin, wohl auch schon in Leipzig, den großen Vorzug, daß sich ältere und gereifere Schüler weit über die übliche Studienzeit hinaus um ihn scharten und vor allem solche, die Neigung und Aussicht hatten sich dereinst selbst an der wissenschaftlichen Erforschung der Erdoberfläche zu beteiligen. Auch darin lag ja der Wandel der Zeiten, daß in jener Periode Petermannscher Suprematie der Entdeckungsreisende, gleichviel

mit welcher Vorbildung er hinauszog, die Hauptrolle spielte, während seitdem die wissenschaftliche Durchforschung des Landes das letzte der Entdeckungszeitalter abgelöst hat und daher ganz andere Anforderungen an den Forschungsreisenden stellt. Wo wäre nun eine bessere Pflanzschule für junge aufstrebende Kräfte zu finden gewesen, als unter den Augen des bedeutendsten und erfolgreichsten Forschungsreisenden um die Jahrhundertwende? Aus ihr ist denn auch eine so große Zahl tüchtiger Geographen, die ihre Sporen auf fremder Erde verdient haben, hervorgegangen, daß sich nicht zum mindesten die Bedeutung Richthofens für unsere Disziplin in diesem hervorragenden Nachwuchs verkörpert. Er rekrutierte sich aus Söhnen fast aller Kulturnationen.

Es war die Macht der Persönlichkeit, die in ihrer Unmittelbarkeit wie ein Zauber auf diesen Schülerkreis gewirkt hat, aber nicht auf diesen allein, sondern ebenso auf die Fachgenossen und die großen Kreise, die mit ihm in Berührung kamen. Dem Neuling und Fremden ist er durch eine gewisse Zurückhaltung des Wesens, die wohl auch mißdeutet worden ist, bei der ersten Begegnung schwer nahbar erschienen; wer ihn näher kennen lernte, — und gerade im Kreise seiner alten Schüler, die er an der Seite seiner verständnisvollen Gattin so gern in sein gastliches Haus aufnahm, trat er aus sich heraus —, der hat sich niemals des Eindrucks erwehren können, es mit einem Manne vornehmster Gesinnung und ernstester Lebensauffassung zu tun zu haben. Von Gelehrten eitelleit völlig frei, war er sich seines Wertes wohl bewußt. Der Flachheit und dem wissenschaftlichen Dilettantismus gleich abhold, beteiligte er sich doch selten anders an ihrer Bekämpfung, als daß er sich von ihren Trägern abwandte. Wo er klar erfaßte Ziele, begründetes Urteil, echt wissenschaftliche und gewissenhafte Arbeit, selbstlose Aufopferung sah, da hielt er mit offener Anerkennung niemals zurück, und unermüdlich war er bereit, wenn es galt, aufstrebenden Kräften die Wege zu ebnen. Hierbei war Richthofen weit entfernt von einseitiger Wertschätzung der von ihm vertretenen Richtung. Seine programmatischen Reden, die er bei feierlichen Anlässen hielt, zeugen von immer tieferm Verständnis für die Gesamtaufgaben der Erdkunde. Wollte er sie anfangs auf die Erkenntnis der vielseitigen Formen der Erdoberfläche beschränkt wissen, so dehnte er sie nachmals mehr und mehr auf die Wechselwirkungen zwischen belebter und unbelebter Natur an ihr aus. Voraussichtlich wird die beabsichtigte Herausgabe seiner Vorlesung über allgemeine Siedelungs- und Verkehrs-

kunde uns noch den Beweis geben, wie tief er auch in anthropogeographische Probleme im Laufe der Zeit eingedrungen ist. Im übrigen lag seine Größe nicht zum geringsten in der klaren Erkenntnis der Grenzen seines eigenen Könnens und Wissens, wie sie z. B. den mathematischen Grundlagen unserer Disziplin gegenüber in seinem Studiengang naturgemäß begründet waren.

Kaum je hat er einen sich ihm nahenden Jünger zum Studium der Erdkunde unmittelbar ermutigt. An die Vorbildung stellte er hohe Anforderungen. Wandte sich ein solcher einer wissenschaftlichen Aufgabe zu, so förderte er ihn nur, wenn er fand, daß dieser in den grundlegenden Nebendisziplinen wahrhaft zu Hause war. So sind die Erstlingsarbeiten, die aus seiner Schule hervorgingen, zwar nicht groß an Zahl, aber um so gediegener an Gehalt.

Nicht seine soziale Stellung allein, oder der Takt des Diplomaten, den er so oft glänzend bewährt hat, sondern mehr die Ueberzeugung von seiner Uneigennützigkeit und Gradheit der Gesinnung hat ihm den weitreichenden Einfluß verschafft, um den man ihn oft beneidete. Er genoß in steigendem Maße bei unserm Kaiser wie in den maßgebenden Regierungskreisen Ansehen und Vertrauen; nicht minder unter seinen Kollegen und Fachgenossen. Ihm verdankt man es nicht zuletzt, wenn so manche unserer neuen großen nationalen Unternehmungen im Wettbewerb der Nationen trotz entgegenstehender Schwierigkeiten wirklich zu Stande gekommen sind, wie vor allem unsere deutsche Südpolarexpedition. Fast schon ein Siebziger scheute er nicht vor der Unruhe und den Arbeiten zurück, welche mit der Neubegründung einer bei uns früher unbekannten wissenschaftlichen Arbeitsstätte verbunden sind. Er schuf das Institut für Meereskunde in Berlin aus dem Nichts und wußte es in Verbindung mit seinem geographischen zu bringen.

Dieses wachsende Ansehen und die allseitige Verehrung, die er sich im Laufe der Jahre in den weitesten Kreisen erworben, kamen zu einem erhebenden Ausdruck bei Gelegenheit seines siebenzigsten Geburtstages 1903. Man feierte diesen wie ein großes gemeinsames Fest der Blüte geographischer Studien auf deutschem Boden. Ähnlich war schon 1899 der Internationale Geographen-kongreß zu Berlin unter Richthofens sicherer und vornehmer Leitung in einer einstimmigen Anerkennung seiner Führerschaft ausgeklungen.

„Mit der größten Bewunderung und Dankbarkeit“ so schließt der berühmteste seiner Schüler, der Schwede Sven Hedin, einen warm empfundenen Nachruf, „bewahre ich sein Andenken. Er hat mir die Augen geöffnet für die Herrlichkeiten der wunderbaren Welt Asiens. Seine mächtige Persönlichkeit hat meiner Lebensbahn ihr Gepräge aufgedrückt. Und wenn es mir gelungen ist, einige neue Eroberungen heimzutragen, so ist das zum großen Teil Richthofens Verdienst. Ich habe ihn nicht nur als das Ideal eines Forschungsreisenden und Geographen bewundert, sondern auch und in noch höherm Grade als einen idealen Menschen, und meine Gefühle können nicht kühler werden, weil er nun dahingegangen ist. Er ist und bleibt das Muster eines edlen großgesinnten einheitlichen Charakters, voll Treue für seine Ziele und Uermüdlichkeit bei der Arbeit, voll Güte und Wohlwollen gegen andere und voll glühender jugendlicher Begeisterung“.

Bei den langjährigen freundschaftlichen Beziehungen zu meinem hervorragenden Fachgenossen, die nie eine Trübung erlitten und die ich zu den glücklichsten Fügungen meines eigenen Lebens rechne, finde ich in diesen Worten Sven Hedins nicht eines, dem ich nicht aus innerster Ueberzeugung zustimmen möchte.

Rede auf H. Usener

von

E. Schwartz

Gehalten in der öffentlichen Sitzung am 5. Mai 1906

Am 21. October 1905 ist Hermann Usener von uns gegangen. Schon vor einigen Jahren hatte er die Direction des philologischen Seminars aufgegeben und las nicht mehr regelmäßig: der Rest seines Lebens, so dachte er, sollte ganz den religionsgeschichtlichen Arbeiten gehören, die ihm zum Mittelpunkt seines Schaffens und seiner Pläne geworden waren. Er mußte um so mehr darauf aus sein die Frist zu nutzen, als der Verlust des einen Auges, die dringende Notwendigkeit das andere zu schonen ihm die Arbeitszeit in kleinen Rationen zuwies, nachdem er Jahrzehnte lang, wie ein unumschränkter König, ohne die Stunden zu zählen mit Tag und Nacht geschaltet und gewaltet hatte. Am 23. October 1904 feierte er seinen 70. Geburtstag, begeisterte Freunde und Schüler von Neuem begeisternd; eine gefährliche Krankheit, die ihn bald darauf befiel, überstand er zur Ueberraschung aller schnell und wie es schien, völlig; ja als fienge das Leben noch einmal für ihn an, warf er sich, kaum genesen, mit doppeltem Eifer in die Arbeit, plante zu allem anderen eine Geschichte der Philologie zu schreiben: da klopfte der Tod zum zweiten Mal an seine Tür und kehrte diesmal nicht wieder um; nach kurzer Krankheit nahm er ihn rasch und schmerzlos hinweg.

Wenn ich es wage Zeugniß abzulegen von dem was Usener seinen Schülern, zu denen ich mich zählen muß und will, und unserer Wissenschaft gewesen ist, so bin ich mir der Gefahr manchen zu enttäuschen wohl bewußt. Denn von der Seite des Usenerschen Wesens und Wirkens kann ich nicht eingehend sprechen, die jetzt am wuchtigsten, alles überragend, sich denen zur Betrachtung darbietet, die sein Gedächtniß bewahren und erneuern. Es wieder-

holt sich bei ihm das was immer eintritt, wenn es durch den Verlust eines Großen leer geworden ist um uns: die letzten Jahre, des Greises Art und Treiben beherrschen noch die allgemeine Empfindung, als setzte sich das Leben des Verstorbenen unmittelbar und ununterbrochen in den Herzen der Zurückgebliebenen fort. Useners Beschäftigung mit Mythologie reicht weit zurück, bis in den Anfang seiner Bonner Lehrthätigkeit, die er 1865 begann, aber es dauerte lange bis er nach seinem ersten Versuch, dem Aufsatz über Kallone, seine Ideen in breiterer Erörterung öffentlich vorlegte, und erst am Ende der 80er Jahre richtete sich sein Lehren und Schreiben mit einer immer weniger sich teilenden Energie auf das Ziel, der *μύθη* einer neuen mythologischen Wissenschaft zu werden. Es kann sein, daß eine nicht unbedenkliche Krankheit, die ihn 1883 zwang ein halbes Jahr zu feiern, zuerst ihn daran erinnert hat, daß es Zeit sei die Linien seiner Forschung, die er bis dahin nicht weit genug hatte ausdehnen können, zusammenzuziehen, den Abschluß seiner Gedankenreihen nicht mehr wieder und wieder hinauszuschieben und wenigstens das Problem scharf formuliert der Nachwelt zu hinterlassen, das ihm allmählich am meisten ans Herz gewachsen war, die Frage nach der Entstehung der mythologischen Formen und des mythologischen Denkens überhaupt. Als er in diese letzte Periode seines Lebens eintrat, war an Stelle des Geschlechts der 60er Jahre, das seiner Mythologie mit wenigen Ausnahmen kühl gegenüberstand, eine andere Generation, ein anderes Publicum herangewachsen, das alles was Religionsgeschichte hieß und heißen wollte, mit Eifer aufnahm und betrieb; es kam direct aus der Zeit heraus, daß der Philologe, der in jungen Jahren über das Fach der Mythologie, mit dem die Collegen nichts rechtes mehr anfangen konnten, seine originellste und tief Sinnigste Vorlesung in immer neuer Umschmelzung hielt, nunmehr zum *νομωπαιος* einer neuen, aus der Philologie hervor und herausgewachsenen Disciplin wurde, die nicht mehr Mythologie, sondern Religionswissenschaft hieß. Wo irgend Usener jetzt auftrat, wirkte er als berühmtes, Nachfolge heischendes Vorbild weit über die Kreise der engeren Zunft hinaus. War einst der alte Welcker wie ein vates des classischen Hellenentums in Bonn umhergewandelt, so erstand derselben Hochschule in dem greisen Usener wiederum ein Prophet, mit anderer Predigt und anderen Zielen, aber dem Vorgänger gleich an ehrfurchtgebietender, heiliger Würde, wie sie der Geist denen giebt, die sein Feuer jung und wärmend bewahren auch wenn sich der Schnee des Alters ihnen aufs Haupt gelegt hat.

Es war der hoheitsvolle Abschluß eines Lebens, in dem das Gemeine und Gewöhnliche nie eine Stätte gefunden hatte, und es kann nicht anders sein als daß die Erinnerung daran zunächst am stärksten nachzittert. Und doch hoffe ich sie nicht zu stören, sondern zu vertiefen, wenn ich statt des Greises das Bild des Mannes hervortreten lasse, dessen Züge mir und manchem anderen vertrauter sind, weil wir sie geschaut, als wir jung waren.

Gewiß, er hätte als Mann und Greis nicht eine so staunenswerte Arbeit an Volksglauben und Volkssitte gewandt, würde seinen Forschereifer nicht so wesentlich auf diejenige Sphäre der Religion gerichtet haben, in der das mythologisch-rituelle Element das individuell-ethische überwiegt, um nicht zu sagen erstickt, wenn er nicht aus seiner Jugend eine starke Empfänglichkeit, ein feines Ohr für die geheimnißvollen, in romantischem Zauber versteckten Töne der Volksseele mitgebracht hätte. Usener stammte nicht umsonst aus dem traulichen Winkel zwischen Rhein und Main, wo ein Völkchen haust, in dem Herbes und Liebliches, ungestüme Rauheit und spröde Keuschheit der Empfindung sich gar seltsam mischen, aus dem Welcker, Riehl, die Brüder Grimm hervorgegangen sind. Er rühmte sich seines Stammes, es erfüllte ihn mit provinzialem Stolze, wenn er beim Durchstöbern von Superintendenturberichten seiner nassauischen Heimat auf einen recht drastischen, unverfälschten Zug alten Aberglaubens stieß. Die Nachklänge der Heidelberger Romantik wirkten, wenn auch wohl nur mittelbar, auf den jungen Studenten stark ein; in seinen mythologischen Vorlesungen kam Creuzer sehr gut weg, während auf den bürgerlichen Rationalisten J. H. Voß ein Ungewitter nach dem anderen hinabfuhr. In das romantische Wesen fügte sich organisch ein starker philosophischer Zug ein, der ihn von früh auf dazu drängte sich über die letzten Gründe und Zwecke des eigenen Tuns und Treibens klar zu werden; er hat jene merkwürdige Conception erzeugt, die in der Rectoratsrede von 1882 über Philologie und Geschichtswissenschaft niedergelegt ist, daß alle philologische und historische Forschung nur die Vorstufe ist einer Wissenschaft vom Menschen, die die allgemeinen für die Menschheit selbst gültigen Gesetze erforscht und feststellt. Es war Usener mit dieser philosophischen Romantik bitter Ernst; seine metrischen Untersuchungen steckten sich gradezu das Ziel wenigstens den indogermanischen Urvers zu finden: in der Mythologie gieng er zwar vom Griechischen aus und kehrte immer wieder dahin zurück, aber seine Absicht war es keineswegs die Entwicklung der griechischen Religion von ihren ersten Rudimenten an bis zu der ein-

samen Höhe zu schildern, welche die Größten der Hellenen erreichten, sondern er wollte die Urformen des mythologischen Denkens überhaupt, sei es auch nur ahnend, erreichen.

Der Schwung dieser in aetherfreie Fernen sich hinaussehenden Gedanken muß jeden erfassen, dem unsere Wissenschaft mehr ist als ein Spiel des Verstandes; und doch wird vielleicht manchem die Luft zu dünn, läßt auch solche denen das empirische Vergnügen am historischen Forschen zur inneren Rechtfertigung nicht genügt, der Glaube nicht los, daß die unendlichen Werte an die bestimmten, concreten Erscheinungsformen des historischen Lebens und Geschehens gebunden sind und nur zu leicht verdampfen, wenn man sie daraus entläßt. Auch derartigen Naturen ist Usener ein Führer geworden und wird es bleiben, so lange es eine Philologie giebt. Im Leben, in der Arbeit war ihm die Philologie nicht, wie in der Theorie, das Werkzeug einer transcendenten Wissenschaft; es ist kein Zufall, daß seine erste mythologische Abhandlung aus einem technisch-philologischen Textproblem hervorgewachsen ist. So tief die Romantik in ihm saß, er war doch der geborene Philologe, der Philologe im bestimmtesten Sinne des Wortes, der sich wohl fühlt in den spinösen Fragen der technischen Grammatik, der nicht ruht und rastet bis er der Räthsel eines Textes Herr geworden ist, unerbittlich sich von allem Rechenschaft ablegend, worüber der Dilettant leicht hinweggleitet, der den Text nur zu etwas 'braucht'. Gerade weil Usener durch den ursprünglichen Ungestüm seines Wesens, durch die Weite der Ziele die er sich steckte, vor aller Pedanterie sicher war, konnte er die speciell philologische Art die in ihm war, so in alles mit hineinnehmen und auf alles übertragen, wie er es that. Die gestochen feine Schrift, die mit minutiöser Sorgfalt formulierten Citate, ein sorgfältiges Bewahren aller historischen Orthographie, ein Absuchen der Druckfehler, das es an Peinlichkeit mit Lagarde aufnehmen konnte, das waren alles vielleicht oberflächliche, aber untrügliche Symtome einer durch und durch grammatisch-philologischen Natur. Er bezauberte auch Fernerstehende durch die wuchtige, schweren Wissens immer volle Art, mit der er gewöhnliche Dinge und Lebensformen dadurch interessant machte, daß er sie auf ihre Ursprünge zurückführte, wobei ihm jedes dilettantische Raten und Schwatzen ein Grenel war: das *ἔηταιν*, das nun einmal zum *γραμματικός* gehört, steckte ihm im Blut. Seine Arbeitsmanier war immer philologisch, d. h. er gieng vom Text, von der unverständenen Stelle aus und zog dann die Kreise weiter und weiter, wies nöthig war und ihm in den Sinn kam: und von

dem Philologenfehler sich dabei zu verlieren und nicht fertig zu werden, war er keineswegs frei.

Diese angeborene philologische Begabung hat Usener bis tief ins Mannesalter hinein die Wege gewiesen. Frühzeitig verwaist, im Besitz eines Vermögens das äußere Sorgen von ihm fern hielt, konnte er seine Studien breit anlegen: was praktisch daraus wurde, kümmerte ihn nicht, und auf die, wie man jetzt sagt, zielbewußten Leute, die mit ihrer Arbeit Carriere machen wollen, hat er immer mit Verachtung hinabgesehen. Der arme, unglückliche Kayser in Heidelberg, den wenig Wissenschaft und viel Musik über ein verkümmertes Leben trösteten, war ihm mehr älterer Freund als Lehrer: Useners Pietät und Gerechtigkeitsinn hat ihm mit der Sammlung seiner Aufsätze und seiner Vita ein Denkmal gesetzt, das ihn noch mehr ehrt als Kayser selbst. Dagegen wirkte Leonhard Spengel in München sehr stark ein; Plato, Isokrates, Demosthenes, die antike Rhetorik sind die Gebiete in denen Usener geradezu Spengels Arbeiten fortgesetzt hat oder durch seine Schüler hat fortsetzen lassen. Spengel wies der platonischen Forschung zuerst einen Weg der, von den Schleiermacherschen und Hermannschen Constructionen unabhängig, in neue und unbebaute Gebiete hineinführte; er stellte den Schriftsteller Plato den man bis dahin isolirt hatte, mitten in das attische Leben des 4. Jahrhunderts hinein und faßte zuerst den großen Gegensatz zwischen Rhetorik und Philosophie, der vom 4. Jahrhundert ab die antike Bildung bald nach der einen, bald nach der anderen Seite drängt. Es muß wohl Spengels Einfluß zugeschrieben werden, wenn Usener in späteren Jahren einen so sicheren Blick für die nicht immer an der Oberfläche liegenden Bildungstendenzen der griechischen philosophischen Litteratur hatte. Wichtig war für den grammaticus der immer bis zu den Quellen vordringen mußte, daß er in München eine Bibliothek von Handschriften kennen lernte: der alte Florentiner Pietro Vettori, zu dessen Füßen einst, im 16. Jahrh., so viele junge Deutsche gesessen hatten um Griechisch zu lernen, wurde nun durch seine Abschriften und Collationen, die auf der Münchener Bibliothek lagen und schon von Spengel eifrig ausgenutzt waren, zum zweiten Mal ein Lehrer eines Jünglings aus dem Lande hinter den Alpen: wenn ich gelegentliche Aeußerungen Useners richtig verstanden habe, hat ihm die enge Verbindung von Handschriftenkunde und philologischer Kritik, die den großen Bibliothekar der Laurenziana so auszeichnet, einen um so größeren Eindruck gemacht, weil er den Mann unmittelbar aus seinem handschriftlichen Nachlaß kennen lernte. An das auf München folgende Göttinger

Semester, 1855/6, dachte er ungern zurück: der erschütternde Eindruck von C. F. Hermanns und Schneidewins plötzlichem Tod, der Abscheu vor Leutschs stroherner Citatenweisheit, ein Typhusanfall, den er der schlechten Göttinger Kost zuschrieb, und der ihm durchaus nicht zusagende *genius loci* kamen zusammen um ihm diesen Winter zu einer frostigen Erinnerung zu machen. Doch begeisterte ihn eine Vorlesung von E. Curtius über alte Länder und Völker so, daß er auf dem Krankenlager die von den Freunden nachgeschriebenen Hefte las. In Göttingen hat er auch seine Erstlingschrift verfaßt, die *Quaestiones Anaximeneae*, die die Löwenklau des künftigen Meisters deutlich zeigte: das Büchlein wurde vom philologischen Seminar zum Andenken an die so schnell dahingerafftten Lehrer Hermann und Schneidewin herausgegeben. Dann schloß er seine Studien in Bonn ab. Der Verkehr mit Brandis hat die Neigung zur alten Philosophie jedenfalls sehr verstärkt; vermutlich ist durch ihn Usener zu eingehender Beschäftigung mit den Erklärern des Aristoteles geführt, in denen er erstaunlich belesen war: zu einer Zeit wo diese Litteratur nur in den *editiones principes* des 16. Jahrhunderts vorlag, war das keine Kleinigkeit. Wann die Studien über griechische Nationalgrammatik begonnen wurden, kann ich nicht sagen; sie haben ihn nachher in der Greifswalder Zeit viel beschäftigt.

In Bonn trat Usener in den Bannkreis Ritschls: als reifer, mit Ideen und Plänen beladener Student empfand er die fascinierende Persönlichkeit des großen Zauberers der Methode mit einer Gewalt die bis zuletzt bei ihm vorgehalten hat. Was Usener durch sich selbst aus dieser Wirkung gemacht hat, wird immer ein einziges Zeugnis für den Adel und die Größe seiner Natur abgeben. Wie Ritschls verführerische Kunst des Katechisirens in Useners Händen zur sokratischen *Maeutik* sich umwandelte, die den Schüler keineswegs bloß von der Seite des Intellekts faßte, so setzte er an Stelle des übermüthigen Spruches daß mit der Methode sich alles herausbringen lasse, das stolze Axiom daß jede Geschichtswissenschaft nur insofern Wissenschaft sei, als sie Philologie sei, d. h. als sie basiert sei auf dem genauesten, nur durch Sprachkunst und Sprachempfinden zu erreichenden Verstehen des geschriebenen Worts. So konnte nur jemand lehren, dem die Methode nicht Selbstzweck war; und es konnte nur der der classischen Philologie das Privileg des einzigartigen Stoffes entreißen, der ihr die vornehme Pflicht zuwies nicht nur ihren jüngeren Schwestern, sondern der Geschichtswissenschaft überhaupt in

concreto zu zeigen mit welchen Mitteln und auf welche Weise geschichtliche Erkenntniß gewonnen wird.

Als Usener zum Mann heranreifte, waren Boeckh und Welcker Greise, die ihres Lebens Höhe und Arbeit hinter sich hatten. Das Hellenentum W. v. Humboldts fieng an der Vergangenheit anzugehören. Lachmann persönlich war nicht bei der lateinischen Poesie stehen geblieben und hatte in die Forschung über das griechische Epos mächtig eingegriffen, aber es ist nicht zu leugnen daß er, nicht zum Vorteil der Sache, von der Germanistik aus zu Homer gelangt war; einen ebenbürtigen Fortsetzer fand er auf diesem Gebiete zunächst nicht. Er war es auch, der die classische Philologie zuerst in das N. T. hineinführte: weil die Philologen ihm zu folgen keine Lust und keinen Mut hatten, rückte die elendeste Kärnerarbeit — um Useners Ausdruck zu gebrauchen — an die Stelle seiner Textkritik des N. T., die, bei allen durch schlechtes Material verschuldeten Irrtümern, die Wege gewiesen hatte. Lachmanns fundamentale Untersuchung über die Priorität des Marcusevangeliums steckten die Theologen als billigen Gewinn ein, ließen sich aber nicht abschrecken ihre Hirngespinnste dran zu hängen: die Philologie schwieg auch hier. Dagegen drängten Lachmanns und Haupts Arbeiten über lateinische Poesie die römische Litteratur in den Vordergrund des Interesses, und Ritschls Plautuskritik jagte die jungen Talente geradezu massenhaft in das Altlatein hinein. In der römischen Geschichte traten seit Niebuhr die wissenschaftlichen Probleme in scharfer Bestimmtheit heraus, da hier die Rechtsgeschichte und die Epigraphik zeigten, wo das geschichtliche Leben zu suchen war: Mommsens organisatorisches Genie warb unablässig für die riesigen Aufgaben, die dieser Imperator der Wissenschaft stellte. Unterdessen wars in der griechischen Geschichte still; das liebliche, aber weder wahre noch Wahrheit zeugende Lied vom perikleischen Zeitalter und dem Untergang der hellenischen Freiheit bei Chaeronea lullte das Streben ein, die Tragoedie der gesamthellenischen Geschichte in ihrer echten Größe zu erfassen. Usener, geboren und aufgewachsen in der behaglichen Idylle eines mitteldeutschen Kleinstaats, dem Volkstum zugewandt, für das der Staat und das bewußte politische Handeln nicht existirt, fühlte den Beruf nicht in sich, dem sinkenden Interesse für das Hellenentum neues Leben dadurch zuzuführen, daß er die politischen Gebilde der Griechen verstehen lehrte; am Baume seines Geistes wuchsen andere Früchte. Damit soll nicht gesagt sein, daß er die Forderung nicht sehr ernst nahm, die Litteratur mit der Geschichte zu verknüpfen, und auf zwei

Gebieten die an der Peripherie der antiken Geschichtswissenschaft liegen, war er ein Meister: in der Chronologie, auf die ihn seine mythologischen Studien geführt hatten, die ihm aber ein Forschungsgebiet selbständigen Rechtes und Zweckes geworden war, und in den letzten Zeiten des Imperium Romanum; im Theodosianus und dem Commentar des alten Godefroy kannte er sich aus wie ein Schulmeister alten Stils im Xenophon, und sein Anecdoton Holderi ist eine Perle echter historischer Forschung.

Dagegen hat er auf anderen Gebieten der hellenischen Philologie, die zu verwaisen drohte, mächtige Impulse gegeben: man kann ohne Uebertreibung sagen daß mit ihm eine neue wissenschaftliche Aera einsetzt. Die große griechische Poesie kannte er wie Einer und genoß sie mit der Andacht die seinem Wesen so eigen war; aber seine Arbeit hielt er von der Tragödie fern, rein kritische Einzelfragen ausgenommen, und Homer streifte er nur, wenn ihn die Mythologie in die epischen Gewässer verschlug. Es war als fühlte er sich auf dem Felde auf dem G. Hermann und Welcker ihre Bahnen gezogen hatten, als Nachfahre, und eben dies eigentümliche Verhältniß zu dem was bis dahin das Centrum der hellenischen Wissenschaft gewesen war, gab ihm die innere Freiheit um die classische Philologie mit weit ausholendem Griff aus dem Classischen, in dem sie drohte stockig zu werden, hinauszuschleudern in neue Sphären und zu neuen Eroberungen zu zwingen. Es ist schon darum unmöglich in Kürze die Wirkungen zu beschreiben, die von Usener ausgingen, weil er vom Anfang seines Lehrens an und sonderlich in den beiden ersten Jahrzehnten seiner Bonner Thätigkeit dem platonischen Axiom daß die echte Wissenschaft nicht durch die toten Bücher, sondern durch das lebendige Wort des werdenden Lehrers zum werdenden Schüler fortgepflanzt wird und fortschreitet, in einziger Weise nachlebte, frei von jedem Gedanken an persönlichen Ruhm und ganz gefangen von der ewigen Hoheit des Forschens und Erkennens, vor der das Glänzen des Sonderverdienstes verbleicht. Nur auf eins will ich hinweisen. Bis auf Usener war die griechische Philosophie eine Domäne der Philosophen; und was durch Schleiermachers geniale Intuitionen gewonnen war, gieng unter dem harten Joch Hegelscher Constructionen zum guten Teil wieder verloren. Die griechischen Philosophen die das Große geleistet hatten, den Besten nicht nur ihres Volkes, sondern der alten Welt überhaupt eine dem Tode geweihte Religion zu ersetzen, von denen alle Wissenschaft der Hellenen und der modernen Cultur ihren Anfang genommen hat, sie waren degradirt zu Systematikern der Metaphysik, zu Mario-

netten einer Bühne auf ders nichts zu sehen gab als ein speculatives Gespenst nach dem andern. Es ist Usener gewesen der die Philologen gelehrt hat bei den antiken Philosophen nicht mehr zu fragen ob ein Dogma philosophischen Wert habe oder nicht, sie als ganze Menschen ganz zu fassen, zu begreifen daß das antike *φιλοσοφείν* mehr ist als das Erfinden eines Complexes dogmatischer Formeln. Von der platonischen Speculation und von der poetischen Kunst des Dichterphilosophen sprach man auch vor ihm: aber daß die platonische Akademie das erste große Centrum der mathematischen Wissenschaft im weitesten Sinne gewesen ist, das hat Usener gefunden, und alle Akademien deren Mitglieder sich bewußt sind wozu Akademien da sind, sind dem Philologen zu Danke verpflichtet, der, selbst frei von dem Ehrgeiz ein Organisator zu heißen, mit divinatorischer Sicherheit aus den Ruinen der Ueberlieferung das erste, stolze Vorbild einer Organisation der wissenschaftlichen Arbeit reconstruirte. Wenn irgendwo, so ist bei den zertrümmerten, zerfetzten, schwer zu deutenden Resten der altionischen und hellenistischen Philosophie die strengste technische Philologie der unerläßliche Weg zum vollen Verstehen. Usener hat den Begriff der doxographischen Ueberlieferung geschaffen, der durch ein aus seiner Zucht hervorgewachsenes Meisterwerk jetzt jedem vertraut ist; er erkannte in den ciceronischen Schriften die Spuren eines Schulbetriebes der skeptischen Akademie, der die Tradition über die hellenistische Philosophie erst verständlich macht; was er einst allein, mit kühnem Muth, angefangen, die Aristotelesklärer herauszugeben, das ist jetzt durch seine von ihm zu selbständigem Schaffen erzogenen Schüler zu einer monumentalen Sammlung ausgebaut. Für keins der hellenistischen Systeme fließen die Quellen so reichlich, waren sie so vernachlässigt und so unbrauchbar wie für das Epikurs: in Useners reifstem philologischen Werk liegen jetzt die Reste von Epikurs Schriften und Briefen sauber gereinigt und geordnet vor, und er selbst hat schon mit kurzen Strichen den merkwürdigen Mann und seinen Jüngerkreis gezeichnet. Er war ausgezogen um einen schweren Text zu recensiren und brachte das Bild heim eines seltenen Menschen, der in dem bunten, lärmenden Getriebe der Diadochenzeit eine Gemeinde der Stillen im Lande stiftete und eine Religion predigte und übte, die ohne Vorsehungsglauben und ohne den Stolz der Tugend lehrte den Frieden des Herzens in sich zu finden und sittliche Werke schuf ohne sie anzuerkennen.

Es war die Mythologie die Usener trieb, die Beschäftigung mit den Urkunden des Christentums, die ihn in frühester Jugend

gereizt hatte, wieder aufzunehmen. Ihn interessirte zunächst der Proceß der Paganisirung, den die anerkannte Staatskirche durchmachte zum Entgelt für die Unterdrückung des Heidentums, und es ist bezeichnend daß sein berühmtestes und populärstes religionsgeschichtliches Buch sich grade das Fest zum Gegenstande nahm, das sich, am alten Christentum gemessen, wie ein Eindringling ausnimmt, es auch thatsächlich ist, das Weihnachtsfest. Trotz einzelner Versehen ist die kühn gespannte Construction tragfest geblieben, nicht zu reden von dem was nebenbei abfiel, wie die prachtvollen Charakteristiken der echten und der unechten Kirchensäulen des 4. Jahrhunderts. Der classische Philologe der sich in die Geschichte des Christentums vertieft, verfällt leicht der Gefahr über dem hellenischen Einschlag die echtjüdischen Fäden des Gewebes zu übersehen, weil er die originale Kraft national jüdischen Glaubens und Hoffens nicht aus, ich möchte sagen, sprachlicher Anschauung kennt. Wie weit auch Usener jener Versuchung erlegen ist, ob nicht eine richtig verstandene Pietät die Pflicht hat andere Wege zu öffnen neben und auch von denen weg, die er uns vermacht hat, auf diese Fragen brauche ich hier nicht zu antworten. Denn was er geschaffen und begonnen, ist darum so echt, weil das Lebendige in ihm nicht nur und nicht so sehr der positive wissenschaftliche Inhalt ist, wie das wissenschaftliche Wollen. Usener hat nicht durch ein Programm — das kann jeder machen —, sondern durch sein Beispiel und Vorbild die Philologen gemahnt in den Denkmälern des alten Christentums mehr zu sehn als unschönen Greuel, vor dem man die Augen schließt, oder eine Raritätenkiste, aus der man entlegene Curiositäten herauswählt, sondern sie zu bearbeiten um ihrer selbst willen; er hat denen die sich Theologen nennen, ins Gewissen geredet daß sie sich wenigstens bemühen Philologen zu werden; er hat Bresche gelegt in die gepappten und geleimten Scheidewände der classicistischen Beschränktheit, der theologischen Parteiungen, des schematischen Facultätsbetriebes, damit der Raum frei werde für die wissenschaftliche Arbeit aller die nichts wollen als die Urkunden des Werdens der christlichen Religion, der Gemeinde, der Kirche verstehen, einfach verstehen und dem Gott der Wahrheit und der Wahrhaftigkeit überlassen was draus wird.

Die Philologie hat der Nation in Usener nicht nur einen Gelehrten gegeben, der die kommenden Generationen reichlich und überreichlich mit Leben gebender Arbeit versorgt hat, sie hat ihr auch einen ihrer größten wissenschaftlichen Schriftsteller geschenkt. Ihm hat es nicht geschadet daß er Jahrzehnte hindurch lateinisch

schrieb; nachdem er einmal angefangen hatte die Wasser, die er so lange aufgestaut, ausströmen zu lassen, brausten und rauschten sie mit immer neuer Kraft dahin, ja es war als würde seine Rede mit dem Alter immer voller und würziger wie firner Wein. Man merkt es den bilderreichen, das Sprachgut immer neu prägenden Sätzen an daß er glücklicher daran war als wir armen Schächer im nordischen Lande, mit unserer vom Papier gelernten Rede, die dürr ist wie der Boden auf dem wir hausen, und kalt wie die Winde die darüber fahren: Usener hatte in der Jugend am echten Born der Sprache gesessen, wie einst Jacob Grimm, und man braucht ihm nur zu lauschen, dann hört man erquickt das Murmeln der Quellen, das Rauschen der Bäume, wie in den stillen, lieblichen Tälern seiner nassauischen Heimat.

Er war nicht was man einen akademischen Redner nennt, und wollte es nicht sein. Es war gar nicht selten für uns Studenten zu spüren daß er dicht vor dem akademischen Viertel von einer Arbeit die nichts mit dem Colleg zu thun hatte, mit Siebenmeilenschritten fortgestürmt war und sich nun auf dem Katheder über die Vorlesung erst orientierte. Wir verdachtens ihm nicht; denn es gab auch Stunden von einer Weihe wie wir sie nie zuvor gekannt. Er hob den Schüler als ganzen Menschen in die Höhe, wenn er ihn im Seminar disputirend zermalmte; so straff er die Forderungen spannte, er neigte sich mit aller Wärme seiner kindlich gebliebenen Seele dem zu, in dem er einen Funken entdeckte, der sich zur Flamme anfachen ließ. Nichts lag ihm ferner als Handlanger der eignen Arbeit heranzuziehen; er ließ sich jeden entwickeln und seine Straße ziehen, bis er die erste Regung der Selbständigkeit spürte. Dann wies er eine Aufgabe zu, weit und groß gefaßt, und freute sich herzlich, wenn der ins Wasser geworfene muthig sich durchkämpfte durch die Wellen, die über ihm zusammenschlugen. Der Schüler sollte auf eigenen Füßen stehen lernen; er griff nicht helfend ein, aber er duldete nicht daß Unklarheiten blieben und man Schwierigkeiten aus dem Wege gieng: und das Beispiel des Recken ohne Furcht, dem es wohl war, wenn die Folianten sich um ihn auftürmten wie eine Wagenburg, mahnte uns nicht zu verzagen. Wir liebten und fürchteten ihn. Wehe dem Naseweisen, der mit halbem Wissen prunken wollte: dann sprühten die dunklen Augen Blitze und einige mit Donnerstimme gestellte Querfragen brachten den Verwegenen rasch zu dem deutlichen Gefühl daß von allen Unwissenheiten die schlimmste die ist, die nicht wissen will daß sie nichts weiß. Auch wer schon des Doctors pileus und pallium erhalten hatte, gieng kaum ohne

Zittern die Treppe zu ihm hinauf; gar manches Mal entschädigte dann ein behagliches Plaudern, ein herzhaftes Lachen, es konnte auch kommen daß man so andächtig heimgieng wie nur je ein Kirchgänger, der nach der Sonntagspredigt dem Himmel einige Meilen näher zu sein glaubt. Das Größte an der großen Bonner Zeit war, daß sie nicht an einem, nicht an Usener allein hieng: es waren zwei, zwei Freunde. Ich würde mir vorlaut erscheinen, wollte ich von dieser Freundschaft Worte machen, wo der eine allein zurückgeblieben ist; aber wie wir alle in jungen Jahren uns nicht Usener ohne Buecheler und Buecheler nicht ohne Usener denken konnten, so kann ich nicht von dem Todten reden, ohne, sei es auch nur mit einem Wort, des Lebenden zu gedenken. Möchte er noch lange unter uns weilen, seine wohlverdiente Muße uns noch viel köstliche Früchte schenken: verhehlen können wir uns nicht, daß nachdem Usener gestorben, Buecheler sich vom Lehren zurückgezogen hat, eine große, schöne Epoche unserer Wissenschaft hinabsinkt; wir fühlen erschüttert daß unsrer besten Jugend bestes Teil nichts mehr ist als die Erinnerung an ein Vergangenes.

Bericht

über die öffentliche Sitzung am 17. November 1906.

Die K. Gesellschaft hielt am 17. November die statutengemäß stattfindende öffentliche Sitzung zur Erinnerung an ihren Stifter, König Georg II., ab.

Herr E. Schröder las über

‘Stadt’ und ‘Dorf’ in der deutschen Sprachgeschichte.

‘Stadt’ und ‘Dorf’ in der deutschen Sprache des Mittelalters.

Von

Edward Schröder.

Vorgetragen in der öffentlichen Sitzung vom 17. November 1906.

Der Geburtstag unseres königlichen Stifters, dem diese festliche Sitzung heuer allein durch die Schuld des Redners um eine Woche nachhinkt, lenkt den Blick des historischen Betrachters, der sich die großen Fortschritte der Menschheit wie des eigenen Volkes gern an den Schicksalen der engern Heimat vergegenwärtigt und im Rahmen der wohlvertrauten Landschaft Siegel und Spiegel der Kulturgeschichte aufsucht, wie von selbst auf den Anteil, den das mächtige Geschlecht der Welfen in jahrhundertelanger Herrschaft an der wirtschaftlichen und geistigen Entwicklung der niedersächsischen Lande gewonnen hat.

Zwei Epochen sind es vor allem, bei denen unsere Erinnerung mit tiefern Eindrücken weilt: die eine reicht von der Reformation bis zu den Anfängen unserer Hochschule und umspannt die Stiftung der Alma Julia und die Begründung der Bibliotheca Augustana: dynastische Förderungen der Wissenschaft und des Bildungsstrebens, wie sie Niedersachsen seit den Tagen der Karolinger und Ottonen nicht erlebt hatte. Die andere liegt ihr um vier bis fünf Jahrhunderte voraus: die Zeit mein ich, in welche die Anfänge und die erste Blüte städtischen Lebens in Niederdeutschland fallen, die Zeit von Heinrich dem Löwen, dem Städtezerstörer und Städteerbauer, bis zu dessen Enkeln und Urenkeln: jene zwei bis drei Menschenalter, innerhalb derer die Mehrzahl aller Städte zwischen Göttingen und Lübeck emporgewachsen ist. Nicht wenig von dem was diese Zeit erstehen sah, hat jene andere zerstört oder zerfallen sehen. Aber wenn wir uns fragen, welche Periode am ener-

gischsten und am dauerhaftesten an dem Kulturbilde der Landschaft geschaffen hat das wir heute um uns sehen, so ist es entschieden die erste Zeit der welfischen Herrschaft gewesen, das zwölfte und dreizehnte Jahrhundert. Nicht als ob ich den Ehrgeiz und Taten-drang der Dynastie damit aus dem Rahmen ihrer Zeit hinaus-heben möchte. Wenn Otto das Kind im dritten Jahrzehnt des 13. Jahrhundert an Duderstadt und Göttingen Stadtrecht verlieh, so geschah es im Wettbewerb mit dem Gemahl der heiligen Elisabeth, der, ehe er zu seiner Kreuzfahrt aufbrach, seine Marktprivilegien bis Witzenhausen und Münden vorrückte, wohl auch mit Siegfried II. von Mainz, der wenige Jahre später den alten eichs-feldischen Diakonatsitz Heiligenstadt zur Stadt erhob.

Jene Zeit vor nun siebenhundert Jahren hat für unsere Gegend den Unterschied zwischen Bürger und Bauer, zwischen Stadt und Land geschaffen, sie hat neue Standesunterschiede und neue Bil-dungsschichten vorbereitet und revolutionär in die Natur wie in die Menschenschicksale eingegriffen. Wir können uns die Verschie-bungen, die damals stattgefunden haben, nicht leicht stark und tiefgreifend genug vorstellen, aber anderseits sind die Verhält-nisse so durchaus andersartig, daß es schwer hält, ihnen durch eine Parallele mit den heutigen Zuständen nahe zu kommen. Nur das eine mag betont werden, daß es vor dem neunzehnten Jahr-hundert keine Epoche mit einer ähnlichen Umgestaltung zunächst der äußeren Kultur gegeben hat, wie die Zeit der Staufer und speziell für unsere Gegend die ersten Generationen der Welfen.

Für den Philologen liegt es gewiß nahe, zu fragen, welche Eindrücke eine so bedeutungsvolle Kulturepoche in unserer Sprache, in unserm Wortschatz hinterlassen hat. Es scheint fast wundersam, daß diese Frage von den Linguisten kaum aufgeworfen worden ist, während sie die Historiker und Juristen nie ganz umgehen konnten. Aber diese Gleichgültigkeit meiner Fachgenossen er-klärt sich doch leicht, wenn wir sehen, wie wenig sich das directe sprachliche Ergebnis der Epoche aufdrängt: im Gegensatz etwa zu der Römerzeit und zu den mächtigen Einflüssen des jungen Christen-tums. Aber dem halten wir den Einwand entgegen, ob nicht etwa auch aus dem Mangel so drastischer Zeugen etwas zu lernen ist? warum und in welcher Weise die Sprache zu jener Zeit haus-hälterisch verfuhr, wo sich doch so manche neue Anschauungen aufdrängten und so viele Begriffe verschoben? Auch das muß lehrreich sein, lehrreich nach beiden Seiten: nach der Seite der Sprache und nach der Seite der Kultur. Denn nicht nur aus

verschwenderischer Produktion und bereitwilliger Herübernahme fremden Gutes können wir lernen, sondern auch aus der spröden Zurückhaltung gegenüber dem Fremden und aus dem sparsamen Auskommen mit altem Worterbe.

Um es nun schon hier vorauszunehmen, die große Epoche der Städtegründungen gelangt zum Abschluß, ohne daß ein einziges Wort in dieser Sphäre neu geschaffen oder aus der Fremde entlehnt wird. Ihr einziges Ergebnis auf lexikalischem Gebiete sind Bedeutungsverengungen, welche den Unterschied von Burg, Dorf und Stadt zuscharfer Ausprägung bringen und den Bürger und Bauer von einander scheiden. Das Wort das damals aus einer allerallgemeinsten Bedeutung zur technischen Bezeichnung eines festen rechtlichen und wirtschaftlichen Begriffes wurde, ist eben das Wort 'Stadt'. Die Sprache wirtschaftet nur mit eigenem Gut, und sie kommt damit aus, ohne auch nur neue Ableitungen zu bilden. Ja sie hat allmählich ihren alten Reichtum wesentlich eingeschränkt: denn die Fülle der Erscheinungen welche früher sprachlich zum Ausdruck kamen, wird jetzt unter wenige feste Begriffe subsumiert; für diese Begriffe aber kann man sich mit dem überlieferten Sprachmaterial einrichten, ja man kann manches entbehren.

Den Gang dieses Processes zu beleuchten habe ich mir für heute zur Aufgabe gestellt.

Als die Germanen in die Geschichte eintreten, haben sie bereits eine lange Epoche gehobener Kultur hinter sich, sie sind längst keine Wilden und auch keine Halbnomaden mehr; ihre rege Phantasie und ihre Ideale offenbaren sich in ihren Personennamen, und diese Personennamen weisen hin auf ein inniges Verhältnis zur Natur einerseits, und auf eine jahrhundertelange Uebung in Krieg und Fehde anderseits. Sie bringen einen Wortschatz mit, der besonders reich ausgebildet ist für Kriegswesen, Rechtsleben und Ackerbau.

Dieser Wortschatz bezeugt freilich — und die bildlichen Darstellungen bestätigen — eine sehr primitive Art des Wohnbaus wie des Schutzbaus, aber er enthält anderseits reichliche Zeugnisse für das Zusammenwohnen in Dörfern. Wenn Ulfla nicht weniger als drei Ausdrücke dafür benutzt: 'weihs', 'paurp' und 'haims', so sind diese sämtlich aus der ostdeutschen Heimat mitgebracht und schwerlich von Haus aus völlig synonym. Alle drei Wörter kommen aber auch auf westdeutschem Boden vor, sie sind also unzweifelhaft urgermanischer Besitz. Von ihnen scheint ursprünglich nur einer den Begriff des Zusammenschlusses mehrerer Wohnungen zu enthalten, nämlich das 'Dorf', während wir bei 'haim' und 'weihs'

etymologisch nicht über den Begriff der Ruhestätte resp. der Einkehr hinauskommen: hier liegt also der zunächst verblüffende Uebergang von dem Begriffe und der Bedeutung Haus zum Begriffe Dorf vor, wie ihn ja auch das Nebeneinander von gr. *foixos* und lat. *vicus* verdeutlicht. Das Wort ‘Dorf’ besitzen die Germanen mit den Kelten gemeinsam: auch auf deutschem Boden ist es mehrfach in keltischer Form als Ortsname überliefert: Trebra, Drever, Drebber, Tribur, und hierin haben wir einen bedeutungsvollen Hinweis darauf, daß bei den Kelten Nord- und Westdeutschlands das Zusammenwohnen in Dörfern nicht das gewöhnliche war. Von dieser Seite her erhält die schlecht bewiesene These Meitzens von den Einzelhöfen der nordwestdeutschen Kelten eine gewiß beachtenswerte Stütze.

War Germanien in West und Ost ein Land der Dorfsiedelung, so war ihm hingegen völlig fremd das Bild der Stadt. Unter der *πόλις* der Karte des Ptolemäus dürfen wir uns bei Leibe nichts vorstellen, was den Städten der Römer oder der Gallier ähnlich gewesen wäre. Tacitus hat selbstverständlich recht, wenn er den Germanen die *urbes* im römischen Sinne völlig abspricht, und noch Ammianus Marcellinus sagt ihnen nach: ‘*ipsa oppida ut circumdata retiis busta declinant*’.

Das äußere Bild einer Stadt, mit dem der Germane zunächst keinen besonderen rechtlichen Begriff verbinden konnte, schien ihm in der Hauptsache charakterisiert durch die Befestigung — und so fremdartig zunächst die ganze Erscheinung der Römerstädte von allem abstechen mochte, was die germanische Heimat gewährte, der heimische Begriff der ‘Burg’ lag ihm nahe, und mit diesem Worte hat er sich über ein Jahrtausend beholfen, um die Begriffe *oppidum* und *urbs*, ja auch *civitas* wiederzugeben. Wie das Wort ‘Dorf’ teilt der Germane auch das Wort ‘Burg’ mit dem Kelten, bei dem es in Ortsnamen häufig genug erscheint, aber eine Entlehnung aus der Zeit der gesonderten Nationalitäten liegt hier sicher nicht vor, und der Zusammenhang mit dem ablautenden ‘Berg’ blieb lange als ein unmittelbar empfundener besonders in den Ortsnamen bestehen. Dem Begriff des bergenden, einschließenden, den wir heute unterlegen, geht der alte des Erhöhens, des Aufhebens oder auch der Aufschüttung voraus: unser ‘Schützen’ ist ja auch nichts anderes als ‘durch Aufschüttung verteidigen’.

Wer sich das Bild der altgermanischen Volksburg, die mit primitiven Umwallungen und ohne Türme war — denn Mauer und Turm sind von den Römern entlehnt — vor Augen hält, wird

schwerlich den Gedanken festhalten, daß das spätlateinische 'burgus' aus dem Germanischen entlehnt wäre. Daß es nichts anderes als griechisches *πύργος* ist, steht längst fest — aber es muß doch hinzugefügt werden, daß auf westfränkischen Boden eine Contamination beider Wörter, des griechischen und des germanischen, stattgefunden hat; denn nicht aus dem griechischen *πύργος*, sondern aus der deutschen Burg ist der französische bourgeois hervorgegangen.

War nun aber die Befestigung und der militärische Charakter das einzige, was dem Germanen an der römischen und keltischen Stadt auffiel? Nein, er lernte sie zugleich kennen als den Sitz von Handel und Gewerbe, als das Ziel sowol wie den Ausgangspunkt der römischen Händler, mit denen er in Tauschverkehr trat. Aber auch dafür bot ihm die heimische Burg bald genug die Parallele. Es gab nicht nur Schutz- und Fluchtburgen, die zu Kriegszeiten aufgesucht wurden, sondern auch solche, die als Sitze der Fürsten und Stützpunkte der kriegerischen Mannschaft dauernd belegt waren. In ihnen konnte sich unter Umständen ein Leben entwickeln, das mutatis mutandis dem Treiben einer römischen Festung oder Garnisonstadt glich. Wenn wir von der 'regia' oder dem 'castellum' des Maroboduus hören, in dem sich 'lixae et negotiatores' aufhielten, so werden wir unwillkürlich an die 'caupones' und 'mangones' der Römer erinnert, die in unserer Sprache so tiefgehende Spuren hinterlassen haben, ja geradezu zu Trägern des Handelsbegriffes geworden sind. Es sah zeitweise so aus, als würde der Germane hier von diesem neuen Begriffe des Kaufhandels aus eine Bezeichnung für die Stadt als Handelsort bilden: Deutschen, Angelsachsen und Nordländern ist ein Wort 'kaupung, kauping' gemeinsam, das auf deutschem Boden nur in Ortsnamen: 'Kaufungen, Kaufing' fortlebt, in England als Appellativum die Bedeutung 'Markt, Handel' entwickelt hat, im Norden aber in einer stattlichen Anzahl dänischer und schwedischer Ortsnamen geradezu den Begriff Stadt ausdrückt (Norrköping, Linköping, Nyköping). Daß es nahelag, von dieser Seite her das Wesen der Stadt zu erfassen, zeigen auch das ahd. 'koufstat' und das dänische 'købstad': noch heute ist dies in Dänemark die eigentliche Bezeichnung der Stadt neben dem völlig neutralen 'by' (Wohnort), das sowohl das Dorf, wie den Flecken und die Landstadt bezeichnet.

Neben 'burg' und vorübergehend 'kauping' treten auf germanischem Boden und in der Nachbarschaft noch ein paar andere Bezeichnungen für Stadt auf, die wie 'burg' den Begriff des Schutzes, aber anscheinend in der verengten Bedeutung der Ein-

zäunung zum Ausgangspunkt nehmen. So übersetzt ein oberdeutscher Glossator des achten Jahrhunderts 'urbs' mit 'hag', während er 'civitas' mit 'burg' wiedergibt: offenbar war ihm hag, eigentlich das Dorngehege, der niedere Begriff. Sehr interessante Erscheinungen erleben wir im äußersten Westen und im äußersten Osten unseres Volksgebiets. Auf dem keltischen Boden Englands, und nur hier, hat sich 'tûn', unser 'Zaun', von einer ursprünglichen Bedeutung 'eingezäuntes Gehöft' zu der Bedeutung Stadt entwickelt, zweifellos unter dem Einfluß des keltischen dūno 'Festung'; ja der 'Zaun' hat die 'Burg' geschlagen, indem durch 'town' 'borough' zur Rolle des Marktfleckens herabgedrückt ist — town seinerseits hat freilich wieder hinter dem vornehmeren französischen Fremdwort cité zurückstehn müssen.

Am entgegengesetzten Ende treffen wir auf heutigem Kolonisationsboden die slavischen Namen Belgard, Naugard und ähnliche; wir kennen sie als Belgrad und Nowgorod im äußersten Norden wie im Süden des slavischen Gebietes. Die Slaven haben unser 'gard' oder doch das urgemeinsame Wort aus der Bedeutung 'Umzäunung', die im Germanischen zu den Bedeutungen Garten, Hof, Gehöfte, Haus geführt hatte, viel weiter entwickelt: zu den Bedeutungen Burg und Stadt.

Im Centrum der germanischen Welt aber blieb nach wie vor Burg das herrschende Wort: Rom und Jerusalem, Augusta und Regina sind dem Deutschen des Mittelalters Burgen, der Dichter des Heliand hängt diese Silbe an die verschiedensten hebräischen und lateinischen Ortsnamen: 'Nazarethburg' und 'Rûmuburg', und wie man in Süddeutschland nach der germanischen Eroberung Augestburg und Reganesburg umschuf, so bezeichnete man in Friesland auch die alte Colonia als Colnaburch. Es trug manches dazu bei, diese Ausdrucksweise zu stützen. Während die Außenmauern der alten Römerstädte meist zerfielen, erhob sich im Innern ein stattlicher Neubau, hier eine Dynastenburg dort eine königliche oder bischöfliche Pfalz. An ihr haftete neben der mehr technischen, functionellen Bezeichnung 'pfalinza' in erster Linie der Name Burg, der Stadt aber wurde diese Bezeichnung nicht zum wenigsten dadurch erhalten, daß eine sehr große Anzahl von alten Burgen sich städtisch auswuchsen und später direkt das Stadtrecht erhielten: an solchen Städten wie an Luxemburg, Lüneburg, Lauenburg, Quedlinburg, Magdeburg und vielen andern blieb der Name Burg haften: der Eigename stützte seinerseits den Appellativwert.

Andererseits freilich hat sich im 10.—12. Jahrh. der bauliche Charakter der Verteidigungswerke und der bewehrten Wohnbauten

so völlig neu entwickelt, daß mit dem Begriffe der Burg feste Mauern und Türme, die der gemeinsamen Schutz- und Fluchtburg fehlten, untrennbar verbunden sind. Und nun erheben sich im 12. Jahrh. mehr und mehr solche Burgen auch auf einsamen Höhen, vielfach ohne eine bürgerliche Ansiedelung in ihrem Gefolge zu haben. Die Vervollkommnung des Befestigungswesens in erster Linie ist es, welche den Begriff der Burg zunächst aus der Stadt heraushebt und dann mehr und mehr von ihr trennt. Das Bedürfnis, die außerhalb der eigentlichen Festung gelegene Ansiedelung durch einen besondern Ausdruck zu bezeichnen, haben schon die lateinischen Autoren des zehnten Jahrhunderts, wie z. B. Widukind, der von der *urbs* oder *civitas* regelmäßig das *oppidum* scheidet: die deutsche Sprache, welche hierfür wenigstens in Niedersachsen zur Zeit des Heliand das Wort 'wîk' verwendet hatte, war, wenn sie nicht, wie es die Glossen wohl tun, den Ausdruck 'dorf' wählte, auf eine Neubildung hingewiesen, die als 'vorburg, vorebürge' längere Zeit in Geltung gewesen ist, ohne sich aber durchzusetzen. Anders war die Entwicklung in Italien, wo man entweder *città* : *borgo* unterschied, oder aus der *città* die *cittadella*, die befestigte Stadt heraushob.

Noch einmal schien die Möglichkeit gegeben, daß sich Burg und Stadt derart scheiden würden, daß der Burg der Charakter der Festung gewahrt blieb, für die angegliederten Straßen und Plätze mit den Gewerbetreibenden aber eine Gesamtbezeichnung gewählt wurde, die ihre wirtschaftliche Bedeutung zum Ausdruck brachte. Damals nämlich, als die Verleihungen des *jus mercatus* oder auch des *jus fori* an herrschaftliche Flecken vielfach die Vorstufe ihrer Erhebung zur Stadt bildete. Wie früher einmal 'kaufung', so hätte jetzt 'ma r k e t' sehr wohl die *urbs* oder *civitas* im Gegensatz zu 'burg', *arx* oder *castellum* bezeichnen können. Daß es in der Tat auf dem Wege dazu war, können wir bei einigen alemannischen Dichtern aus der Bodenseegegend, bei Hartmann von Aue und Ulrich von Zatzichofen ersehen, wo mehrfach in Schilderungen, die wenigstens bei Hartmann keine unmittelbare Veranlassung im französischen Original haben, der bei einer 'burg' gelegene größere Ort 'market' genannt wird — allerdings bei Hartmann schon wechselnd mit dem Wort, das längst mit seinen Ansprüchen aufgetreten war und bald allein die Herrschaft haben sollte, mit 'stat'.

Der Weg, auf dem dies uralte, aber höchst allgemein die Ruhestellung oder den Ruhe-Platz ausdrückende Wort zu einer so verengten und eminent präzisen Bedeutung gelangte und sowohl eine

bestimmte äußere Anschauung, wie mehr und mehr einen festen rechtlichen Begriff einschloß, ist nicht mit voller Sicherheit zu ermitteln. Wir können einmal an die Art denken, wie heut im Munde der Geschäftsleute der Ausdruck ‘Platz’ aus ähnlicher Allgemeinheit der Bedeutung präzisiert wird. Dann müssen wir uns erinnern, daß Ausdrücke wie ‘houbetstat’, ‘koufstat’, ‘hovestat’ (bebaunter oder bebaubarer Platz) längst gang und gäbe waren. Festhalten müssen wir aber wohl daran, daß die Benennung ausging von den Insassen der Burg, die das vorgelagerte Wohnterrain kurzweg als ‘die stat’ bezeichneten. Umgekehrt ist das lange Festhalten der Bezeichnung Burg für das Ganze in erster Linie auf die Außenstehenden oder von außen Kommenden zurückzuführen, denen die Burg doch immer als die Hauptsache und alles vorgelagerte als ein bloßer Annex erschien. Eine Ausdrucksweise wie ‘diu stat ze Regenesburc, Ougesburc, Strâzburg’, die sich früh findet und ähnlich zu beurteilen ist wie das französische la ‘ville de Paris’, wird vorbereitend gewirkt haben.

Seit dem Anfang des 12. Jahrhunderts beginnt sich der neue Ausdruck geltend zu machen; wir haben als Zeugen zunächst fast nur poetische Literaturdenkmäler und dazu ein paar Psalmenübersetzungen, mit denen wir das constatieren können: nicht selten erweist oder bestätigt der Wandel des Ausdrucks die Chronologie literarischer Denkmäler dieser Zeit: ein älteres Gedicht von Judith nennt die Stadt Bethulia nur ‘burg’, ein jüngeres bairisches um etwa 1130 ebenso constant ‘stat’; wenn also ein bairischer Schreiber von 1187 im Gegensatz zu einem ältern rheinischen die civitas des Psalters noch immer mit ‘burg’ wiedergibt, so beweist er klärlich, daß er einer älteren Vorlage gefolgt ist. Einen ganz ähnlichen Wandel wie hier zwischen burg und stat sehen wir vor uns, wenn der Redactor von Wiciefs Neuem Testament für das borough-town seiner Vorlage überall cité einsetzt: auch Nazareth und Bethanien wurden bei ihm zur cité. Wenn in zwei Werken, die wir mit der Ueberlieferung allgemein demselben Dichter zuschreiben, in der Eneide Heinrichs von Veldeke und dem Servatius der Gebrauch der beiden Ausdrücke total auseinandergeht, so ist das eine ernste Mahnung, die Autorschaft nachzuweisen. Charakteristisch ist auch, daß das Nibelungenlied, obwohl es Wien, Worms, Passau und Gran ‘stat’ nennt, an der Formel ‘bürge unde lant’ da festhält, wo die höfischen Dichter die Dreiheit ‘stete, bürge unde lant’ oder gar die Vierheit ‘stete und bürge, dorf und lant’ wählen.

Die Festsetzung des neuen Wertes tritt nun auch deutlich zu

Tage in den zahlreichen 'Neustadt'-Gründungen des 12. Jahrhunderts die, soviel ich sehe, mit Wienerisch-Neustadt anheben; sie verdrängen die alten Neuenburg, Naumburg, Nienburg und haben nur wenige 'Neumarkt' aus derselben Periode zur Seite. Charakteristisch ist die Verwendung des Wortes auch in andern Ortsgründungen, die von vornherein als städtische geplant sind: so zum Beispiel bei Lippstadt. In mehrfacher Beziehung merkwürdig ist die Benennung, welche Heinrich der Löwe jener Neugründung gab, die er nach dem Lübecker Brande von 1157 an der Außentrave ins Werk setzte: er nannte sie 'Lewenstad' nach dem ausdrücklichen Zeugnis Helmolds, gab ihr also einen modernen und obendrein einen hochdeutschen Namen, denn in der Sprache des Landes und der vorigen Generation bedeutet 'Lauenburg' dasselbe.

Um 1200 kann man sagen, ist die Scheidung von 'Burg' und 'Stadt' fest und scharf. Gleichzeitig ist aber auch die Scheidung von 'Stadt' und 'Dorf' vollzogen: die Bezeichnung Dorf wird auf die bäuerliche Gruppensiedelung im wirtschaftlichen und rechtlichen Sinne beschränkt. Das war nicht von vornherein sicher: es kommt vom 8—11. Jahrhundert mehrfach vor, daß 'dorf' auch oppidum, sogar urbs übersetzt, und an einigen Vorburgen städtischen Charakters haftet die Bezeichnung noch heute. Aber es war von den mehrfachen Bezeichnungen der bäuerlichen Gruppensiedelung allein übrig geblieben und wurde jetzt ganz darauf eingeschränkt. Eine eigentümliche Entdeckung ist es, daß ein paar bairische Dichter des 13. Jahrhunderts von Heinrich v. d. Türlin bis zum Verfasser der jüngern Titarel statt 'dorf' beständig 'ville' brauchen. Ob das eine Marotte der Wortwahl ist, oder ob es wirklich in einem lokalen Gebrauch begründet war, ist schwer zu entscheiden. In der Gegend wo man das roman. villare als 'Weiler' übernommen hatte, wurde sich die Erscheinung leicht begreifen, aber gerade dem Bairischen ist Weiler fremd.

Für die Bewohner der Burg hatte sich frühzeitig die Doppelbezeichnung 'burgliute' und 'burgaere' gebildet. Die letztere blieb an den Bewohnern der nunmehrigen Stadt haften: während Burgleute und Burgmannen eine verengte Bedeutung erhielten, wurden die Bürger im rechtlichen Sinne die Bewohner der Stadt — eine später auftauchende Bezeichnung 'Städter' hat es nie über einen lokalen Wert hinausgebracht, den Zuwachs des Rechtssinnes hat sie nie erfahren. Ein eigenartiges Gegenstück hierzu bietet das Französische, wo sich ville zu der allgemeinsten Bezeichnung der Stadt erhoben und das abgeleitete village davon getrennt

hat, während in der verächtlichen Bedeutung von villain noch die Erinnerung an einen älteren Wert fortlebt.

Von dem ‘Bürger’ hat sich der ‘Bauer’ geschieden, nicht sofort freilich und nicht überall gleichmäßig. Denn von Haus aus heißt ‘gebür’ nichts anders als contribulis, vicinus: also der mit andern zusammenwohnende. Der auf dem Einzelhof wohnende ist wol ein ‘bûman’, aber noch lange kein ‘gebür’. Dazu wolle man sich des Umfangs und der Bedeutung der Landwirtschaft in hundert kleinen Städten erinnern. So gab es dann in den Gegenden nicht nur koufliute, sondern auch gebûren — ja in niederdeutschen Städten sind bûrschap und bûsprake feste rechtliche Begriffe auch für die städtische Gemeinde. In Oberdeutschland treffen wir in den Quellen des 12. Jahrhunderts die Unterscheidung koufliute und bûliute für die Bewohner von Stadt und Land. Tatsächlich hat damals die Bezeichnung des Stadtbürgers zwischen ‘koufman’ und ‘burgaere’ lange geschwankt: das Nibelungenlied und die Kudrun brauchen beide noch promiscue, und burgaere hat sich erst durchsetzen können, nachdem die Bezeichnungen der Gewerbetreibenden, welche ursprünglich das eine Wort Kaufmann umschloß, mannigfaltiger geworden waren. Der Kaufmann bietet das seltene Beispiel einer Bewahrung, ja Veredelung oder Erhöhung des ursprünglichen Wertes innerhalb der wirtschaftlichen Sphäre. Während der lâchi (Lachner) zum Arzt, der Bartscherer zum Barbier, der Säumer und Nähter zum Schröder und Schneider (tailleur) hinstreben, hat sich der Kaufmann durch Loslösung des Krämers, Pfragners, Krempplers einerseits, des Handwerksmeisters anderseits den vornehmen Klang bewahrt, den ihm der Germane im Gegensatz zum römischen caupo gegeben hatte.

Dem Gegensatz zwischen Bürger und Bauer entspricht der Gegensatz ‘Stadt’ und ‘Land’. Er ist erst mit der Entfaltung eines reichern städtischen Lebens, mit der Vermehrung und Ausbreitung der Stadtgründungen gegeben und hat weiterhin in der Neuzeit zu einer Scheidung der Wörter Landmann und Landsmann, Landleute und Landsleute geführt. Das Mittelalter kennt diesen Gegensatz wohl als den Gegensatz von ‘Stadt’ und ‘Gäu’, aber nur in Süddeutschland, wo der Begriff des Stadtgaues, wie er im Rheinland vorkommt, unbekannt gewesen ist. Auf fremdem Boden, in den südlichen Kulturländern haben sich die Germanen schon früh mit diesem Unterschied vertraut gemacht; wir sehen, wie Ulfila in solchem Sinne þaupr verwendet: der verlorene Sohn zieht hinaus aufs ‘Dorf’. Niemals aber und zu keiner Zeit hat man dafür den Ausdruck Heide gebraucht: die ‘heide’ ist für die ältere Zeit ein ziemlich

fester Begriff, der erst durch die moderne Wald- und Weidewirtschaft sich verschoben hat: sie ist das dem Pfluge nicht unterworfen Land, mit ungepflügter Weide und ungepflügtem sporadischem Holzbestand: das Schwinden dieses Baumschmuckes hat daraus die großen Heiden Nordwestdeutschlands werden lassen, die Aufforstung hat die Heiden der Mark Brandenburg geschaffen; den Begriff 'plattes Land' hat das Wort nie ausgedrückt, und schon darum hatte Wilhelm Schulze Recht, die übliche Deutung von Heide 'paganus' als einer Kontrafaktur dieses lateinischen Wortes aus der Welt zu schaffen.

Wir stehen am Ende unserer Betrachtung: sie strebte Vielen verständlich zu sein und hat sich darum beschränkt in der Auswahl des Wortmaterials, das auch bei reichlicher Vorführung nur dasselbe Bild ergeben hätte; möchte sie, das ist mein Wunsch, nun aber auch den Schein der Oberflächlichkeit vermieden haben.

Aus der Musterung eines bestimmten Ausschnittes unseres Wortschatzes ergab sich die eigentümliche Tatsache, daß in einer Zeit regsten wirtschaftlichen Aufschwungs, die zusammenfiel mit lebhafter Pflege der geistigen Kultur, auf einem Gebiete, das die Betätigung energischsten Fortschritts aufweist, neue Bilder in der Landschaft, neue Erscheinungen und Begriffe im wirtschaftlichen und im Rechtsleben hervorruft, die Sprache kein einziges neues Wort geschaffen — auch kein einziges Wort aus der Fremde dauernd entlehnt hat. Und dabei ist diese Zeit eine Zeit der Literaturblüte, in der Dichter wie Hartmann und Walther die feinste Nüancierung des Ausdrucks anstreben, Dichter wie Wolfram und Gottfried eine ungewöhnliche sprachbilderische Kraft entfalten. Aber es ist eben ein ganz anderes Feld, auf dem sich diese Meister der Sprache bewähren: es sind hauptsächlich beschreibende Elemente und Vermehrungen des abstracten Ausdrucks, die sie unserm Wortschatze zuführen. Auf dem Gebiete der wirtschaftlichen Kultur ist keine sprachschöpferische Persönlichkeit aufgetreten — und nur die sprachschöpferischen Persönlichkeiten, nicht das Volk und die Verhältnisse schaffen die Wörter. Auf dem Boden der Rechtssprache und in der Benennung der Pflanzen haben sich solche sprachtüchtige Männer in früher und frühester Zeit betätigt — ewig namenlose freilich, aber zweifellos bedeutende Individuen. Ohne das Dazwischentreten der Persönlichkeit hilft sich das Volk sparsam, haushälterisch und gelegentlich fast notleidend mit dem überlieferten Sprachschatz, begnügt es sich schließlich mit einem so ganz matten und nichtssagenden Ausdruck wie 'Stadt', um ein

höchst bestimmtes Anschauungsbild, um eine Summe rechtlicher und wirtschaftlicher Vorstellungen und Begriffe zu umfassen.

Und noch etwas anderes ist lehrreich und bemerkenswert. Jene Zeit, welche den Begriff der Stadt ausprägte, war auch im Entleihen fremden Sprachgutes nichts weniger als spröde: sie hat in manchen Zweigen der äußeren Kultur höchst ungeniert Anleihen erhoben. Aber das Gebiet das wir betrachtet haben, blieb davon völlig verschont. Was das besagen will, lehrt ein Blick auf England: der Engländer hat das Wort town unter keltischem Einfluß zu seiner neuen Bedeutung entwickelt, er hat die cité von den französischen Normannen übernommen, er drückt Dorf und Stadt (village und city), Bürger und Bauer (citizen und peasant) durch französische Wörter aus. Die deutsche Stadtentwicklung aber, obwohl nicht ohne Zusammenhang mit einer allgemeinen Kulturströmung, ist doch recht eigentlich, wie alles was mit der Genossenschaft zusammenhängt, in nationaler Bahn und Richtung verlaufen.

Lehrreich ist das Gebiet unserer heutigen Wortstreife auch für prinzipielle Fragen der Etymologie. Unsere etymologische Wissenschaft ist, mag sie linguistisch noch so gut ausgerüstet sein, noch immer eine dilettantische Disciplin. Sie ist im besten Falle das, was die Alchemie vor und neben der Chemie war: noch hat kein eingesperrter Etymologe das Porzellan der Sprachwissenschaft erfunden. Der Etymologe glaubt auf der Höhe zu stehen, wenn er alle Lautgesetze kennt und über eine gehörige Reihe von semasiologischen Analogieen und möglichen Bedeutungsentwicklungen verfügt. Er ist in der Regel historisch ungebildet — und er müßte mit allen Fernen und Tiefen der Kulturgeschichte vertraut sein! Vor allem aber, und das ist der Centralfehler, er operiert mit den Wörtern bestenfalls als mit Erzeugnissen der Volksseele und des Sprachgeistes, während sie doch immer die Schöpfungen des Einzelnen sind! Nur bei der Auswahl, Bewahrung und Umwertung des Wortschatzes wirkt die Gesamtheit mit, nicht bei der Schaffung des Wortbildes. Aber auch diese Auswahl und Bewahrung richtet sich nicht danach, ob ein Wort eminent ausdrucksvoll und significant ist: es wirken dabei eine Menge andere Factoren mit, unter denen die Euphonie oder Eulalie und der formale Anschluß an eine vorhandene Gruppe die wichtigsten sind. Und sie alle können unter Umständen zurücktreten, wenn die Zeit nach einem Worte hindrängt: dann kann auch eine Bildung Aufnahme finden, die dem Schema und der Regel widerspricht oder sich zu einem nahestehenden Wort oder einer nahestehenden Gruppe widerspruchsvoll verhält. Ein Wortbild wie ‘Zeitung’ fällt aus allen

Analogieen jener Epoche heraus, in der es aufgenommen ist: es hat ein älteres 'Reitung' verdrängt. Als die Zeit den Begriff der Nationalität erfaßt hatte, da griff sie freudig zu Friedrich Ludwig Jahns 'Volkstum', obwohl doch kein Mensch je Königstum, Bürgerstum gesagt hatte. Jener Poet des 17. Jahrhunderts der für das durch die bildende Kunst der Hochrenaissance allvertraute cornu copiae die Uebersetzung 'Füllhorn' schuf, hat damit Erfolg gehabt, obwohl alle andern Wörter ähnlicher Bildungsweise in Füll- ein Verbum und nicht ein Substantivum enthalten. Und als dieselbe Zeit das Wort 'Nachricht' zunächst im Sinne von Avertissement anbrachte, hat sich niemand daran gestoßen, daß es schon längst einen 'Nachrichter' gab, dessen Sphäre eine ganz andere war.

Es gibt nichts verkehrteres, keinen verhängnisvolleren Rückfall in die Kinderkrankheiten der Wissenschaft, als wenn neuerdings vergleichende Rechtsgeschichte und vergleichende Religionsgeschichte sich wieder mit verstärktem, ja fast leidenschaftlichen Vertrauen an die Sprachforschung wenden: sie soll ihnen bei der Ermittlung der geheimnisvollsten Vorgänge frühzeitiger Kultur mit tiefgründigen Aufschlüssen behilflich sein. Eine philologisch-historische Disziplin, die über ihre eigenen Hilfsquellen und die an ihnen herausgebildete Methode hinaus nach dem Etymologen ausschaut, ist wie ein kranker Arzt, der dem Quacksalber ruft. Und der echte Etymologe ist wie der echte Quacksalber: er hat ein Mittel für alles, weil ihm die Ehrfurcht fehlt für die ungeheure Mannigfaltigkeit der Kulturerscheinungen und für das unter tausend und abertausend Möglichkeiten sich vollziehende Mitschaffen des Individuums an der Mehrung und Wertung des Kulturbesitzes der Menschheit.

Die Untersuchungen, welche meine Rede voraussetzt und einen Teil der Sammlungen, auf die sich diese stützen, hoff ich in nicht zu ferner Zeit in der Vierteljahrsschrift für Social- und Wirtschaftsgeschichte zu veröffentlichen.

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken.

Siebenter Bericht ¹⁾).

Von

F. Klein.

Der nachstehende Bericht knüpft an den Umstand an, daß soeben (Nov. 1906) der Band VII der Gesamtausgabe ausgegeben werden konnte. Der Bearbeiter, Herr Brendel, berichtet darüber folgendermassen:

„Band VII enthält außer der *Theoria motus* den gesamten theoretisch-astronomischen Nachlass; da er schon sehr viel stärker ausgefallen ist, als die früher erschienenen Bände, so konnten die noch restierenden kleineren Stücke des Nachlasses über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie nicht mehr darin Platz finden; sie sollen zugleich mit einigen physikalischen Nachträgen auf Band X verschoben werden.“

„Die *Theoria motus* ist bekanntlich bereits 1871 von Schering im Verlage von F. A. Perthes in einer der Gesamtausgabe entsprechenden Ausstattung herausgegeben und mit einigen kleineren Notizen aus dem Nachlass versehen worden; die Gesellschaft der Wissenschaften hat aber immer an der Ansicht festgehalten, daß hiermit der spätern Aufnahme der *Theoria motus* in die Gesamtausgabe nicht vorgegriffen sein könne. Bei dem neuen Abdruck, der dementsprechend den Band VII einleitet, wurde das ganze Werk einer nochmaligen genauen Durchsicht unterworfen,

1) Vergl. den sechsten Bericht in den Nachrichten von d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen aus dem Jahre 1904, pg. 15—19.

wobei eine Reihe von bisher nicht bemerkten Druckfehlern und anderen Unrichtigkeiten aufgefunden und verbessert wurde. Die von Gauss gegebenen numerischen Beispiele zur Bahnbestimmung (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) sind klassisch geworden und werden häufig in Lehrbüchern und zur Prüfung neuer Methoden herangezogen. Eine genaue Nachrechnung derselben erschien schon aus diesem Grunde keine überflüssige Arbeit; hierbei fanden sich nun mehrere Rechenfehler und andere Stellen, bei denen die Zahlen der Natur der Sache nach etwas unsicher waren. Es wird wertvoll für den Leser sein, diese Stellen, da wo es anging, verbessert und wo dies nicht möglich war, ohne die ganze folgende Rechnung zu ändern, wenigstens genau angegeben zu finden. Für die Einzelheiten muß ich auf meine ausführlichen Bemerkungen hinweisen, die dem Abdruck im siebenten Bande (S. 281) folgen.“

„Der zweite Abschnitt des Bandes bringt kleinere „Zusätze zur Theoria motus und andere Nachträge zur elliptischen Bewegung“. Die letzteren betreffen hauptsächlich die Zodiaken der Himmelskörper; so bezeichnet Gauss den Teil der Himmelskugel, innerhalb dessen ein Himmelskörper, von der Erde gesehen, überhaupt erscheinen kann. Verschiedenes darüber hat er bereits selbst veröffentlicht. Gauss bezeichnet in seinem späteren Alter (vgl. Bd. VII, Seite 314) diese Frage als eine nicht uninteressante mathematische Aufgabe und scheint sich darüber zu wundern, dass Niemand anderes sich inzwischen damit beschäftigt hat; auch bis heute scheint dies nicht der Fall zu sein. Die abgedruckten Nachlassnotizen enthalten einige interessante Ergänzungen der Gauss'schen Veröffentlichungen.“

„Der dritte Abschnitt handelt von der parabolischen Bewegung. Gauss beabsichtigte, als Supplement zur Theoria motus eine Theorie der parabolischen Bahnen herauszugeben; er schrieb darüber 1815 an Olbers und Bessel (s. Bd. VII, Seite 350). Die abgedruckten Stellen geben das, was sich im Nachlass darüber vorgefunden hat. Speziell interessant sind einige Kunstgriffe, die er anwandte, sowie die Idee, durch Herstellung von Hilfstafeln die Bestimmung einer Bahn zu erleichtern (vgl. Bd. VII, Seite 331). Ein Aufsatz über die Entwerfung einer der Barkerschen ähnlichen Tafel fand sich vollkommen druckfertig im Nachlass vor, ebenso die Tafel selbst, bei der Gauss nur noch die Interpolation auf das halbe Intervall auszuführen beabsichtigte.“

„Sodann folgen als vierter Abschnitt die ersten Störungsrechnungen von Gauss; sie betreffen die Ceres und datieren von

1802 bis 1805. Gauss schließt sich zunächst an Laplace an und rechnet Koordinatenstörungen, wobei er jedoch die sekularen Störungen in solche der Elemente umwandelt; auch entwirft er Tafeln zur leichteren Berechnung der Störungen. Die Resultate der ersten Untersuchung hat Gauss selbst, ohne die Rechnung, kurz veröffentlicht (vgl. Bd. VI). Die späteren Untersuchungen von 1805 sind dann nach einer gänzlich neuen Methode ausgeführt. Auch sie betreffen Koordinatenstörungen; aber die Entwicklung der Störungsfunktion hat Gauss schon damals im Anschluss an seine *Theoria interpolationis* (die sich ebenfalls druckfertig im Nachlaß vorfand, und Band III, Seite 265 ff. abgedruckt ist) auf interpolatorischem Wege ausgeführt, also dieselbe Methode angewandt, die Hansen über 30 Jahre später neu auffand. Indessen war das Verfahren, das Gauss hier zunächst brauchte, noch etwas umständlich und wurde von ihm erst zur höchsten Vollkommenheit entwickelt bei Gelegenheit der Berechnung der Pallasstörungen.“

„Die Veröffentlichung der Gauss'schen Arbeiten über die Störungen der Pallas, welche den fünften und wichtigsten Abschnitt des Bandes bilden, wurden seit Jahrzehnten von den Astronomen mit Spannung erwartet, da viele Einzelheiten darüber, im speziellen seine Entdeckung des rationalen Verhältnisses der Umlaufzeiten von Pallas und Jupiter, bereits in die Oeffentlichkeit gedrungen waren. Zwar sind die Aufzeichnungen über diese Entdeckung im Nachlaß äußerst spärlich; indessen geht aus ihnen doch hervor, wie Gauss die Störungsglieder mit verschwindendem Divisor behandelte. Nur konnte nicht festgestellt werden, wie Gauss zuerst im Jahre 1812 auf dies Resultat geführt wurde. Es dürfte sich kaum in aller Strenge aufrecht erhalten lassen, schon weil die Störungen höherer Ordnung nicht in Rücksicht gezogen sind. Die Ausführungen, welche ich Herrn F. Klein für den sechsten Bericht zur Verfügung gestellt hatte über die Art und Weise, wie Gauss anfangs auf die Kommensurabilität der mittleren Bewegungen beider Planeten geschlossen hat, habe ich später als nicht zutreffend erkannt und ich muß deswegen auf die Bemerkungen im siebenten Bande selbst (Seite 607—608) verweisen.“

„Gauss hat seiner Rechnung eine ganz außerordentliche Ausdehnung gegeben und die Störungsfunktion auf dem bereits erwähnten interpolatorischen Wege bis zur 18fachen Anomalie Jupiters und bis zur 24fachen der Pallas entwickelt. Ueber diese Entwicklung hat er auch Tagebuch geführt (Bd. VII, Seite 605), woraus hervorgeht, dass er zu dieser Entwicklung allein in etwas über drei Monaten circa 340000 Ziffern gerechnet hat. In den

Ausdrücken für die Störungen der Elemente hat er dann über 3000 Sinus- und ebenso viele Cosinusglieder. Die Vergleichung mit den Beobachtungen zeigte eine recht gute Uebereinstimmung (bis auf wenige Bogensekunden) und führte sogar zu einer Verbesserung der Jupitermasse, welche Gauss schließlich überraschend genau gleich $\frac{1}{1050}$ fand. Von der Pariser Akademie war damals

ein hoher Preis ausgesetzt auf die Berechnung der Pallasstörungen; man nahm an, daß er Gauss zufallen würde, und dieser beabsichtigte auch sich darum zu bewerben. Da die Vollendung der Gauss'schen Untersuchungen sich aber immer länger hinzog, so wurde auch die Verteilung des Preises mehrfach weiter hinausgeschoben und schließlich verlief die Angelegenheit im Sande, obwohl Gauss' Rechnungen eigentlich als vollendet angesehen werden konnten. Er wollte indessen, wie immer, so auch hier, etwas ganz vollkommenes liefern und hatte auch Nikolai veranlaßt, die Saturnstörungen zu berechnen, sowie selbst die Berechnung der Marsstörungen übernommen; nur diese letzteren sind nicht ganz fertig geworden; für die Jupiterstörungen hat Gauss sogar fertige Tafeln hergestellt. Er fand nicht mehr die Zeit, die Arbeit zum Abschluß zu bringen und druckfertig zu machen; er sagt 1834 in einem Briefe an Gerling (Bd. VII, Seite 432): „Es ist mir ein schmerzlicher Gedanke, daß meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwicklung und Bekanntmachung bisher hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich, wie vieles Andere, einst mit mir untergehen wird. Sie glauben nicht, wie schwer es mir durch so vielfache Zersplitterung der Zeit so wie unter dem Druck so mancher Verhältnisse wird, eine wissenschaftliche Arbeit durchzuführen.“ Uebrigens fand sich im Nachlaß ein Anfang zur Drucklegung seiner Untersuchungen, nämlich ein begonnenes Manuskript (abgedruckt Bd. VII, Seite 439): „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires, avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas“. Dasselbe enthält die Ableitung der Differentialgleichungen für die Variationen der Elemente, welche bald nachher auch von Lagrange veröffentlicht wurden; auch ein interessantes Kapitel über die Entwicklung periodischer Funktionen in Reihen findet sich darin.“

„Der letzte Abschnitt des Bandes endlich bringt eine Theorie des Mondes, die wegen der Behandlung der Differentialgleichungen der Mondbewegung Interesse verdient. Die Methode ist ähnlich der Laplace'schen, die dieser veröffentlichte, während Gauss

vermutlich noch mit seinen Untersuchungen beschäftigt war; er hat sie ziemlich plötzlich abgebrochen. Die Resultate erhalten dieselbe Form wie später bei Plana.“

Da die Bände VII und IX der Gesamtausgabe bereits 1900, bezw. 1903, erschienen sind, so soll nunmehr an die Bearbeitung des letzten Bandes (X.) unmittelbar herangegangen werden; er wird die noch fehlenden Nachlaßstücke über Gegenstände der praktischen und stellaren Astronomie, Chronologie, theoretische Physik und Optik bringen; sodann Biographisches, Mitteilungen allgemeinen Interesses, insbesondere aus dem Briefwechsel, einen Bericht über die Herausgabe der Gauss'schen Werke, einen solchen über das Gauss-Archiv und ein ausführliches Generalregister.“





363

PARIES
Y
5-6004

days

